Université Paris-Sud 2001/2002
S3 SM C

Corrigé du partiel de mathématiques
20 décembre 2001, durée 2 heures

Exercice 1: Si $P(x,y) = 2x\sin y$ et $Q(x,y) = x^2\cos y - 3y^2$, on a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos y$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos y$. Donc $\alpha = 2x\sin y\ dx + (x^2\cos y - 3y^2)dy$ est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc exacte c'est-à-dire qu'il existe une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $df = \alpha$. De plus, $\int_{\mathcal{C}} \alpha$ ne dépend que des extrémités de $\mathcal{C}$ et vaut $f(5,1) - f(1,0)$. Calculons f. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \end{cases}$$

En intégrant la première équation, $f(x,y) = x^2\sin y + h(y)$ où h ne dépend que de y. En reportant dans la deuxième équation, on obtient

$$x^2\cos y + h'(y) = x^2\cos y - 3y^2$$

d'où $h'(y) = -3y^2$. En intégrant, $h(y) = -y^3 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f définie par $f(x,y) = x^2\sin y - y^3$ vérifie $df = \alpha$ et que

$$\int_{\mathcal{C}} \alpha = f(5,1) - f(1,0) = 25\sin(1) - 1 \sim 20.037$$

Exercice 2: Prenons comme paramétrisation de $\mathcal{S}$ $f : (x,z) \mapsto (x, 4x + z^2, z)$. Le vecteur normal associé à cette paramétrisation est

$$\begin{aligned} N &= \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial z}(x,z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La surface a un plan tangent en chaque point $M_0 = (x_0, 4x_0 + z_0^2, z_0)$ d'équation $\overrightarrow{M_0M} \cdot N(M_0) = 0$, c'est-à-dire

$$4(x - x_0) - (y - 4x_0 - z_0^2) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

et en simplifiant

$$4x - y + 2z_0 z = z_0^2$$

Si $\mathcal{D}$ est le rectangle $\{0 \le x \le 2, 0 \le z \le 1\}$, l'aire de la surface est donnée par

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \| N \|\ dxdz &= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{17 + 4z^2}dxdz \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{17 + 4z^2}dz = 2\sqrt{17}\int_0^1 \sqrt{1 + c^2z^2}dz \end{aligned}$$

avec $c = 2/\sqrt{17}$

$$= 17\int_0^c \sqrt{1 + z^2}dz$$

On a en intégrant par partie

$$\begin{aligned}\int_0^c \sqrt{1+z^2}dz &= [z\sqrt{1+z^2}]_0^c - \int_0^c \frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}}\\ &= c\sqrt{1+c^2} - \int_0^c \sqrt{1+z^2} + \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}2\int_0^c \sqrt{1+z^2}dz &= c\sqrt{1+c^2} + \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\\ &= c\sqrt{1+c^2} + \ln(c+\sqrt{1+c^2})\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{17}{2}(c\sqrt{1+c^2} + \ln(c+\sqrt{1+c^2}))\\ &= \sqrt{21} + \frac{17}{2}\ln(2\frac{\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{21}\sqrt{17}}{17}) \sim 8.559\end{aligned}$$

Exercice 3:

1) Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $y^2 - x = 0$.

2) Le vecteur tangent en P à Γ est donné par

$$\begin{aligned}V_1 &= C'(t) + f'(t)C'(t) + f(t)C''(t)\\ &= (6t(1+f'(t)) + 6f(t), 3(1+f'(t))\end{aligned}$$

Il est parallèle à OM si et seulement si $\det(V_1, OM) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $2(t(1+f'(t))+f(t))t-(1+f'(t))t^2 = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $tf'(t)+f(t) = 2$.

3) L'équation $ty' + 2y = 0$ a comme solution $y = k/t^2$ avec $k \in \mathbb{R}$. On remarque que 2 est solution particulière. Donc $f(t) = 2 + k/t^2$.

Exercice 4:

1) Le point $(x, \sqrt[3]{y})$ appartient au cercle unité. Donc, il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $x = \cos t$, $\sqrt[3]{y} = \sin t$. Comme la racine cubique est une bijection, cela est équivalent à dire que $x = \cos t$, $y = \sin^3 t$.

2) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine est donnée par $\int_{\mathcal{C}} xdy$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt\\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3}{8}[t - \frac{\sin 4t}{4}]_0^{2\pi}\\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

3) Le flux de F à travers $\mathcal{C}$ est égal par la formule de Green-Riemann à $\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} F dxdy$. Ici $\operatorname{div} F = 0$ donc le flux est nul.

Exercice 5: Pour la première courbe, ρ s'annule, ce qui n'est pas le cas de la première. Or ρ s'annule si et seulement si l'équation $1 + c\sin\theta = 0$ a une solution ce qui est possible si et seulement si $\mid c \mid < 1$.

Exercice 6: La direction du gradient de f indique la direction dans laquelle f croît le plus.