Université Paris-Sud 2001/2002
S3 SM C

Partiel de mathématiques
9 novembre 2001, durée 1 heure 30

Exercice 1: Quelle est la matrice de l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = (x+y+z, 3x-2y+4z, -3x+2y-4z)$ dans la base canonique. Quelle est la dimension de son image ? Trouver une équation de l'image.

Exercice 2: Soit

$$\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = 2\alpha + 5\beta + 3\gamma \\ z = -5\alpha + 4\beta + \gamma \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \beta \leq 1 \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \end{cases} \}$$

Montrer que $\mathcal{V}$ est un parallépipède, le dessiner et calculer son volume.

Exercice 3: Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable et calculer une base de vecteurs propres V_1, V_2, V_3 de A.

2) Résoudre le système différentiel

(E) $$X' = AX$$

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions qui sont bornées lorsque $t \to +\infty$. Calculer $\mathcal{S}_0$ et montrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

3) a) Montrer que toute fonction vectorielle S de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme $S(t) = c_1(t)V_1 + c_2(t)V_2 + c_3(t)V_3$ avec c_1, c_2, c_3 des fonctions C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que si S est C^1, il en est de même de c_1, c_2 et c_3.
b) Quelles sont les équations différentielles vérifiées par c_1, c_2 et c_3 pour que S soit solution du système différentiel

(EE) $$X'' = AX$$

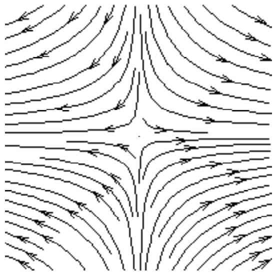
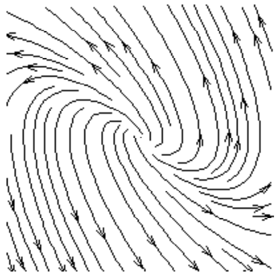
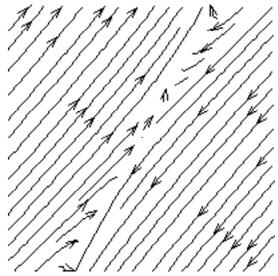
Les résoudre.

c) Calculer la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (EE) et en donner une base.

d) Trouver toutes les solutions bornées de (EE).

Exercice 4: Auquel des systèmes différentiels suivants correspondent les courbes intégrales qui suivent

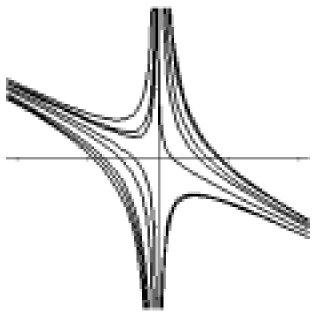
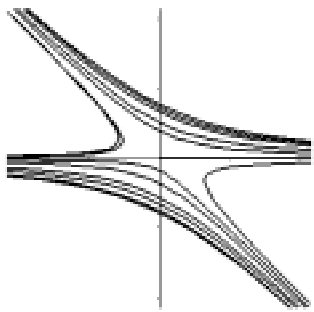
$$(1)\begin{cases} x'(t) = -2y \\ y'(t) = 2x + 3y \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x'(t) = 2x \\ y'(t) = -y \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x'(t) = -7x + 4y \\ y'(t) = -8x + 5y \end{cases}$$


a

b

c

Faire de même pour

$$(4)\begin{cases} x'(t) = -x - 2y \\ y'(t) = y \end{cases} \qquad (5)\begin{cases} x'(t) = x \\ y'(t) = -x - y \end{cases}$$

et


d

e