Une représentation des cobords faibles d'un système dynamique

Thierry Bousch*

28 février 2021

Abstract

Let $T : X \to X$ be a continuous transformation of a compact space X. It is proved that every weak coboundary of (X, T) can be written as $\sum_{n\geqslant 1}(f_n \circ T^n - f_n)$, where the f_n are continuous functions on X such that $\sum \|f_n\| < \infty$.

Résumé

Soit $T : X \to X$ une transformation continue d'un espace compact X. On démontre que tout cobord faible de (X, T) peut s'écrire sous la forme $\sum_{n\geqslant 1}(f_n \circ T^n - f_n)$, où les f_n sont des fonctions continues sur X telles que $\sum \|f_n\| < \infty$.

Titre anglais: A representation of the weak coboundaries of a dynamical system

Mots-clés (français/anglais): cobord faible / weak coboundary

Classification AMS (2010): 37B99 (topological dynamics)

1 Cobords et cobords faibles

Soit X un espace métrique compact, non vide, et T une application continue de X dans lui-même. Comme d'habitude, on note $C(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|$.

On appelle *cobord* (topologique) une fonction de la forme $f \circ T - f$, où $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Les cobords constituent évidemment un sous-espace vectoriel de $C(X)$, qui en général n'est pas fermé [Koc]. Une fonction de la forme $f \circ T^n - f$, avec $n \geqslant 0$ et f continue, est aussi un cobord, car on peut l'écrire $(S_n f) \circ T - (S_n f)$, où $S_n f$ désigne la somme ergodique

$$S_n f \;=\; f + f \circ T + \cdots + f \circ T^{n-1}.$$

Plus généralement, toute fonction de la forme $f_0 + f_1 \circ T + \cdots + f_n \circ T^n$, où les f_i sont des fonctions continues dont la somme est nulle, est un cobord.

On appelle *cobord faible* une fonction continue $X \to \mathbb{R}$ qui est limite uniforme de cobords. Il est évident que si f est un cobord faible, alors f est de moyenne nulle pour toute mesure de probabilité T-invariante sur X. Comme il est bien connu [Kri, MOP, IP, BJ], la réciproque est également vraie: si une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est de moyenne nulle pour toute mesure de probabilité invariante, alors f est un cobord faible.

*Laboratoire de Mathématique d'Orsay (UMR 8628 du CNRS), bât. 307, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France. E-mail: Thierry.Bousch@math.u-psud.fr

Cette seconde description des cobords faibles n'est malheureusement pas beaucoup plus explicite que la première.

L'article [BJ] présente une construction de cobords faibles, due à Michel Zinsmeister, et qu'on peut généraliser de la manière suivante. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $C(X)$ vérifiant $\sum \|f_n\| < \infty$. Alors la somme

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n \circ T^n - f_n$$

est bien définie, comme élement de $C(X)$, et c'est un cobord faible, car tous les termes de la somme sont des cobords. Ou, pour présenter les choses un peu différemment: toute fonction de la forme $\sum_{n\geqslant 0} f_n \circ T^n$, où les $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sont des fonctions continues vérifiant $\sum \|f_n\| < \infty$ et dont la somme est nulle, est un cobord faible.

Il est naturel de se demander si tout cobord faible de (X,T) peut être obtenu par ce procédé. L'objet de cette note est de montrer que c'est effectivement le cas.

Théorème 1. *Pour tout cobord faible $f : X \to \mathbb{R}$ du système dynamique (X,T), on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions continues $X \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$\sum \|f_n\| \;\leqslant\; 12\,\|f\|$$

avec $\sum f_n = 0$ et telles que $f = \sum f_n \circ T^n$.

2 Démonstration du théorème

Considérons d'abord le cas où la fonction est un cobord.

Lemme 2. *Pour tout cobord $f : X \to \mathbb{R}$ du système dynamique (X,T), on peut trouver un entier $n \geqslant 1$ et des fonctions continues $f_0, f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \|f_i\| \;\leqslant\; 4\,\|f\|$$

avec $f_0 + \cdots + f_n = 0$ et telles que $f = f_0 + f_1 \circ T + \cdots + f_n \circ T^n$.

Démonstration. On peut évidemment supposer $\|f\| \neq 0$. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f = g \circ T - g$, et n un entier strictement positif. De l'égalité $g \circ T^n - g = f + f \circ T + \cdots + f \circ T^{n-1}$ on déduit

$$nf \;=\; \big((n-1)f - g\big) - f \circ T - \cdots - f \circ T^{n-1} + g \circ T^n$$

ce qu'on peut écrire

$$f \;=\; f_0 + f_1 \circ T + \cdots + f_n \circ T^n$$

avec $f_0 = \big((n-1)f - g\big)/n$, $f_1 = \cdots = f_{n-1} = -f/n$ et $f_n = g/n$. Les fonctions f_i sont bien de somme nulle, et

$$\begin{aligned}\|f_0\| + \|f_1\| + \cdots + \|f_{n-1}\| + \|f_n\| \;&\leqslant\; \frac{(n-1)\,\|f\| + \|g\|}{n} + (n-1)\frac{\|f\|}{n} + \frac{\|g\|}{n} \\ &=\; \frac{2}{n}\Big[(n-1)\,\|f\| + \|g\|\Big]\end{aligned}$$

qui est $\leqslant 4\,\|f\|$, si n est choisi tel que $(n+1)\,\|f\| \geqslant \|g\|$. □

Traitons maintenant le cas général, avec f cobord faible quelconque.

Comme les cobords sont denses parmi les cobords faibles, on peut trouver une suite $(\varphi_m)_{m\geqslant 0}$ d'éléments de $C(X)$ qui sont des cobords, tels que $\varphi_0 = 0$ et $\|f - \varphi_m\| \leqslant 2^{-m}\|f\|$ pour tout $m \geqslant 0$. Définissons alors $f^m = \varphi_{m+1} - \varphi_m$ pour $m \geqslant 0$. Ces fonctions f^m sont des cobords, avec $\|f^m\| \leqslant 3/2^{m+1}\|f\|$, et $f = \sum f^m$. Notons que $\sum \|f^m\| \leqslant 3\|f\|$.

Appliquons maintenant le lemme ci-dessus aux fonctions f^m : il existe une famille $(f_n^m)_{m,n\geqslant 0}$ d'éléments de $C(X)$ tels que pour tout entier naturel m, on a

$$\sum_n \|f_n^m\| \leqslant 4\|f^m\|$$

avec $f^m = \sum_n f_n^m \circ T^n$ et $\sum_n f_n^m = 0$. En particulier

$$\sum_{m,n} \|f_n^m\| \leqslant \sum_m 4\|f^m\| \leqslant 12\|f\| .$$

On peut donc écrire $f = \sum_m f^m = \sum_{m,n} f_n^m \circ T^n = \sum_n f_n \circ T^n$, où les fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sont définies par $f_n = \sum_m f_n^m$. Ces fonctions f_n satisfont

$$\sum_n \|f_n\| \leqslant \sum_{m,n} \|f_n^m\| \leqslant 12\|f\|$$

et enfin $\sum_n f_n = \sum_{m,n} f_n^m = 0$, puisque $\sum_n f_n^m = 0$ pour tout m, ce qui termine la preuve du théorème.

Références

[BJ] T. Bousch & O. Jenkinson, *Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions*, Invent. Math. **148** (2002), 207–217

[IP] R. B. Israel & R. R. Phelps, *Some convexity questions arising in statistical mechanics*, Math. Scand. **54** (1984), 133–156

[Koc] A. Kocsard, *On cohomological C^0-(in)stability*, Bull. Braz. Math. Soc. (new series) **44** (2013), 489–495

[Kri] W. Krieger, *On quasi-invariant measures in uniquely ergodic systems*, Invent. Math. **14** (1971), 184–196

[MOP] J. Moulin-Ollagnier & D. Pinchon, *Systèmes dynamiques topologiques. I. Etude des limites de cobords*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 405–414