Les racines des composantes hyperboliques de M sont des quarts d'entiers algébriques

Thierry Bousch, février 1996

Théorème. *On suppose que z est périodique pour le polynôme $z \mapsto z^2 + c$, avec multiplicateur ρ. Alors ρ est un entier algébrique si et seulement si $4c$ est un entier algébrique.*

Corollaire. *Si c est une racine de composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot, alors $4c$ est un entier algébrique.*

Notations. On pose $C = 4c$, et $f(z) = z^2 + c$. Considérons l'équation $f^n(z) = z$ comme équation en z sur le corps $K = \mathbf{C}(c)$; cette équation admet $N = 2^n$ solutions *distinctes* dans la clôture algébrique de K, que nous noterons $z_1, \ldots z_N$. Si on pose $Z_i = 2z_i$, alors le multiplicateur ρ_i de l'orbite de z_i est donné par

$$\begin{aligned} \rho_i &= 2z_i \times 2f(z_i) \times \cdots \times 2f^{n-1}(z_i) \\ &= Z_{i_0} Z_{i_1} \cdots Z_{i_{n-1}} \end{aligned}$$

où $z_{i_k} = f^k(z_i)$. Une des implications du théorème est facile à démontrer ; nous l'énoncerons sous la forme suivante :

Lemme 1. *Les Z_i sont des entiers algébriques sur $\mathbf{Z}[C]$. Par conséquent, les ρ_i aussi. En particulier, si C est un entier algébrique, alors les Z_i et les ρ_i seront aussi des entiers algébriques.*

Preuve du Lemme 1. Pour simplifier les notations, on considèrera uniquement une orbite de période exactement n et on supposera qu'elle s'écrit simplement $(z_0, z_1, \ldots z_n)$. Les z_i vérifient alors les relations suivantes,

$$\begin{cases} z_0^2 + c = z_1 \\ z_1^2 + c = z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1}^2 + c = z_0 \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous forme équivalente

$$\begin{cases} Z_0^2 + C = 2Z_1 \\ (2Z_1)^2 + 4C = 8Z_2 \\ \cdots \\ (2^{(2^k-1)} Z_k)^2 + 2^{(2^{k+1}-2)} C = 2^{(2^{k+1}-1)} Z_{k+1} \\ \cdots \\ (2^{(2^{n-1}-1)} Z_{n-1})^2 + 2^{(2^n-2)} C = 2^{(2^n-1)} Z_0 \end{cases}$$

Il est maintenant facile d'éliminer $Z_1, \ldots Z_{n-1}$ dans le système ci-dessus, ce qui donne l'équation suivante vérifiée par Z_0 :

$$(\cdots((Z_0^2 + C)^2 + 4C)^2 + \cdots)^2 + 2^{2^n-2}C = 2^{2^n-1}Z_0.$$

Cette équation est monique en Z_0 et à coefficients dans $\mathbf{Z}[C]$, donc Z_0 est un entier algébrique sur l'anneau $\mathbf{Z}[C]$. Evidemment, il en est de même pour tous les autres Z_i. Ceci démontre le lemme 1.

La réciproque du théorème sera donnée par le

Lemme 2. *Le paramètre C est un entier algébrique sur $\mathbf{Z}[\rho]$. En particulier, si ρ est en entier algébrique sur $\mathbf{Q}$, alors il en est de même de C.*

Preuve du Lemme 2. Nous avons vu que les ρ_i (il y en a N) sont des entiers algébriques sur $\mathbf{Z}[c]$. Ils vérifient donc une équation de la forme

$$\prod_{i=1}^{N}(\rho - \rho_i) = \rho^N + \lambda_1(C)\rho^{N-1} + \cdots + \lambda_N(C) = 0,$$

où les λ_i sont des polynômes à coefficients entiers. Pour prouver le lemme 2, il suffit de voir que le coefficient dominant de C dans l'équation ci-dessus est égal à ± 1.

Lemme 2a. *Le polynôme λ_N est de degré $Nn/2$ et son coefficient dominant est égal à ± 1. Tous les λ_k sont de degré au plus $kn/2$.*

En effet, quand C est très grand, les Z_i sont approximativement égaux à $\pm\sqrt{-C}$. Les ρ_i sont donc de l'ordre de $\pm(-C)^{n/2}$. Le polynôme $\lambda_k(C)$ étant (au signe près) la fonction symétrique élémentaire de degré k en les ρ_i, on a la majoration

$$\lambda_k(C) = O(|C|^{kn/2}) \qquad \text{quand } |C| \to \infty.$$

Donc le degré de λ_k est au plus $kn/2$. Pour $k = N$ on peut dire un peu mieux :

$$\lambda_N(C) = (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \rho_i \sim \pm(-C)^{Nn/2} \qquad \text{quand } |C| \to \infty,$$

ce qui prouve le lemme 2a, et ceci termine la démonstration du lemme 2 et du théorème.