De combien tournent les rayons externes :
une illustration de la méthode de Löwner

Thierry Bousch

Introduction. Les résultats exposés dans cet article ont pour but de justifier une méthode couramment utilisée pour tracer les rayons externes d'angles rationnels d'un ensemble de Julia connexe, pour des polynômes de la forme $z \mapsto z^2+c$ (ou plus généralement $z \mapsto z^d+c$).

Pour chaque $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, paramétrons le rayon externe d'argument θ par le potentiel ; on a des applications $\gamma_\theta :]0, +\infty[\to \mathbf{C}$ telles que $\gamma_\theta(g) \sim e^{g+i\theta}$ quand g est grand. Quand g est moins grand, on souhaiterait déduire $\gamma_\theta(g)$ de l'équation

$$\gamma_\theta(g)^2 + c = \gamma_{2\theta}(2g)$$

malheureusement cette équation a deux solutions opposées, et on ne sait pas laquelle est la bonne. Une règle empirique consiste à choisir celle des deux solutions qui est la plus proche de $\gamma_\theta(2g)$.

Il s'agit donc de s'assurer que $\gamma_\theta(g)$ et $\gamma_\theta(2g)$ font un angle aigu (par rapport à zéro) ; nous allons voir que cet angle est en fait strictement inférieur à $\log 2$ radians (environ 39.7 degrés).

Théorème. *Soit $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe univalente sur le cercle unité telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors pour tout $z \in D$, on a*

$$\left|\operatorname{Im} \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le e^{\rho\cos\psi} \cos\psi,$$

où ρ et ψ sont définis par

$$\rho = \frac{1}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \qquad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \psi + \rho \sin\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses, soit $r \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Alors*

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} \arg f(re^{i\theta})\right| < \frac{2}{r \log r^{-1}}.$$

Et donc, si $0 < r_1 \le r_2 < 1$, la variation de la fonction $r \mapsto \arg f(re^{i\theta})$ sur l'intervalle $[r_1, r_2]$ sera strictement inférieure à $2\log(r_2/r_1)$.

Corollaire 2. *Si l'on suppose de plus que f commute avec la rotation $z \mapsto ze^{2i\pi/n}$, alors on a même*

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} \arg f(re^{i\theta})\right| < \frac{2/n}{r \log r^{-1}},$$

et la variation de $r \mapsto \arg f(re^{i\theta})$ *sur l'intervalle* $[r_1, r_2]$ *est strictement inférieure à* $(2/n)\log(r_2/r_1)$.

Voyons d'abord comment le corollaire 1 se déduit du théorème.

Preuve du corollaire 1. Soit $z = re^{i\theta}$, ρ et ψ comme dans l'énoncé du théorème. On a

$$\frac{\partial}{\partial r} \arg f(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} \operatorname{Im} \frac{zf'(z)}{f(z)},$$

il s'agit donc de démontrer que $e^{\rho\cos\psi}\cos\psi < 2/\log r^{-1}$. Si on exprime tout en fonction de ρ, il faut prouver que

$$e^{\rho\cos\psi}\cos\psi \, \log\frac{1+e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}} < 2$$

pour tout $\rho > 0$. Nous noterons $A(\rho)$ le premier membre de cette inégalité.

Commençons par majorer $\log r^{-1}$. On utilise les inégalités $\log(1+x) < x$ et $e^x > 1 + x + x^2/2!$ valables pour $x > 0$. Il vient

$$\begin{aligned} \log r^{-1} &= \log(1+e^{-\rho}) + \log\frac{1}{1-e^{-\rho}} \\ &< e^{-\rho} + \left(\frac{1}{1-e^{-\rho}} - 1\right) = e^{-\rho}\left(2 + \frac{1}{e^{\rho}-1}\right) \\ &< e^{-\rho}\left(2 + \frac{1}{\rho + \frac{\rho^2}{2!}}\right) = 2e^{-\rho}\frac{(\rho+1)^2}{\rho(\rho+2)} \end{aligned}$$

Ensuite, on peut minorer ψ en remarquant que la fonction $x \mapsto x + \rho\sin x$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$ et prend une valeur négative en $x = \pi/2(\rho+1)$. Par conséquent,

$$\psi > \frac{\pi}{2(\rho+1)}$$

Enfin, on majore $\cos\psi$ en l'exprimant en fonction de $\sin(\psi/2)$ puis en utilisant la concavité de sin sur l'intervalle $[0, \pi/4]$, comme suit :

$$\begin{aligned} \cos\psi &= 1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2} \\ &\leq 1 - 2\left(\frac{\psi\sqrt{2}}{\pi}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\psi}{\pi/2}\right)^2 \\ &< 1 - \frac{1}{(\rho+1)^2} = \frac{\rho(\rho+2)}{(\rho+1)^2} \end{aligned}$$

Si bien qu'on a finalement

$$A(\rho) = e^{\rho\cos\psi}\cos\psi \, \log r^{-1} < e^{\rho} \times \frac{\rho(\rho+2)}{(\rho+1)^2} \times 2e^{-\rho}\frac{(\rho+1)^2}{\rho(\rho+2)} = 2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Preuve du corollaire 2. L'existence d'une symétrie d'ordre n permet d'améliorer considérablement les inégalités du corollaire 1. Pour le voir, considérons f comme dans l'énoncé, vérifiant de plus $f(ze^{2i\pi/n}) = f(z)e^{2i\pi/n}$. Alors il existe une fonction g vérifiant les hypothèses du corollaire 1 et telle que

$$\forall z \in D \qquad f(z)^n = g(z^n).$$

Le corollaire 1 nous dit que

$$\left|\frac{\partial \arg g(re^{i\theta})}{\partial \log\log r^{-1}}\right| < 2.$$

Vu que la différentielle $d\log\log r^{-1}$ est invariante par les transformations de la forme $r \mapsto r^n$, et que $n \cdot \arg f = \arg g$, on obtient immédiatement l'inégalité annoncée.

Preuve du théorème. Soit z fixé, $r = |z|$, ρ et ψ comme dans l'énoncé. Pour des raisons de densité, il suffit de prouver l'inégalité pour les "slit functions", c'est-à-dire quand l'image de f est le complémentaire d'un arc de Jordan. On peut alors utiliser la méthode de Löwner, et définir une fonction de deux variables $f_t(z)$ pour $t \in [0, \infty[$, telle que $f_0(z) = z$, $e^t f_t(z) \to f(z)$ quand $t \to \infty$, et vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -f_t(z)\frac{1+\kappa(t)f_t(z)}{1-\kappa(t)f_t(z)}$$

où κ est une fonction à valeurs dans $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Réecrivons l'équation sous la forme

$$\frac{\partial \log f_t}{\partial t} = -\frac{1+\kappa f_t}{1-\kappa f_t}$$

En particulier, si $u = |f_t|$, alors la variation de u est donnée par la partie réelle de $d\log f_t/dt$:

$$\frac{du}{u\,dt} = -\operatorname{Re}\frac{1+\kappa f_t}{1-\kappa f_t} = -\frac{1-|f_t|^2}{|1-\kappa f_t|^2}$$

En particulier, u est une fonction strictement décroissante variant de r jusqu'à zéro, et qu'on pourra donc prendre comme nouvelle variable à la place de t.

En dérivant par rapport à z l'équation de départ, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{f_t'}{f_t} = -\frac{f_t'}{f_t}\,\frac{2\kappa f_t}{(1-\kappa f_t)^2}$$

L'intégration de cette équation différentielle donne

$$\frac{f_t'}{f_t} = \frac{1}{z}\exp\int_0^t \frac{-2\kappa f_t\,dt}{(1-\kappa f_t)^2}$$

donc à la limite

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \exp \int_0^\infty \frac{-2\kappa f_t\, dt}{(1-\kappa f_t)^2}$$

Soit I l'intégrale ci-dessus. Son module est majoré par

$$|I| \leq \int_0^\infty \frac{2\,|f_t|\; dt}{|1-\kappa f_t|^2} = \int_0^r \frac{du}{1-u^2} = \log \frac{1+r}{1-r} = \rho.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le maximum de $h = \operatorname{Im} e^z$ sur le disque $D(0,\rho)$ — il est clair que le minimum sera le nombre opposé. Soit $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ un point où le maximum est atteint. On sait déjà que z est sur le bord du disque, d'après le principe du maximum. On peut également dire que $x \geq 0$, sinon $h(-x+iy)$ serait plus grand que $h(z)$. J'affirme enfin que $0 \leq y \leq \pi/2$.

Supposons tout d'abord que $y > \pi$. Alors h prend la même valeur en z et en $z - 2i\pi$; mais $z - 2i\pi = x + i(y - 2\pi)$ est intérieur au disque et cela contredirait le principe du maximum. Pour la même raison, on ne peut avoir $y < -\pi$. Supposons maintenant que $\pi/2 < y \leq \pi$. Alors h prend la même valeur en z et en $x + i(\pi - y)$ qui est intérieur au disque. Contradiction. Enfin la bande $-\pi \leq y < 0$ est exclue car h n'y prend que des valeurs négatives.

Il reste à écrire que $\partial h/\partial\theta = 0$. On a

$$\operatorname{Im} e^z = h(\theta) = e^{\rho\cos\theta} \sin(\rho\sin\theta),$$

et la dérivée vaut

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= \rho e^{\rho\cos\theta}\big[\cos\theta\cos(\rho\sin\theta) - \sin\theta\sin(\rho\sin\theta)\big] \\ &= \rho e^{\rho\cos\theta}\cos(\theta + \rho\sin\theta) \end{aligned}$$

Comme on a vu plus haut que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $0 \leq \rho\sin\theta \leq \pi/2$, l'expression ci-dessus ne peut s'annuler que si

$$\theta + \rho\sin\theta = \frac{\pi}{2}$$

et cette équation a exactement une solution dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, que nous avions notée ψ. On a donc

$$\left|\operatorname{Im} \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \max_{z\in D(0,\rho)} \operatorname{Im} e^z = e^{\rho\cos\psi}\sin(\rho\sin\psi) = e^{\rho\cos\psi}\cos\psi,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie. On trouvera dans [DUR] une bonne présentation de la méthode de Löwner, avec de nombreuses applications.

[DEG] Drasin, Earle, Gehring, *Holomorphic functions and moduli*, Springer

[DUR] Peter L. Duren, *Univalent functions*, Springer 1983

[GOO] Goodman, *Univalent functions*, Tampa

[LEH] Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*

[MIL] Milin, *Univalent functions and Orthonormal systems*

[POM] Pommerenke, *Univalent functions*

[TAM] Tammi, *Extremum problems for bounded univalent functions*