# UNE REMARQUE SUR LES REPRÉSENTATIONS LOCALES $p$-ADIQUES ET LES CONGRUENCES ENTRE FORMES MODULAIRES DE HILBERT

Christophe Breuil
Mathématiques, Bât. 425
U.R.A. 752 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY cedex
(France)
E-mail: breuil@math.u-psud.fr

## Sommaire



## 1. Introduction

Soit $F$ un corps de nombres totalement réel et $f$ une forme modulaire de Hilbert de poids tous $\geq 2$ qui correspond à une représentation automorphe $\pi$ de $GL_2(\mathbf{A}_F)$. Lorsque $[F:\mathbf{Q}]$ est impair, ou lorsque $[F:\mathbf{Q}]$ est pair mais qu'il existe une place finie $\nu$ de $F$ telle que $\pi_\nu$ est spéciale ou cuspidale, la construction de représentations galoisiennes associées à $f$ à partir de la cohomologie étale $p$-adique des courbes de Shimura sur $F$ est classique et bien connu ([Ca1]). Dans les cas restants, il y a deux façons de s'y prendre pour obtenir les représentations manquantes. Soit on trouve des "congruences" modulo $p^n$ pour tout $n$ avec des formes du type précédent, et on construit les représentations par passage à la limite projective à partir des représentations déjà connues, c'est la méthode suivie par Taylor dans [Ta1]. Soit on arrive à construire un motif associé à la forme $f$, et les représentations se déduisent des réalisations $p$-adiques du motif, c'est la méthode suivie par Blasius-Rogawski dans [BR] lorsque l'un des poids de $f$ est $> 2$. La construction de [BR] montre en outre, par les théorèmes de comparaison en théorie de Hodge $p$-adique, que dans ce cas les représentations locales obtenues (en "$\ell = p$") sont potentiellement semi-stables, donc Hodge-Tate, et même cristallines pour $p >> 0$. Dans [Ta2], Taylor montre que lorsque tous les poids sont 2, ces représentations locales sont encore cristallines pour $p >> 0$.

Le but de cette note est de retrouver ces résultats de cristallinité uniquement à partir des congruences de [Ta1] et de quelques manipulations simples sur les algèbres de Hecke et les pseudo-représentations de degré 2. Plus précisément, nous obtenons:

**Théorème 1.** *Soit $f$ une forme modulaire de Hilbert propre, de niveau $\mathfrak{N}$ (un idéal entier de $F$), de poids tous $\geq 2$ et de même parité et soit $w$ le plus grand des poids. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'un corps de nombres suffisamment grand, $\mathfrak{p}$ une place de $\mathcal{O}$ au dessus d'un nombre premier $p$, $\mathfrak{q}$ une place de $F$ au-dessus de $p$, $G_{\mathfrak{q}}$ un groupe de décomposition de $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ en $\mathfrak{q}$ et $\rho_f : Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F) \to GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ la représentation construite dans [Ta1] à partir de $f$.*
*(1) Si $p > 2$ et $\mathfrak{q}$ ne divise pas $\mathfrak{N}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}}$ modulo $\mathfrak{p}^n$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline (c.f. [Fo1]) à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $w-1$.*
*(2) Si $p > w$, $\mathfrak{q}$ non ramifié dans $F$ et ne divise pas $\mathfrak{N}$, alors $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}} \otimes \mathbf{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $w-1$.*

Bien sûr, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque $\rho_f$ n'est pas accessible par la cohomologie des courbes de Shimura sur $F$ (sinon, tout est connu). La condition "$p > 2$" en (1) provient de la théorie des pseudo-représentations de degré 2 sur un anneau de valuation discrète ([Wi2]). Les conditions "$\mathfrak{q}$ non ramifié" et "$p > w$" en (2) proviennent de restrictions inhérentes aux outils $p$-adiques (standards) utilisés développés dans la section 2. Ces 3 conditions sont bien sûr normalement superflues. La preuve occupe la section 3. Son principe est le suivant: pour démontrer (1), on se débrouille pour construire pour tout $n$, à partir des pseudo-représentations de [Ta1] sur les algèbres de Hecke (qui sont des pseudo-représentations "classiques" à la Wiles), un $\mathbf{Z}_p$-réseau stable par Galois dans une représentation cristalline ainsi qu'une surjection de ce réseau vers $\rho_f|_{G_{\mathfrak{q}}}$ modulo $\mathfrak{p}^n$; pour en déduire (2), on passe à la limite projective sur (1), ce qui oblige, faute de mieux, aux restrictions énoncées. La méthode est explicite et particulière aux pseudo-représentations telles qu'introduites initialement par Wiles, i.e. avec $GL_2$ et un corps totalement réel. Elle ne s'étend probablement pas aux pseudo-représentations de degré supérieur définies par Taylor ([Ta3]).

Cette (modeste) note est concomitante à l'apprentissage modulaire de l'auteur. Dans la version initiale, la référence [Ta2] (qui traite du poids 2) n'était pas connue de l'auteur. Elle lui a été signalée après coup par J. Tilouine. Qu'il en soit remercié, ainsi que L. Clozel, A. Genestier et P. Gille pour d'utiles discussions.

## 2. Deux propositions sur les représentations cristallines et semi-stables

Dans ce paragraphe, $k$ désigne un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $k$ et $K_0$ le corps des fractions de $W$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}_0$ de $K_0$ et on note $G_{K_0} = Gal(\overline{K}_0/K_0)$.

**2.1.** On renvoie à [Fo1] pour les définitions et propriétés des représentations cristallines et semi-stables de $G_{K_0}$. On rappelle que les représentations cristallines sont semi-stables et que les représentations semi-stables sont Hodge-Tate. De plus, à chaque représentation semi-stable $V$ de $G_{K_0}$, à poids de Hodge-Tate entre 0 et $r$ avec $r \in \mathbf{N}$ par exemple, Fontaine associe un $(\phi, N)$-module filtré $D(V) = Hom_{G_{K_0}}(V, B_{st}^+)$ qui est un $K_0$-espace vectoriel de dimension $dim_{\mathbf{Q}_p} V$ muni d'une collection de sous-$K_0$-espaces vectoriels $(Fil^i D(V))_{i \in \mathbf{Z}}$ telle que $Fil^i D(V) = D(V)$ si $i \leq 0$, $Fil^{i+1} D(V) \subset Fil^i D(V)$ et $Fil^i D(V) = 0$ si $i \geq r+1$, d'une application semi-linéaire injective $\phi : D(V) \to D(V)$ et d'une application linéaire $N : D(V) \to D(V)$ telle que $N\phi = p\phi N$. On a $N = 0$ si et seulement si la représentation est cristalline et $D(V)$ s'identifie alors à $Hom_{G_{K_0}}(V, B_{cris}^+)$.

**Définition 2.** *Soit $V$ une représentation cristalline de $G_{K_0}$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$ ($r \in \mathbf{N}$). On appelle réseau fortement divisible de $D(V)$ tout $W$-réseau $M$ de $D(V)$ stable par $\phi$ tel que $\phi(Fil^i D(V) \cap M) \subset p^i M$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et $\sum(\phi/p^i)(Fil^i D(V) \cap M) = M$.*

Lorsque $V$ est cristalline, on peut montrer que $D(V)$ contient toujours un tel réseau ([La],3.2). Ces réseaux sont utiles essentiellement lorsque $r \leq p-2$. La proposition suivante est bien connue des spécialistes.

**Proposition 3.** *Soit $V$ une représentation cristalline de $G_{K_0}$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $p-2$ et $D(V)$ son $\phi$-module filtré. Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les $\mathbf{Z}_p$-réseaux stables par $G_{K_0}$ de $V$ et les $W$-réseaux fortement divisibles de $D(V)$.*

*Preuve.* — Si $M$ est un objet de la catégorie de Fontaine-Laffaille $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ ([FL],3.2), on pose:

$$V^*_{cris}(M) = Hom_{comp}(M, A_{cris} \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$$

où $A_{cris}$ est l'anneau introduit par Fontaine et l'indice "comp" signifie qu'on prend les applications $\mathbf{Z}_p$-linéaires et compatibles aux diverses structures (voir ([FL],3) ou ([Br1],3.2.1)). A chaque $W$-réseau fortement divisible $M$ de $D(V)$, on peut alors associer un $\mathbf{Z}_p$-réseau $V^*_{cris}(M)$ de $V$ stable par $G_{K_0}$ en posant:

$$\begin{aligned} V^*_{cris}(M) = \varprojlim V^*_{cris}(M/p^nM) &= Hom_{comp}(M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, A_{cris} \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \\ &= Hom_{comp}(M, A_{cris}) \end{aligned}$$

et la suite exacte $0 \to M/p^nM \to M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \xrightarrow{p^n} M \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to 0$ permet d'identifier $V^*_{cris}(M)/p^nV^*_{cris}(M)$ à $V^*_{cris}(M/p^nM)$. Par un passage à la limite projective, on déduit donc de ([FL],6.1) la pleine fidélité du foncteur $M \mapsto V^*_{cris}(M)$ pour les $W$-réseaux fortement divisibles. Il faut montrer l'essentielle surjectivité. Soit $T$ un $\mathbf{Z}_p$-réseau de $V$ stable par $G_{K_0}$ et $M$ un $W$-réseau fortement divisible quelconque de $D(V)$ ([La],3.2). Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $p^{n_0}T \subset V^*_{cris}(M) \subset (1/p^{n_0})T$. Pour $n \geq n_0$, on a $p^{n_0}T/p^nT \subset V^*_{cris}(M)/p^nT$ et $V^*_{cris}(M)/p^nT$ est un quotient de $V^*_{cris}(M)/p^{n+n_0}V^*_{cris}(M) \simeq V^*_{cris}(M/p^{n+n_0}M)$ où $M/p^{n+n_0}M$ est dans $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$. Comme $V^*_{cris}(\underline{MF}_{tor}^{f,p-2})$ est une catégorie de représentations de $p$-torsion stable par sous-objet et quotient (on le déduit de ([FL],6.13.(a))), $p^{n_0}T/p^nT$ est de la forme $V^*_{cris}(M_n)$ pour un $M_n$ dans $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$. Par ([FL],3.4), $M_n$ est un $W_n$-module libre de rang $rg_{\mathbf{Z}_p}T$ pour tout $n$ et, par la pleine fidélité de $V^*_{cris}$ ([FL],6.1), $M_n \simeq M_{n+1}/p^nM_{n+1}$. Donc $\varinjlim M_n \simeq M_\infty \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, où les flèches de transition sont la multiplication par $p$ et où $M_\infty$ s'identifie à un $W$-réseau fortement divisible de $D(V)$. A la limite, on a $p^{n_0}T \simeq V^*_{cris}(M_\infty)$. $\square$

**2.2.** Bien que nous n'en ayons pas besoin pour l'application aux formes modulaires, indiquons comment la proposition ci-dessus se généralise lorsque $V$ est semi-stable à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $p-2$. Rappelons qu'alors $N$ est non nul en général sur $D(V)$. La notion de réseau fortement divisible est un peu plus délicate à définir. Soient $S$ le complété $p$-adique de $W[\frac{u^i}{i!}]_{i \in \mathbf{N}}$ (anneau des polynômes à puissances divisées en $u$), $\phi : S \to S$ l'unique application semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur $W$) et continue telle que $\phi(\frac{u^i}{i!}) = \frac{u^{ip}}{i!}$ et $N : S \to S$ l'unique application $W$-linéaire continue telle que $N(\frac{u^i}{i!}) = -\frac{iu^i}{i!}$. Posons $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$ auquel on étend $N$ et $\phi$. A partir du $(\phi, N)$-module filtré $D(V)$ associé à $V$, on définit $\mathcal{D}(V) = S_{K_0} \otimes_{K_0} D(V)$ qu'on munit d'un Frobenius injectif $\phi =$"$\phi \otimes \phi$" et d'une application $K_0$-linéaire $N =$"$N \otimes Id + Id \otimes N$". Soit $f_p : \mathcal{D}(V) \to D(V)$ l'application $K_0$-linéaire qui envoie $s(u) \otimes x$ sur $s(p)x$, on munit enfin $\mathcal{D}(V)$ d'une collection de sous-$S_{K_0}$-modules $Fil^i\mathcal{D}(V)$ définis par récurrence de la façon suivante:

$Fil^0\mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V)$, $Fil^{i+1}\mathcal{D}(V) = \{x \in \mathcal{D}(V)$ tel que $N(x) \in Fil^i\mathcal{D}(V)$ et $f_p(x) \in Fil^{i+1}D(V)\}$.

**Définition 4.** *Soit $V$ une représentation semi-stable de $G_{K_0}$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $p-2$. On appelle module fortement divisible de $\mathcal{D}(V)$ tout sous-$S$-module libre de type fini $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}(V)$ stable par $\phi$ et $N$ tel que $K_0 \otimes_W \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}(V)$, $\phi(Fil^i\mathcal{D}(V) \cap \mathcal{M}) \subset p^i\mathcal{M}$ pour tout $i \in \{0, ..., p-2\}$ et $\sum_{0 \leq i \leq p-2}(\phi/p^i)(Fil^i\mathcal{D}(V) \cap \mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur $S$.*

Là encore, on peut montrer que $\mathcal{D}(V)$ contient toujours un tel sous-module ([Br2],1.3).

**Proposition 5.** *Soit $V$ une représentation semi-stable de $G_{K_0}$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $p-2$, $D(V)$ son $(\phi, N)$-module filtré et $\mathcal{D}(V)$ le $S_{K_0}$-module associé à $D(V)$. Alors il y a une (anti-) équivalence de catégories entre les $\mathbf{Z}_p$-réseaux stables par $G_{K_0}$ de $V$ et les $S$-modules fortement divisibles de $\mathcal{D}(V)$.*

*Preuve.* — A partir de ([Br1],2.4.2.1) et ([Br1],3.1.3.1), la preuve est formellement la même que la précédente en remplaçant $A_{cris}$ par $\widehat{A_{st}}$ ([Br1],3.1.1). $\square$

**2.3.** On a alors la:

**Proposition 6.** *Soient $r \in \{0, ..., p-2\}$, $V$ une représentation $p$-adique de $G_{K_0}$ et $T$ un $\mathbf{Z}_p$-réseau de $V$ stable par $G_{K_0}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T/p^nT$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline (resp. semi-stable) de $G_{K_0}$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$. Alors $V$ est cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$.*

*Preuve.* — On fait la preuve dans le cas cristallin, celle dans le cas semi-stable étant la même. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a donc $T/p^nT \simeq T_1(n)/T_2(n)$ où $T_2(n) \subset T_1(n)$ sont des $\mathbf{Z}_p$-réseaux d'une représentation cristalline $V(n)$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$. Par (3), $T_1(n)/p^nT_1(n) \in V^*_{cris}(\underline{MF}^{f,r}_{tor})$, donc $T/p^nT \simeq T_1(n)/(p^nT_1(n) + T_2(n))$ est aussi de la forme $V^*_{cris}(M_n)$ avec $M_n \in \underline{MF}^{f,r}_{tor}$. Comme dans la preuve de (3), $M_n$ est un $W_n$-module libre de rang $rg_{\mathbf{Z}_p}T$ pour tout $n$ et $M_n \simeq M_{n+1}/p^nM_{n+1}$. On en déduit de même $T \simeq V^*_{cris}(M)$ pour un $W$-module fortement divisible $M$ tel que $Fil^0M = M$ et $Fil^{r+1}M = 0$. Par ([FL],8.4), $V = T \otimes \mathbf{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$. $\square$

Il est raisonnable de proposer la conjecture suivante:

**Conjecture 7.** *(Fontaine [Fo2]) Soient $r \in \mathbf{N}$, $K$ une extension finie totalement ramifiée de $K_0$ dans $\overline{K}_0$ et $V$ une représentation $p$-adique de $G_K = Gal(\overline{K}_0/K)$. Supposons que $V$ contienne un $\mathbf{Z}_p$-réseau $T$ stable par $G_K$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T/p^nT$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline (resp. semi-stable) de $G_K$ à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$. Alors $V$ est cristalline (resp. semi-stable) à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $r$.*

**Remarque 8.** La borne sur les poids de Hodge-Tate est nécessaire. En effet, soient $a \in \mathbf{Z}_p \setminus \mathbf{Z}$ et $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Alors $(\chi^{(p-1)})^a$ est un caractère de $G_K$ qui n'est pas de Hodge-Tate mais qui, modulo $p^n$ et pour tout $n$, est un quotient d'une représentation cristalline.

**Remarque 9.** Les énoncés $l$-adiques analogues à (7) (i.e. cristalline $\leftrightarrow$ non ramifié et semi-stable $\leftrightarrow$ l'inertie agit de façon unipotente) sont triviaux.

**Remarque 10.** On vérifie facilement que si les conditions en (7) sont vraies pour un réseau $T$, elles le sont pour tous.

La suite n'utilise que les cas cristallins.

### 3. Application aux congruences entre formes modulaires de Hilbert

Dans ce paragraphe, on suppose donc que [BR] n'a pas été écrit et on adopte essentiellement les conventions et notations de [Ta1], à quelques allègements près.

**3.1.** Soit $F$ un corps de nombres totalement réel de degré $d$ et d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$, $I$ l'ensemble des plongements $\tau : F \hookrightarrow \mathbf{R}$ et $k = (k_\tau)_{\tau \in I}$ des entiers $\geq 2$ et de même parité. Soit $\mathfrak{N}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$. On fixe $f$ une forme modulaire parabolique de Hilbert de poids $k$, niveau $\mathfrak{N}$ (lorsque $F = \mathbf{Q}$ et $\mathfrak{N} = N\mathbf{Z}$, l'espace de ces formes est isomorphe à l'espace des formes paraboliques classiques sur $\Gamma_1(N)$). On suppose $f$ vecteur propre des opérateur de Hecke $T_\mathfrak{q}$, $S_\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}$ sont des places finies de $F$ et $\mathfrak{a}$ premier à $\mathfrak{N}$ (voir ([Ta1],1) pour des définitions précises). On note $\Theta(T_\mathfrak{q})$, $\Theta(S_\mathfrak{a})$ les valeurs propres correspondantes, par ([Sh],prop.2.8), elles engendrent une extension finie $K_f$ de $\mathbf{Q}$ dont on note $\mathcal{O}_f$ l'anneau d'entiers. Par ([Hi],4), on a $\Theta(T_\mathfrak{q}), \Theta(S_\mathfrak{a}) \in \mathcal{O}_f$. Dans la suite, on peut supposer $f$ nouvelle ([Wi1],1.3).

Le théorème suivant, démontré dans ([Ta1],th.2), fournit les représentations mentionnées dans l'énoncé du th. 1:

**Théorème 11.** *(Shimura, Deligne, Wiles, Taylor,...) Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_f$ au-dessus d'un nombre premier $p$, il existe une représentation continue absolument irréductible:*
$$\rho : Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F) \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$
*non ramifiée en dehors de $\mathfrak{N}p$ et telle que, si $\mathfrak{q}$ est une place de $F$ qui ne divise pas $\mathfrak{N}p$:*
$$(*) \quad \begin{cases} tr\rho(Frob_\mathfrak{q}) = \Theta(T_\mathfrak{q}) \\ det\rho(Frob_\mathfrak{q}) = \Theta(S_\mathfrak{q})\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{q}) \end{cases}$$
*où $Frob_\mathfrak{q}$ est un Frobenius arithmétique de $Gal(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\mathfrak{q})$.*

L'irréductibilité absolue découle de ([Wi1],2.1(a)) (dans loc. cit. tous les $k_\tau$ sont 2 mais le cas général est identique). Pour faire le lien avec le cas $F = \mathbf{Q}$, remarquons que le déterminant peut s'écrire $det(\rho) = \epsilon \cdot \chi^{w-1}$ où $\epsilon$ est un caractère d'ordre fini de $G_F = Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F)$, $\chi$ le caractère cyclotomique $p$-adique usuel et $w = Max\{k_\tau\}_{\tau \in I}$ ($w = \mu + 2$ avec les notations de [Ta1]).

**3.2.** Si $\mathfrak{l}$ est une place finie de $F$ ne divisant pas $\mathfrak{N}$, on note $S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})$ l'espace des formes paraboliques de poids $k$, niveau $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$ et caractère central $\epsilon$ (c.f. ci-dessus) de conducteur premier à $\mathfrak{l}$, et $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})$ la $\mathbf{Z}$-algèbre de $End_\mathbf{C}(S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}))$ engendrée par les $\mathbf{T}_\mathfrak{q}$ pour $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{l}$ et les $S_\mathfrak{a}$ pour $\mathfrak{a}$ premier à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$. On a une décomposition $S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}) = S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new} \oplus S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{old}$ (formes nouvelles et anciennes, c.f. [Mi]) et on note $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new}$ (resp. $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{old}$) l'image de $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})$ dans $End_\mathbf{C}(S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{new})$ (resp. $End_\mathbf{C}(S_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l})^{old})$).

**Théorème 12.** *(Taylor [Ta1]) Supposons $d = [F : \mathbf{Q}]$ pair. Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de $\mathcal{O}_f$ au-dessus d'un nombre premier $p$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une infinité de places finies $\mathfrak{l}_n$ de $F$ (premières à $\mathfrak{N}p$) telles qu'on ait un diagramme commutatif d'algèbres de Hecke:*
$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{new} \arrow[dr] & \\ \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n \\ & \mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{old} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
*où $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N}, \mathfrak{l}_n)^{old} \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n$ est induit par la forme propre $f$ fixée de niveau $\mathfrak{N}$.*

**3.3.** On fixe maintenant un nombre premier $p$ quelconque. Pour toute place finie $\mathfrak{l}$ de $F$ ne divisant pas $\mathfrak{N}$, on note $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new}$ la sous-algèbre de $\mathbf{T}_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new}$ engendrée par les $T_\mathfrak{q}$ et $S_\mathfrak{a}$ pour $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}$ premiers à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$, $\mathbf{T}_\mathfrak{l} = \mathbf{T}_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new} \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{T}'_\mathfrak{l} = \mathbf{T}'_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new} \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Z}_p$. Pour $\mathfrak{q}$ premier à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$, $T_\mathfrak{q}$ est un opérateur normal sur les espaces de formes de niveau $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$ ([Mi],(1.6)), donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new}$ s'injecte dans un produit fini de corps de nombres. Donc $\mathbf{T}'_\mathfrak{l}$ se plonge dans un produit d'extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ dont on note $\widetilde{\mathbf{T}}'_\mathfrak{l}$ le produit des anneaux d'entiers correspondants. On a $\mathbf{T}'_\mathfrak{l} \subset \widetilde{\mathbf{T}}'_\mathfrak{l}$.

**Lemme 13.** *Soit $\mathfrak{l}$ une place finie de $F$ première à $\mathfrak{N}$, alors il existe une représentation continue:*

$$\rho_\mathfrak{l} : Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F) \to GL_2(\widetilde{\mathbf{T}}'_\mathfrak{l})$$

*non ramifiée en dehors de $\mathfrak{N}\mathfrak{l}p$, telle que, si $\mathfrak{q}$ ne divise pas $\mathfrak{N}\mathfrak{l}p$:*

$$\begin{cases} tr\rho_\mathfrak{l}(Frob_\mathfrak{q}) = T_\mathfrak{q} \\ det\rho_\mathfrak{l}(Frob_\mathfrak{q}) = S_\mathfrak{q}\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{q}) \end{cases}$$

*et telle que, si $\mathfrak{q}$ ne divise pas $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$ mais divise $p$, $\rho_\mathfrak{l}|_{G_\mathfrak{q}}$ est un $\mathbf{Z}_p$-réseau dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre $0$ et $w-1$, où $G_\mathfrak{q} \simeq Gal(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\mathfrak{q})$ est un sous-groupe de décomposition en $\mathfrak{q}$.*

*Preuve.* — On a $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new} \subset \Pi_g K'_g$ où le produit est pris sur une base de formes propres $g$ (pour $\mathbf{T}'_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new}$) de $S_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l})^{new}$ dont les valeurs propres engendrent un corps de nombres $K'_g$. Ces formes sont "classiques", i.e. on sait leur associer des représentations galoisiennes continues à valeurs dans $GL_2(K'_{g,\mathfrak{p}})$ (c.f. ([Ti],II.4) et ([Ca1],th.A)) satisfaisant les conditions du type $(*)$ en dehors de $\mathfrak{N}\mathfrak{l}p$ pour tous les complétés $K'_{g,\mathfrak{p}}$ (le fait qu'elles soient réalisables sur $K'_{g,\mathfrak{p}}$ provient de leur irréductibilité, des conditions $(*)$ et du théorème de Čebotarev). En prenant des réseaux stables par $G_F = Gal(\overline{\mathbf{Q}}/F)$, on en déduit une représentation $\rho_\mathfrak{l} : G_F \to GL_2(\widetilde{\mathbf{T}}'_\mathfrak{l})$ non ramifiée en dehors de $\mathfrak{N}\mathfrak{l}p$ avec $tr\rho_\mathfrak{l}(Frob_\mathfrak{q}) = T_\mathfrak{q}$ et $det\rho_\mathfrak{l}(Frob_\mathfrak{q}) = S_\mathfrak{q}\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{q})$ si $\mathfrak{q}$ est premier à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}p$. Les constituants de $\rho_\mathfrak{l}$ se réalisent dans le dual de la cohomologie étale $p$-adique (avec coefficients) de courbes de Shimura sur $\mathcal{O}_F$ lisses en dehors de $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$ ([Ca1],1 et 2.2). Soit en utilisant les théorèmes de comparaison $p$-adiques avec coefficients de Faltings ([Fa],5.6), soit en utilisant les résultats récents de T. Saito sur les représentations de Weil-Deligne associées à $\rho_\mathfrak{l}|_{G_\mathfrak{q}} \otimes \mathbf{Q}_p$, on a alors que pour $\mathfrak{q}/p$ et premier à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}$ $\rho_\mathfrak{l}|_{G_\mathfrak{q}} \otimes \mathbf{Q}_p$ est cristalline à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls, donc entre $0$ et $w-1$ vu le poids du déterminant en (11). $\square$

**3.4.** Pour $d$ pair et $p > 2$, on construit la représentation $\rho$ du théorème (11) comme suit. Notons $\lambda_{f,\mathfrak{l}_n} : \mathbf{T}_k(\mathfrak{N},\mathfrak{l}_n)^{new} \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n$ le morphisme d'anneaux en (12) où $\mathfrak{l}_n$ est une des places de (12) première à $\mathfrak{N}p$. Comme $p > 2$ par hypothèse, on utilise la notion de pseudo-représentation telle que définie par Wiles dans ([Wi2],2.2.3). Quitte à faire un changement de base sur chaque composante de $\widetilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}_n}$, on peut donc supposer $\rho_{\mathfrak{l}_n}(c) = diag(1,-1)$ où $c$ est une conjugaison complexe et $\rho_{\mathfrak{l}_n}$ la représentation construite en (13). Soit $r_{\mathfrak{l}_n} = (a_{\mathfrak{l}_n}, d_{\mathfrak{l}_n}, x_{\mathfrak{l}_n})$ la pseudo-représentation alors associée à $\rho_{\mathfrak{l}_n}$. Comme $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ est fermé dans $\widetilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}_n}$ (pour la topologie $p$-adique des $\mathbf{Z}_p$-modules libres de type fini sous-jascents), le théorème de Čebotarev implique que $r_{\mathfrak{l}_n}$ est à valeurs dans $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$. Soit $r_n = \lambda_{f,\mathfrak{l}_n} \circ r_{\mathfrak{l}_n} = (a_n, d_n, x_n)$: une nouvelle utilisation de Čebotarev montre que $r_n$ est indépendante du choix de $\mathfrak{l}_n$, donc les $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ forment un système compatible de pseudo-représentations à valeurs dans $(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Pour tout $\sigma,\tau \in G_F$, posons $a(\sigma) = (a_n(\sigma))_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$, $d(\sigma) = (d_n(\sigma))_{n\in\mathbf{N}^*}$, $x(\sigma,\tau) = (x_n(\sigma,\tau))_{n\in\mathbf{N}^*}$ et soit $m_0 = Min\{v_\pi(x(\sigma,\tau)), (\sigma,\tau) \in G_F \times G_F\}$ où $\pi$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$ et $v_\pi$ la valuation $\pi$-adique normalisée sur $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$. Si $m_0 = +\infty$, on voit que $\rho(\sigma) = diag(a(\sigma), d(\sigma))$

est une représentation réductible de $G_F$ qui vérifie les conditions $(*)$, ce qui est impossible. Donc $m_0 \neq +\infty$ et on choisit $(\sigma_0, \tau_0)$ tel que $v_\pi(x(\sigma_0, \tau_0)) = m_0$. La représentation $\rho$ (pour $p > 2$ et $d$ pair) est alors donnée par (c.f. [Wi2] p.565):

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & x(\sigma, \tau_0) \\ \dfrac{x(\sigma_0, \sigma)}{x(\sigma_0, \tau_0)} & d(\sigma) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}).$$

**3.5.**

**Théorème 14.** *Avec les notations de (3.1), soit $\rho_n$ la restriction modulo $\mathfrak{p}^n$ de $\rho$ et $\mathfrak{q}$ une place finie de $F$ première à $\mathfrak{N}$ et qui divise $p$. Supposons $p > 2$, alors $\rho_n|_{G_\mathfrak{q}}$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre* 0 *et* $w-1$.

*Preuve.* — Si $d$ est impair, $\rho$ se réalise dans le dual de la cohomologie étale d'une courbe de Shimura sur $\mathcal{O}_F$ lisse en dehors de $\mathfrak{N}$ et le résultat est clair. On suppose donc $d$ pair. Soit $\mathbf{T}^{\#}_{\mathfrak{l}_n} = \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}\big[\dfrac{1}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)}\big]$: il est non nul pour $n > m_0$ et s'injecte encore dans un produit d'extensions finies de $\mathbf{Q}_p$. On a de plus une vraie représentation:

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\#}_{\mathfrak{l}_n} : & G_F & \to & GL_2(\mathbf{T}^{\#}_{\mathfrak{l}_n}) \\ & \sigma & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{\mathfrak{l}_n}(\sigma) & x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma, \tau_0) \\ \dfrac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \sigma)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} & d_{\mathfrak{l}_n}(\sigma) \end{pmatrix} \end{array}$$

dont les projections sur les composantes de $\widetilde{\mathbf{T}}'_{\mathfrak{l}_n}\big[\frac{1}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0,\tau_0)}\big] \otimes \mathbf{Q}_p$ sont des constituants de $\rho_{\mathfrak{l}_n} \otimes \mathbf{Q}_p$ en (13) (utiliser l'irréductibilité). D'après (13), $\rho^{\#}_{\mathfrak{l}_n}|_{G_\mathfrak{q}}$ pour $\mathfrak{q}$ premier à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}_n$ et $\mathfrak{q}/p$ s'injecte dans une représentation cristalline. Soient $x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_1), ..., x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_h)$ des générateurs de l'idéal de $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ engendré par les $(x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau))_{\tau \in G_F}$, $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\rho^{\#}_{\mathfrak{l}_n}$ et $\mathrm{T}_{\mathfrak{l}_n}$ le sous-$\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$-module de $\mathbf{T}^{\#}_{\mathfrak{l}_n} e_1 \oplus \mathbf{T}^{\#}_{\mathfrak{l}_n} e_2$ engendré par $e_1$ et les $\frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0,\tau_i)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0,\tau_0)} e_2$, $i \in \{0, ..., h\}$. La formule:

$$\frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma, \tau_0) = x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma, \tau_i)$$

entraîne que $\mathrm{T}_{\mathfrak{l}_n}$ est un $\mathbf{Z_p}$-module (libre de type fini) stable par $G_F$, donc un réseau dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w-1$ quand on restreint l'action à $G_\mathfrak{q}$. En utilisant $x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)^m t = 0$ dans $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ si et seulement si $x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0) t = 0$ (car $\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$ se plonge dans un produit de corps), on voit que pour $n > 2m_0$, l'application:

$$\mu_{f,\mathfrak{l}_n} : \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} \xrightarrow{\lambda_{f,\mathfrak{l}_n}} \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n \longrightarrow \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0}$$

induit un morphisme compatible à $G_F$ dans l'espace de $\rho_{n-2m_0}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_{\mathfrak{l}_n} & \longrightarrow & \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2 \\ te_1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{h} t_i \frac{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_i)}{x_{\mathfrak{l}_n}(\sigma_0, \tau_0)} e_2 & \mapsto & \mu_{f,\mathfrak{l}_n}(t) e_1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{h} \mu_{f,\mathfrak{l}_n}(t_i) \Big( \frac{x(\sigma_0, \tau_i)}{x(\sigma_0, \tau_0)} \mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{n-2m_0} \Big) e_2 \end{array}$$

où $t, t_i \in \mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n}$. Soit $\mathcal{O}'_f$ le sous-anneau de $\mathcal{O}_f$ engendré par les $\Theta(T_\mathfrak{q})$ et $\Theta(S_\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ premiers à $\mathfrak{N}$, comme $f$ est nouvelle, on a encore $K_f = Frac(\mathcal{O}'_f)$ ([Mi],th.2+[Sh],prop.2.6). Soient $\theta \in \mathcal{O}_f$ tel que $\theta\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}'_f$, $m_1$ la valuation $\mathfrak{p}$-adique de $\theta$, $\mathfrak{l}'_n$ une autre place comme en (12) mais différente de $\mathfrak{l}_n$ et $\mathrm{T}_{\mathfrak{l}'_n}$ un $\mathbf{Z_p}$-réseau d'une représentation cristalline construit comme précédemment avec $\mathfrak{l}'_n$ au lieu de $\mathfrak{l}_n$ muni d'un morphisme compatible à $G_F$ dans l'espace de $\rho_{n-2m_0}$. L'image du morphisme somme $\mathrm{T}_{\mathfrak{l}_n} \oplus \mathrm{T}_{\mathfrak{l}'_n} \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0} e_2$

contient $\mathfrak{p}^{m_1}\big(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0}e_1 \oplus \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^{n-2m_0}e_2\big)$, donc $\rho_{n-2m_0-m_1}|_{G_\mathfrak{q}}$ pour $\mathfrak{q}$ premier à $\mathfrak{N}\mathfrak{l}_n\mathfrak{l}'_n$ et divisant $p$ est un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et $w-1$. En faisant varier $\mathfrak{l}_n$ et $\mathfrak{l}'_n$, on en déduit le même résultat pour tout $\mathfrak{q}$ premier à $\mathfrak{N}$ et divisant $p$ et tout $n >> 0$. $\square$

**Corollaire 15.** *Avec les notations de (3.1), soit* $\mathfrak{q}$ *une place de* $F$ *telle que* $\mathfrak{q}$ *ne divise pas* $\mathfrak{N}$ *mais* $\mathfrak{q}$ *divise* $p$*. Supposons de plus:*

- $p > w$
- $\mathfrak{q}$ *non ramifié dans* $F$

*alors* $\rho|_{G_\mathfrak{q}} \otimes \mathbf{Q}_p$ *est cristalline à poids de Hodge-Tate entre* 0 *et* $w-1$*.*

*Preuve.* — On applique (6) à (14). $\square$

Bien sûr, (7) donnerait le résultat pour $\mathfrak{q}$ premier à $2\mathfrak{N}$ seulement.

**Remarque 16.** Pour les $\mathfrak{p}$ tels que la représentation résiduelle $\rho_1$ est (absolument) irréductible, la démonstration se simplifie puisque, par ([Ca2],th.2), on a une “vraie” représentation $\rho_{\mathfrak{l}_n,\mathfrak{m}} : G_F \to GL_2((\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n})_\mathfrak{m})$ où $\mathfrak{m} = Ker(\mathbf{T}'_{\mathfrak{l}_n} \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p})$, qu'il suffit de pousser dans $GL_2(\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^n)$ par $\lambda_{f,\mathfrak{l}_n}$ pour avoir $\rho_n$ (voir dans ce cas [Ta2] pour le poids 2).

## Bibliographie


[BR] Blasius D., Rogawski J., *Motives for Hilbert modular forms*, Inv. Math. 114, 1993, 55-87.

[Br1] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 31, 1998, 281-327.

[Br2] Breuil C., *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles*, à paraître à Inv. Math.

[Ca1] Carayol H., *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 19, 1986, 409-468.

[Ca2] Carayol H., *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 213-237.

[Fa] Faltings G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins Univ. Press, 1989, 25-79.

[Fo1] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.

[Fo2] Fontaine J.-M., *Deforming semi-stable Galois representations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 94, 1997, 11138-11141.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[Hi] Hida H., *On the critical values of L-functions of* $GL(2)$ *and* $GL(2) \times GL(2)$, Duke Math. J. 74, 1994, 431-529.

[La] Laffaille G., *Groupes p-divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France 108, 1980, 187-206.

[Mi] Miyake T., *On automorphic forms on* $GL_2$ *and Hecke operators*, Ann. of Maths 94, 1971, 174-189.

[Sh] Shimura G., *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. 45, 1978, 637-679.

[Ta1] Taylor R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Inv. Math. 98, 1989, 265-280.

[Ta2] Taylor R., *On Galois representations associated to Hilbert modular forms II*, Conference on Elliptic curves and modular forms (Hong-Kong 1993), 1995, 185-191.

[Ta3] Taylor R., *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. 63, 1991, 281-332.

[Ti] Tilouine J., *Galois representations congruent to those coming from Shimura varieties*, Proc. of Symp. in Pure Math. 55, 1994, 625-638.

[Wi1] Wiles A., *On p-adic representations for totally real fields*, Ann. of Maths 123, 1986, 407-456.

[Wi2] Wiles A., *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Inv. Math. 94, 1988, 529-573.