ALLOCUTION POUR L'ATTRIBUTION DU PRIX DARGELOS 2006
26 NOVEMBRE 2006

CHRISTOPHE BREUIL

En tout premier lieu, je remercie les personnes grâce auxquelles je suis là ce soir : la famille de Madame Dargelos et de son époux, le jury du prix Dargelos, et tous ceux et celles qui m'ont soutenu pour son attribution. Je remercie également ceux qui me font l'honneur de leur présence. C'est pour moi un très grand privilège et un immense bonheur que de recevoir un tel prix et de le partager avec mon collègue au C.N.R.S. M. Samir Zard.

Je voudrais brièvement décrire mes années d'arithméticien depuis ma sortie de l'École Polytechnique , même si un tel exercice est toujours, inévitablement, un peu prétentieux. Mais j'espère, ce faisant, donner une vague idée du cadre mathématique dans lequel se situent mes travaux.

Mon premier contact sérieux avec des professionnels de l'arithmétique remonte au printemps 1992 et au stage d'option de la dernière année de l'X, que j'ai eu la chance d'effectuer sous la direction de Jean-Marc Fontaine, qui allait devenir par la suite mon directeur de thèse. J'ai à ce propos une petite anecdote que je voudrais relater. La première personne que je suis allé rencontrer à Orsay fut Guy Henniart (qui donnait un cours de D.E.A. sur la théorie du corps de classes). Malheureusement, Guy Henniart partait en Allemagne, et ne pouvait me prendre en stage (c'est du moins ce qu'il m'a dit !). Il m'a alors spontanément suggéré : "Pourquoi n'iriez-vous pas voir Jean-Marc Fontaine ? C'est un des plus grands p-adiciens de la planète (ici p est un nombre premier), et en plus, il est polytechnicien !" Avec de tels arguments, il était inévitable que mon deuxième rêve fût appelé à ce réaliser dans l'univers des théories p-adiques et sous l'impulsion de Jean-Marc Fontaine !

J'ai donc effectué ma thèse sous sa direction au Centre de Mathématiques de l'X, dans des conditions de travail extraordinaires (nous étions deux à nous partager un immense bureau), et ce grâce au bon vouloir de Jean-Pierre Bourguignon, puis François Laudenbach, alors directeurs du Centre. J'y ai démontré un théorème de comparaison entre deux groupes de cohomologie de p-torsion associés à une variété algébrique sur le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ qui a des singularités “simples” modulo p. Il s'agissait d'une généralisation de résultats de Fontaine, Messing et Laffaille dans lesquels la variété n'a pas du tout de singularités.

En 1996, j'intégrais le C.N.R.S. et étais affecté au laboratoire de mathématiques de l'université d'Orsay. Mon travail suivant y fut une description d'objets mathématiques appelés schémas en groupes. L'une des deux cohomologies étudiée pendant ma thèse (et après) permettait de définir des groupes, notons les $H^i(X)$, qui sont des modules de type fini sur $\mathbb{Z}_p[u]$ munis de structures additionnelles (filtration, endomorphisme de Frobenius, etc.) et satisfaisant des propriétés bien précises. On peut abstraire ces structures et définir des données d'algèbre linéaires vérifiant toutes les propriétés des modules $H^i(X)$ mais qui ne sont pas forcément des $H^i(X)$ (pour un i ou un X) : on appelle cela des “modules filtrés” (suivant une terminologie introduite par Fontaine). En manipulant certains de ces modules filtrés (des modules de type $H^1(X)$ où X est une variété comme précédemment mais définie sur une extension ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, par exemple $\mathbb{Q}_p(p^{1/n})$), je me suis rendu compte que j'obtenais une catégorie ayant les mêmes propriétés qu'une autre catégorie déjà définie: celle des schémas en groupes commutatifs de p-torsion finis et plats (sur une extension ramifiée de $\mathbb{Z}_p$, par exemple $\mathbb{Z}_p[p^{1/n}]$). Je n'ai pas le temps d'expliquer ici ce que sont ces animaux, mais le point est que l'on n'en avait jusqu'alors aucune description explicite (du moins pas pour une trop grande ramification, e.g. pas si n est trop grand). J'ai pu vérifier que ma catégorie de modules filtrés de type $H^1(X)$ était en fait *équivalente* à cette catégorie de schémas en groupes (pour $p > 2$), et en donnait une description explicite.

C'est là que j'ai bénéficié d'un premier coup du sort favorable. Quelques années avant (en 1994), Andrew Wiles, aidé de Richard Taylor, avait démontré que toutes les courbes elliptique semi-stables sur $\mathbb{Q}$ étaient modulaires (ce qui impliquait Fermat). Plusieurs mathématiciens s'étaient alors mis au travail pour étendre sa preuve à *toutes* les courbes elliptiques (conjecture de Shimura-Taniyama-Weil). Ils avaient résolu essentiellement tous les problèmes techniques pour cela, sauf UN : certains calculs délicats de déformation sur les schémas en groupes étaient nécessaires pour achever la preuve, précisément lorsque la ramification de la base était élevée. En collaboration avec trois autres collègues, et en utilisant à fond la description explicite que je venais juste d'établir, nous avons pu mener ce calcul jusqu'à son terme, et achever ainsi la preuve de la conjecture.

Je vais abandonner maintenant l'histoire de ces modules filtrés, non sans mentionner qu'ils ont eu encore plusieurs rôles à jouer : l'année dernière par exemple, c'est grâce à eux que l'un de mes élèves, Xavier Caruso, a pu compléter la preuve d'une autre conjecture : "la conjecture de l'inertie modérée" de Jean-Pierre Serre.

J'ai alors bénéficié d'un second coup du sort favorable. Au cours du travail sur Taniyama-Weil furent découvertes certaines "coïncidences calculatoires" entre des représentations p-adiques de dimension 2 du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et des représentations p-adiques de dimension finie du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Ici, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est le groupe d'automorphisme de toutes les racines des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ inversibles. Ce fut pour moi le point de départ de presque cinq années de travail intensif et essentiellement solitaire (1999-début 2004), où, avec parfois tout de même l'aide de ma collaboratrice Ariane Mézard (que je remercie chaleureusement ici), je partis à la recherche du phénomène arithmétique p-adique que cachaient ces surprenantes identités calculatoires, et dont j'étais persuadé qu'il était nouveau et profond.

Mon espoir était que l'explication de ces coïncidences résidât dans la présence sous-jacente d'une nouvelle "correspondance de Langlands" entre d'une part certaines représentations p-adiques de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et d'autre part certaines représentations p-adiques de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il est difficile d'expliquer en peu d'espace ce qu'est une correspondance de Langlands. Disons simplement que le mathématicien canadien Robert Langlands a formulé dans les années 60 tout un corpus conjectural permettant de relier des représentations de groupes de Galois (comme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ou $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) à des représentations de groupes linéaires (comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ou des groupes plus compliqués). Mais il ne s'agit pas de représentations p-adiques (i.e. de représentations continues du groupe dans des espaces vectoriels munis d'une topologie p-adique). Ici, le point nouveau et fondamental est précisément l'apparition possible d'une correspondance avec de la topologie p-adique des deux côtés, ce qui change tout ! L'idée d'une telle correspondance n'était pas vraiment nouvelle, d'illustres prédécesseurs l'avaient déjà évoquée : Jean-Pierre Serre, Jean-Marc Fontaine, Robert Langlands lui-même, Barry Mazur, Michael Harris, Peter Schneider, etc., mais jusqu'alors aucun exemple, aucun signe tangible ne permettaient d'y accorder un quelconque crédit.

Je ne vais pas détailler ici les milliers de pages de calculs que j'ai du endurer avant de détenir les premiers cas authentiques de cette nouvelle correspondance de Langlands (qui a pris depuis le nom de "correspondance de Langlands p-adique", avec une variante modulo p). Il fut parfois difficile de garder l'énergie de poursuivre des calculs très longs, techniques et incertains au milieu d'un scepticisme poli. Fort heureusement, j'avais le soutien d'Ariane Mézard, de Michael Harris, de Marie-France Vignéras, et aussi certainement de Jean-Marc Fontaine et de Jean-Pierre Serre. Je leur renouvelle à tous mes remerciements les plus sincères. Par ailleurs, j'avais quand même le confort précieux qu'offre un poste de chercheur au C.N.R.S. (que j'ai toujours) et la chance, grâce à Laurent Lafforgue (un spécialiste des correspondances de Langlands s'il en est !) et Jean-Pierre Bourguignon, de disposer à partir de 2002 du cadre idéal pour une activité de recherche pure que constitue l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures-sur-Yvette.

Lorsqu'il fut clair, début 2004, que cette correspondance existait bel et bien (même si le cadre en était, et est toujours, flou), j'ai eu la chance que plusieurs arithméticiens parmi les plus brillants s'y convertissent rapidement : Pierre Colmez (du C.N.R.S.), Matthew Emerton et Mark Kisin (tous deux professeurs à Chicago), pour n'en citer que trois. Leurs travaux a eu comme conséquence d'une part une incroyable accumulation de résultats nouveaux et importants, d'autre part une grande clarification sur la nature de cette correspondance pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Aujourd'hui, on sait que la correspondance de Langlands p-adique est liée à la correspondance de Langlands classique, à la théorie des représentations localement analytiques de Morita-Schneider-Teitelbaum, à celle des (φ, Γ)-modules de Fontaine, aux familles p-adiques de formes modulaires de Hida-Coleman-Mazur, à la structure de la cohomologie étale p-adique complétée, à la stabilité de la modularité par déformation, à la conjecture de Fontaine-Mazur, aux généralisations de la conjecture de modularité de Serre, etc. Il y a désormais toute une activité autour de cette thématique, même si l'on est encore loin de l'ébauche d'une théorie générale (pour l'instant, seul ce qui a trait au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ semble bien compris). Mais c'est tant mieux : il y a encore, j'espère, j'en suis sûr, de multiples trésors p-adiques ou modulo p à découvrir dans cette direction !

Je ne peux terminer sans un message personnel important. Lors de ma phase calculatoire intensive, il a bien fallu sacrifier un certain nombre de soirées, de sorties, de week-end etc. Cela n'aurait pu se faire sans le soutien matériel et affectif constant de mon épouse (polytechnicienne !). Je suis ému de lui exprimer devant vous ma profonde reconnaissance.

C.N.R.S., Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

E-mail address: breuil@ihes.fr