Université Paris-Sud 2001/2002
S3 SM C

Partiel de mathématiques
18 janvier 2002, durée 3h

Les théorèmes utilisés doivent être énoncés avec précision. Il en sera tenu compte.

Exercice 1: On considère le système différentiel

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x' = x - 2z \\ y' = (m-1)x + my + 2z \\ z' = (m-1)x + (m-1)y \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A du système différentiel (S). Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?

2) On suppose $m \neq 0$. Résoudre le système différentiel (S).

3) a) Existe-t-il un réel m pour lequel toutes les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$? Si oui, pour quels m ?

b) Existe-t-il un réel m pour lequel l'espace vectoriel des solutions de (S) bornées sur $\mathbb{R}^+$ est de dimension 2 ? Si oui, pour quels m ?

c) Existe-t-il un réel m pour lequel toutes les solutions non nulles de (S) sont non bornées sur $\mathbb{R}^+$? Si oui, pour quels m ?

4) On prend $m = -1$. Déterminer la solution du système

$$\text{(S')} \qquad \begin{cases} x' = x - 2z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -2x - 2y \end{cases}$$

telle que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ soient bornés pour $t \geq 0$ et telle que $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Est-elle unique ?

Exercice 2: Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.

1) Représenter graphiquement $\mathcal{D}$.

2) Donner un paramétrage du bord $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ formé des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$.

3) Le champ de vecteurs donné par $F(x,y) = (-x^4 y, y^4 x)$ est-il un champ de gradients ?

4) En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^4 + y^4)\,dxdy$$

Exercice 3:

1) Pour chacune des fonctions dont quelques courbes de niveau sont tracées sur les figures qui suivent, combien voyez-vous de points critiques ? d'extrema locaux ? Donner leurs coordonnées approximatives.

2) Soit la fonction f de 2 variables donnée par $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

a) Calculer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Le point $(0,0)$ est-il un minimum local, un maximum local ou un point selle ? Même question avec le point $(1,1)$.

c) Parmi les figures précédentes, laquelle correspond à f ?

Exercice 4: Soit $\mathcal{T}$ le triangle dans $\mathbb{R}^3$ dont les sommets sont $A = (0,1,0)$, $B = (3,0,1)$ et $C = (-1,1,0)$ et soit P le plan contenant ce triangle.

1) Calculer une équation de P et un vecteur normal N à P. Tracer $\mathcal{T}$ et choisissez une orientation de $\mathcal{T}$.

2) Donner une équation paramétrique de chacun des segments AB, BC et CA.

3) Si F_a est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donné par $F_a(x,y,z) = (xy, ax^2, ayz)$ avec a un paramètre réel, calculer la circulation du champ de vecteurs F le long du triangle $\mathcal{T}$ pour l'orientation que vous avez choisie.

4) Calculer le produit scalaire $F_a \cdot N$. Pour quelles valeurs de a le flux de F_a à travers la plaque plane s'appuyant sur le triangle $\mathcal{T}$ est-il nul ?

5) Pour quelles valeurs de a le flux de F_a à travers une surface $\mathcal{S}$ dont le bord est le triangle $\mathcal{T}$ est-il indépendant de $\mathcal{S}$? Donner le théorème justifiant votre réponse.