Université Paris-Sud 2001/2002
S3 SM C

Corrigé du partiel de mathématiques
9 novembre 2001, durée 1 heure 30

Exercice 1: La matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} Im\ f &= Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}) \\ &= Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Donc l'image de f est de dimension 2. C'est un plan. On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ -3 & -1 & z \end{pmatrix} = z + y$$

Donc $Im\ f$ a comme équation $y + z = 0$.

Exercice 2: Un point M de $\mathcal{V}$ est de la forme $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$ avec α, β, γ compris entre 0 et 1 pour $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son volume est la valeur absolue du déterminant de V_1, V_2, V_3 dans la base canonique, c'est-à-dire de $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 9$.

Exercice 3:

1) On a

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

La matrice A a trois valeurs propres distinctes -1, 2 et 1. Elle est donc diagonalisable et les trois sous-espaces propres sont de dimension 1.

Cherchons l'espace propre relativement à 1 : on résout

$$\begin{cases} -2x-2y+2z=0 \\ -2z=0 \\ -3x-3y+z=0 \end{cases} \qquad \text{ce qui est équivalent à } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $z \in \mathbb{R}$. Un vecteur propre non nul pour 1 est donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On trouve de même que les vecteurs propres pour la valeur propre 2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $z \in \mathbb{R}$. Un vecteur propre non nul pour 2 est donc $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres pour la valeur propre -1 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $y \in \mathbb{R}$. Un vecteur propre non nul pour -1 est donc $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les (V_1, V_2, V_3) forment une base de vecteurs propres de A.

2) Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont

$$C_1e^tV_1 + C_2e^{2t}V_2 + C_3e^{-t}V_3$$

avec C_1, C_2, C_3 des constantes réelles, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1e^t + 2C_2e^{2t} \\ y(t) = -C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{-t} \\ z(t) = C_2e^{2t} + C_3e^{-t}\ . \end{cases}$$

Une solution est bornée lorsque $t \to +\infty$ si et seulement si $C_1 = C_2 = 0$. Elles forment donc un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la solution $S(t) = e^{-t}V_3$.

3) a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Comme (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, $S(t)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de (V_1, V_2, V_3) :

$$S(t) = c_1(t)V_1 + c_2(t)V_2 + c_3(t)V_3$$

On a alors $c_1(t) = \det(S(t), V_2, V_3)/\det(V_1, V_2, V_3)$ et si S est C^1, il en est de même de c_1. De même pour c_2, c_3.

b) On a $S'' = c_1''(t)V_1 + c_2''(t)V_2 + c_3''(t)$ et S est solution de (EE) si et seulement si

$$c_1''(t)V_1 + c_2''(t)V_2 + c_3''(t)V_3 = c_1(t)AV_1 + c_2(t)AV_2 + c_3(t)AV_3$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$c_1''(t)V_1 + c_2''(t)V_2 + c_3''(t)V_3 = c_1(t)V_1 + 2c_2(t)V_2 - c_3(t)V_3$$

Comme (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} c_1''(t) = c_1(t) \\ c_2''(t) = 2c_2(t) \\ c_2''(t) = -c_2(t) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} c_1(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-t} \\ c_2(t) = k_3 e^{\sqrt{2}t} + k_4 e^{\sqrt{2}t} \\ c_3(t) = k_5 \cos t + k_6 \sin t \end{cases}$$

avec $k_1, \dots, k_6$ appartenant à $\mathbb{R}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (EE) est formé des

$$k_1 e^t + k_2 e^{-t} V_1 + (k_3 e^{\sqrt{2}t} + k_4 e^{\sqrt{2}t})V_2 + (k_5 \cos t + k_6 \sin t)V_3$$

C'est un espace vectoriel de dimension 6 dont une base est formée des solutions $e^t V_1$, $e^{-t}V_1$, $e^{\sqrt{2}t}V_2$, $e^{\sqrt{2}t}V_2$, $\cos t\ V_3$, $\sin t\ V_3$.

Les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ sont $(k_5 \cos t + k_6 \sin t)V_3$ et forment un sous-espace de dimension 2.

Exercice 4: La matrice du dessin (a) a visiblement comme vecteurs propres $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Il s'agit de (2). Dans le dessin (b), il n'y a pas de direction propre, les valeurs propres sont complexes, il s'agit de (1) et dans le troisième, elles sont réelles (3).

La matrice du dessin (d) admet visiblement comme droite de vecteurs propres l'axe des y et la matrice du dessin (d) admet visiblement comme droite de vecteurs propres l'axe des y. Donc (d) correspond à (5) et (e) à (4).