Université Paris-Sud 2000/2001

S3 SM C

Partiel de mathématiques

20 décembre 2000, durée 2 heures 30

Les documents autres que le formulaire de MO sont interdits
Il est demandé d'énoncer complètement (au moins une fois) les théorèmes du cours utilisés.

Exercice 1: Calculer l'intégrale curviligne de $ydx + 2xdy$ le long du contour $\mathcal{C}$ (orienté comme sur la fig. 1) du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 - 2x < 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 2y < 0\} .$$

Exercice 2: Calculer la longueur de la courbe $\gamma : t \in [1, a] \mapsto (t, \log t)$ pour a un réel positif (on pourra utiliser le changement de variables : $u = \sqrt{1 + t^2}$ dans l'intégrale obtenue).

Exercice 3: Soit le champ de vecteurs F donné par

$$F(x, y) = (3x^2y^2 + 3y^4, 2x^3y + 12xy^3 + \sin y) .$$

Calculer la circulation de F le long de la courbe paramétrée (fig. 2)

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto ((2^t - 1)^{13}, \sin(\frac{\pi}{2}t^{12})) .$$

Exercice 4: Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée : $(u, v) \in [0, 1] \times [0, \pi] \mapsto (u \cos v, u \sin v, v)$. Calculer l'aire de S en fonction de $\int_0^1 \sqrt{1 + u^2}du$ et la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ la bordant (fig. 3)

Exercice 5: a) Pour quelles valeurs de c le champ de vecteurs $F_c = (P, Q_c)$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $P(x, y) = 2x - 4y + 3$, $Q_c(x, y) = cx + 8y - 4$ est-il un champ de gradients ? Pour la valeur c_0 de c trouvée, calculer une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{grad}(f) = F_{c_0}$.

b) Soit γ une courbe fermée sans point double de longueur 10 bordant un domaine D d'aire π et orientée de la manière usuelle (préciser ce que cela signifie). Calculer la circulation de F_c le long de γ en fonction de $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 6: Soit S le triangle de sommets $A = (0, 0, -2)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 0, -1)$ orienté "vers le haut" (c'est-à-dire de manière à ce que la composante sur Oz du vecteur normal soit positive). Soit F le champ de vecteurs donné par $F(x, y, z) = (xyz, y^2, yz)$. Calculer son rotationnel $\operatorname{rot} F$ et le flux de $\operatorname{rot} F$ à travers S.

Exercice 7: Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ -9 & -8 & -9 \\ -9 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de f, ses espaces propres. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f et donner la matrice D de f dans cette base. Montrer qu'il existe une seule matrice diagonale réelle telle que $\Delta^3 = D$. Trouver une matrice B telle que $B^3 = A$.