Programme de Langlands (local) et caractéristique p

Christophe Breuil

150 ans de la S.M.F. à l'I.H.P.
17 mars 2022

Sommaire

Dans tout l'exposé

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i, \ a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i,\ a_i \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques (avec topologie p-adique $\rightsquigarrow$ anneau compact)

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i,\ a_i \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques (avec topologie p-adique $\rightsquigarrow$ anneau compact)
- $\mathbb{Q}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_p[1/p]$ est le corps des nombres p-adiques (localement compact)

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i, \; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques (avec topologie p-adique $\rightsquigarrow$ anneau compact)
- $\mathbb{Q}_p \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_p[1/p]$ est le corps des nombres p-adiques (localement compact)
- K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. un corps contenant $\mathbb{Q}_p$ de dimension finie comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel)

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i,\ a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques (avec topologie p-adique $\rightsquigarrow$ anneau compact)
- $\mathbb{Q}_p \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_p[1/p]$ est le corps des nombres p-adiques (localement compact)
- K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. un corps contenant $\mathbb{Q}_p$ de dimension finie comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel)

  Exemple : $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt[m]{p})$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1}) \simeq \frac{\mathbb{Q}_p[X]}{(X^2+1)}$ si $p \equiv 3 \bmod 4$, ...

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i,\ a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques (avec topologie p-adique $\rightsquigarrow$ anneau compact)
- $\mathbb{Q}_p \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_p[1/p]$ est le corps des nombres p-adiques (localement compact)
- K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. un corps contenant $\mathbb{Q}_p$ de dimension finie comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel)

  Exemple : $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt[m]{p})$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1}) \simeq \frac{\mathbb{Q}_p[X]}{(X^2+1)}$ si $p \equiv 3 \bmod 4$, ...
- $\mathcal{O}_K \overset{\text{déf}}{=}$ anneau des entiers de K

Dans tout l'exposé

- p est un nombre premier
- $\mathbb{Z}_p \overset{\text{déf}}{=} \left\{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i,\ a_i \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'anneau des entiers p-adiques (avec topologie p-adique $\rightsquigarrow$ anneau compact)
- $\mathbb{Q}_p \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_p[1/p]$ est le corps des nombres p-adiques (localement compact)
- K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. un corps contenant $\mathbb{Q}_p$ de dimension finie comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel)

  Exemple : $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt[m]{p})$, $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1}) \simeq \frac{\mathbb{Q}_p[X]}{(X^2+1)}$ si $p \equiv 3 \bmod 4$, ...
- $\mathcal{O}_K \overset{\text{déf}}{=}$ anneau des entiers de $K = \{x \in K$ racines de polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}_p[X]\}$ (anneau compact)

Application de réciprocité

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \overset{\text{déf}}{=} \text{automorphismes de corps de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ fixant } K$$

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) &\overset{\text{déf}}{=} \text{automorphismes de corps de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ fixant } K \\ &= \text{groupe de Galois de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ sur } K \end{aligned}$$

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) &\overset{\text{déf}}{=} \text{automorphismes de corps de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ fixant } K \\
&= \text{groupe de Galois de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ sur } K \\
&= \text{groupe profini, donc compact}
\end{aligned}
$$

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) &\stackrel{\text{déf}}{=} \text{automorphismes de corps de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ fixant } K \\
&= \text{groupe de Galois de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ sur } K \\
&= \text{groupe profini, donc compact}
\end{aligned}$$

$(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Gal}(L/K)$ pour $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ extension finie galoisienne de $K)$

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) &\overset{\text{déf}}{=} \text{automorphismes de corps de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ fixant } K\\ &= \text{groupe de Galois de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ sur } K\\ &= \text{groupe profini, donc compact}\end{aligned}$$

($\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Gal}(L/K)$ pour $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ extension finie galoisienne de K)

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}} \overset{\text{déf}}{=} \text{plus grand quotient abélien de } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$$

Application de réciprocité

$\overline{\mathbb{Q}}_p \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim K$ = clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) &\overset{\text{déf}}{=} \text{automorphismes de corps de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ fixant } K \\ &= \text{groupe de Galois de } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ sur } K \\ &= \text{groupe profini, donc compact} \end{aligned}$$

$(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \overset{\sim}{\to} \varprojlim \mathrm{Gal}(L/K)$ pour $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ extension finie galoisienne de $K)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}} &\overset{\text{déf}}{=} \text{plus grand quotient abélien de } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \\ &= \text{groupe profini avec topologie quotient} \end{aligned}$$

Théorème 1 (Hasse, ...)

Il existe une injection de groupes topologiques d'image dense

$$\mathrm{réc} : \mathrm{GL}_1(K) = K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}}.$$

Théorème 1 (Hasse, ...)

Il existe une injection de groupes topologiques d'image dense

$$\text{réc} : \mathrm{GL}_1(K) = K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}}.$$

Corollaire 1 (correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_1(K)$)

Théorème 1 (Hasse, ...)

Il existe une injection de groupes topologiques d'image dense

$$\text{réc} : \mathrm{GL}_1(K) = K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}}.$$

Corollaire 1 (correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_1(K)$)

Soit E un corps commutatif, à toute représentation de dimension 1 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur E correspond une représentation (de dimension 1) de $\mathrm{GL}_1(K)$ sur E.

Théorème 1 (Hasse, ...)

Il existe une injection de groupes topologiques d'image dense

$$\mathrm{réc} : \mathrm{GL}_1(K) = K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}}.$$

Corollaire 1 (correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_1(K)$)

Soit E un corps commutatif, à toute représentation de dimension 1 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur E correspond une représentation (de dimension 1) de $\mathrm{GL}_1(K)$ sur E.

Preuve : Une représentation de dimension 1 se factorise par le quotient $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}}$ + on compose avec $\mathrm{GL}_1(K) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)^{\mathrm{ab}}$. $\square$

Définition 1

Soit E un corps commutatif et G un groupe topologique quelconques.

Définition 1

Soit E un corps commutatif et G un groupe topologique quelconques. Une représentation de G sur un E-espace vectoriel V quelconque est dite **lisse** si tout vecteur de V est fixé par un sous-groupe **ouvert** de G.

Définition 1

Soit E un corps commutatif et G un groupe topologique quelconques. Une représentation de G sur un E-espace vectoriel V quelconque est dite **lisse** si tout vecteur de V est fixé par un sous-groupe **ouvert** de G.

- $G = \mathrm{GL}_n(K)$: les sous-groupes ouverts sont les sous-groupes contenant gHg^{-1} pour un $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ et un $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ d'indice fini.

Définition 1

Soit E un corps commutatif et G un groupe topologique quelconques. Une représentation de G sur un E-espace vectoriel V quelconque est dite **lisse** si tout vecteur de V est fixé par un sous-groupe **ouvert** de G.

- $G = \mathrm{GL}_n(K)$: les sous-groupes ouverts sont les sous-groupes contenant gHg^{-1} pour un $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ et un $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ d'indice fini.
- $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$: les sous-groupes ouverts (automatiquement compacts) sont les $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ pour $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ une extension finie de K.

Définition 1

Soit E un corps commutatif et G un groupe topologique quelconques. Une représentation de G sur un E-espace vectoriel V quelconque est dite **lisse** si tout vecteur de V est fixé par un sous-groupe **ouvert** de G.

- $G = \mathrm{GL}_n(K)$: les sous-groupes ouverts sont les sous-groupes contenant gHg^{-1} pour un $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ et un $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ d'indice fini.
- $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$: les sous-groupes ouverts (automatiquement compacts) sont les $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ pour $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ une extension finie de K.

Remarque 1

Une représentation lisse de G sur V est une représentation continue où V est muni de la topologie discrète.

Théorème 2 (Harris-Taylor, Henniart, 1998)

À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ (avec topologie transcendante) “correspond” une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Théorème 2 (Harris-Taylor, Henniart, 1998)

À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ (avec topologie transcendante) "correspond" une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque 2

- Une représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ est en fait lisse (utiliser qu'il existe un voisinage ouvert de $\{1\}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucun sous-groupe non trivial),

Théorème 2 (Harris-Taylor, Henniart, 1998)

À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ (avec topologie transcendante) "correspond" une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque 2

- Une représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ est en fait lisse (utiliser qu'il existe un voisinage ouvert de $\{1\}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucun sous-groupe non trivial), donc se factorise par un quotient fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$,

Théorème 2 (Harris-Taylor, Henniart, 1998)

À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ (avec topologie transcendante) "correspond" une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque 2

- Une représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ est en fait lisse (utiliser qu'il existe un voisinage ouvert de $\{1\}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucun sous-groupe non trivial), donc se factorise par un quotient fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, donc est semi-simple.

Théorème 2 (Harris-Taylor, Henniart, 1998)

À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ (avec topologie transcendante) "correspond" une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque 2

- Une représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ est en fait lisse (utiliser qu'il existe un voisinage ouvert de $\{1\}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucun sous-groupe non trivial), donc se factorise par un quotient fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, donc est semi-simple.
- Les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ les plus intéressantes sont celles qui correspondent aux représentations irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$. On les appelle **supercuspidales**.

Théorème 2 (Harris-Taylor, Henniart, 1998)

À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ (avec topologie transcendante) "correspond" une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque 2

- Une représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\mathbb{C}$ est en fait lisse (utiliser qu'il existe un voisinage ouvert de $\{1\}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucun sous-groupe non trivial), donc se factorise par un quotient fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, donc est semi-simple.
- Les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ les plus intéressantes sont celles qui correspondent aux représentations irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$. On les appelle **supercuspidales**. Elles permettent de construire toutes les autres (par induction parabolique).

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse).

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_n(K)}(\chi_1|\cdot|^{n-1} \otimes \chi_2|\cdot|^{n-2} \otimes \cdots \otimes \chi_n) \\
&\overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ loc. cstte telle que } \forall\ (b,g) \in B(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \\
&\qquad\qquad f(bg) = \chi_1(b_1)|b_1|^{n-1}\chi_2(b_2)|b_2|^{n-2}\cdots\chi_n(b_n)f(g)\}
\end{aligned}$$

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_n(K)}(\chi_1|\cdot|^{n-1} \otimes \chi_2|\cdot|^{n-2} \otimes \cdots \otimes \chi_n)\\ &\overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ loc. cstte telle que } \forall\ (b,g) \in B(K) \times \mathrm{GL}_n(K)\\ &\qquad\qquad f(bg) = \chi_1(b_1)|b_1|^{n-1}\chi_2(b_2)|b_2|^{n-2}\cdots\chi_n(b_n)f(g)\}\end{aligned}$$

où $B(K)$ = matrices triangulaires supérieures,

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

$$\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_n(K)}(\chi_1|\cdot|^{n-1} \otimes \chi_2|\cdot|^{n-2} \otimes \cdots \otimes \chi_n)$$

$$\overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ loc. cstte telle que } \forall\ (b,g) \in B(K) \times \mathrm{GL}_n(K)$$
$$f(bg) = \chi_1(b_1)|b_1|^{n-1}\chi_2(b_2)|b_2|^{n-2}\cdots\chi_n(b_n)f(g)\}$$

où $B(K)$ = matrices triangulaires supérieures, $(b_1, \ldots, b_n) \in (K^\times)^n$ = "partie diagonale" de $b \in B(K)$,

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_n(K)}(\chi_1|\cdot|^{n-1} \otimes \chi_2|\cdot|^{n-2} \otimes \cdots \otimes \chi_n)\\ &\overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ loc. cstte telle que } \forall\ (b,g) \in B(K) \times \mathrm{GL}_n(K)\\ &\qquad f(bg) = \chi_1(b_1)|b_1|^{n-1}\chi_2(b_2)|b_2|^{n-2}\cdots\chi_n(b_n)f(g)\}\end{aligned}$$

où $B(K)$ = matrices triangulaires supérieures, $(b_1, \ldots, b_n) \in (K^\times)^n$ = "partie diagonale" de $b \in B(K)$, $|b_i| \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{p^{\mathrm{val}_p(\mathrm{Norme}_{K/\mathbb{Q}_p}(b_i))}} \in \frac{1}{p^{\mathbb{Z}}}$ (avec $\mathrm{val}_p(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \overset{\text{déf}}{=} m$).

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_n(K)}(\chi_1|\cdot|^{n-1} \otimes \chi_2|\cdot|^{n-2} \otimes \cdots \otimes \chi_n) \\
&\quad \overset{\text{déf}}{=} \{f : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ loc. cstte telle que } \forall\ (b,g) \in B(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \\
&\qquad\qquad\qquad f(bg) = \chi_1(b_1)|b_1|^{n-1}\chi_2(b_2)|b_2|^{n-2}\cdots\chi_n(b_n)f(g)\}
\end{aligned}$$

où $B(K)$ = matrices triangulaires supérieures, $(b_1, \ldots, b_n) \in (K^\times)^n$ = “partie diagonale” de $b \in B(K)$, $|b_i| \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{p^{\mathrm{val}_p(\mathrm{Norme}_{K/\mathbb{Q}_p}(b_i))}} \in \frac{1}{p^{\mathbb{Z}}}$ (avec $\mathrm{val}_p(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \overset{\text{déf}}{=} m$). Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ agit par $(g'f)(g) \overset{\text{déf}}{=} f(gg')$.

Exemple 1

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\chi_i : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère continu ($\Rightarrow$ lisse). La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ correspondant à $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ est :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_n(K)}(\chi_1|\cdot|^{n-1} \otimes \chi_2|\cdot|^{n-2} \otimes \cdots \otimes \chi_n)\\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \{f : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ loc. cstte telle que } \forall\ (b,g) \in B(K) \times \mathrm{GL}_n(K)\\ &\qquad f(bg) = \chi_1(b_1)|b_1|^{n-1}\chi_2(b_2)|b_2|^{n-2}\cdots\chi_n(b_n)f(g)\}\end{aligned}$$

où $B(K)$ = matrices triangulaires supérieures, $(b_1, \ldots, b_n) \in (K^\times)^n$ = "partie diagonale" de $b \in B(K)$, $|b_i| \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{p^{\mathrm{val}_p(\mathrm{Norme}_{K/\mathbb{Q}_p}(b_i))}} \in \frac{1}{p^{\mathbb{Z}}}$ (avec $\mathrm{val}_p(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \stackrel{\text{déf}}{=} m$). Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ agit par $(g'f)(g) \stackrel{\text{déf}}{=} f(gg')$. Une telle représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ s'appelle une **série principale**. Elle ne dépend pas à isomorphisme près de l'ordre des χ_i.

$\overline{\mathbb{F}}_\ell \overset{\text{déf}}{=}$ clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour ℓ nombre premier quelconque

$\overline{\mathbb{F}}_\ell \overset{\text{déf}}{=}$ clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour ℓ nombre premier quelconque

Théorème 3 (Vignéras ~ 2000, Emerton-Helm ~ 2011)

Supposons ℓ **distinct de** p.

$\overline{\mathbb{F}}_\ell \overset{\text{déf}}{=}$ clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour ℓ nombre premier quelconque

Théorème 3 (Vignéras ~ 2000, Emerton-Helm ~ 2011)

Supposons ℓ **distinct de** p. À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel de dimension infinie.

$\overline{\mathbb{F}}_\ell \overset{\text{déf}}{=}$ clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour ℓ nombre premier quelconque

Théorème 3 (Vignéras ~ 2000, Emerton-Helm ~ 2011)

Supposons ℓ **distinct de** p. À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ (avec topologie discrète) “correspond” une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 2

$\ell \neq p \Rightarrow$ on peut définir $|\cdot| : K^\times \overset{|\cdot|}{\to} \frac{1}{p^{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\text{réd. mod. } \ell} \mathbb{F}_\ell^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$, qui s'étend par continuité à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ via réc.

$\overline{\mathbb{F}}_\ell \overset{\text{déf}}{=}$ clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour ℓ nombre premier quelconque

Théorème 3 (Vignéras ~ 2000, Emerton-Helm ~ 2011)

Supposons ℓ **distinct de** p. À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 2

$\ell \neq p \Rightarrow$ on peut définir $|\cdot| : K^\times \xrightarrow{|\cdot|} \frac{1}{p^{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\text{réd. mod. } \ell} \mathbb{F}_\ell^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$, qui s'étend par continuité à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ via réc. À la représentation $1 \oplus |\cdot|^{-1}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ correspond une extension non scindée de 1 par la représentation irréductible $\{f : \mathbb{P}^1(K) \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times \text{ loc. cstte}\}/\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

$\overline{\mathbb{F}}_\ell \stackrel{\text{déf}}{=}$ clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour ℓ nombre premier quelconque

Théorème 3 (Vignéras ~ 2000, Emerton-Helm ~ 2011)

Supposons ℓ **distinct de** p. À toute représentation continue de dimension $n \geq 2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 2

$\ell \neq p \Rightarrow$ on peut définir $|\cdot| : K^\times \overset{|\cdot|}{\to} \frac{1}{p^{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\text{réd. mod. } \ell} \mathbb{F}_\ell^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$, qui s'étend par continuité à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ via réc. À la représentation $1 \oplus |\cdot|^{-1}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ correspond une extension non scindée de 1 par la représentation irréductible $\{f : \mathbb{P}^1(K) \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times \text{ loc. cstte}\}/\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

(N. B. : Les repr. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ ne sont plus forcément semi-simples.)

Remarque 3

- La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ associée à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) vérifie de multiples propriétés qui la caractérisent.

Remarque 3

- La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ associée à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) vérifie de multiples propriétés qui la caractérisent. Par exemple l'action du centre $K^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ est la multiplication par le caractère correspondant au déterminant de la représentation galoisienne via l'application réc.

Remarque 3

- La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ associée à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) vérifie de multiples propriétés qui la caractérisent. Par exemple l'action du centre $K^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ est la multiplication par le caractère correspondant au déterminant de la représentation galoisienne via l'application réc.
- La correspondance locale de Langlands peut être réalisée dans la cohomologie étale de variétés algébriques appelées **variétés de Shimura**. Cette réalisation est appelée **compatibilité local-global**.

Remarque 3

- La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ associée à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) vérifie de multiples propriétés qui la caractérisent. Par exemple l'action du centre $K^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ est la multiplication par le caractère correspondant au déterminant de la représentation galoisienne via l'application réc.
- La correspondance locale de Langlands peut être réalisée dans la cohomologie étale de variétés algébriques appelées **variétés de Shimura**. Cette réalisation est appelée **compatibilité local-global**.
- Il existe plusieurs généralisations (encore largement conjecturales) :

Remarque 3

- La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ associée à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) vérifie de multiples propriétés qui la caractérisent. Par exemple l'action du centre $K^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ est la multiplication par le caractère correspondant au déterminant de la représentation galoisienne via l'application réc.
- La correspondance locale de Langlands peut être réalisée dans la cohomologie étale de variétés algébriques appelées **variétés de Shimura**. Cette réalisation est appelée **compatibilité local-global**.
- Il existe plusieurs généralisations (encore largement conjecturales) : remplacement du groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ par les K-points d'un groupe réductif quelconque;

Remarque 3

- La représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ associée à une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ (sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) vérifie de multiples propriétés qui la caractérisent. Par exemple l'action du centre $K^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ est la multiplication par le caractère correspondant au déterminant de la représentation galoisienne via l'application réc.
- La correspondance locale de Langlands peut être réalisée dans la cohomologie étale de variétés algébriques appelées **variétés de Shimura**. Cette réalisation est appelée **compatibilité local-global**.
- Il existe plusieurs généralisations (encore largement conjecturales) : remplacement du groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ par les K-points d'un groupe réductif quelconque; catégorification de la correspondance qui devient une **équivalence de catégories** entre catégories dérivées convenables (passe par une "géométrisation" de la correspondance).

Toutes les représentations sont sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels (i. e. $\ell = p$).

Toutes les représentations sont sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels (i. e. $\ell = p$).

Théorème 3 (Barthel-Livné ~ 1993, B. ~ 2001, Colmez ~ 2005)

À toute représentation continue de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Toutes les représentations sont sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels (i. e. $\ell = p$).

Théorème 3 (Barthel-Livné ~ 1993, B. ~ 2001, Colmez ~ 2005)

À toute représentation continue de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 3

$|\cdot|: K^\times \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ remplacé par $\omega : K^\times \xrightarrow{\text{norme}} \mathbb{Q}_p^\times \overset{p\mapsto 1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_p^\times \overset{\text{réd. mod. } p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{F}_p^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$

Toutes les représentations sont sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels (i. e. $\ell = p$).

Théorème 3 (Barthel-Livné ~ 1993, B. ~ 2001, Colmez ~ 2005)

À toute représentation continue de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 3

$|\cdot| : K^\times \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ remplacé par $\omega : K^\times \xrightarrow{\text{norme}} \mathbb{Q}_p^\times \overset{p\mapsto 1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_p^\times \overset{\text{réd. mod. } p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{F}_p^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ qui s'étend par continuité à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ via réc.

Toutes les représentations sont sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels (i. e. $\ell = p$).

Théorème 3 (Barthel-Livné ~ 1993, B. ~ 2001, Colmez ~ 2005)

À toute représentation continue de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 3

$|\cdot| : K^\times \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ remplacé par $\omega : K^\times \xrightarrow{\text{norme}} \mathbb{Q}_p^\times \overset{p\mapsto 1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_p^\times \overset{\text{réd. mod. } p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{F}_p^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$
qui s'étend par continuité à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ via réc.

À la représentation $\chi_1 \oplus \chi_2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (pour $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \omega^{\pm 1}$) correspond $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1\omega \otimes \chi_2) \oplus \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_2\omega \otimes \chi_1)$ (les deux séries principales dépendent de l'ordre des χ_i cette fois !)

Exemple 4

Les représ. irréductibles de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont paramétrées par les classes d'équiv. de $(r, m, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ où $(r, m, \lambda) \sim (r', m', \lambda')$ ssi $(r', m') \in \{(r, m), (p-1-r, m+r)\}$ et $\lambda^2 = \lambda'^2$.

Exemple 4

Les représ. irréductibles de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont paramétrées par les classes d'équiv. de $(r, m, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ où $(r, m, \lambda) \sim (r', m', \lambda')$ ssi $(r', m') \in \{(r, m), (p-1-r, m+r)\}$ et $\lambda^2 = \lambda'^2$.

À (r, m) on associe la représ. irréductible $\sigma(r, m) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes \mathrm{dét}^m$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ où $p \in \mathbb{Q}_p^\times \mapsto 1$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ agit via $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.

Exemple 4

Les représ. irréductibles de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont paramétrées par les classes d'équiv. de $(r,m,\lambda) \in \{0,\ldots,p-1\} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ où $(r,m,\lambda) \sim (r',m',\lambda')$ ssi $(r',m') \in \{(r,m),(p-1-r,m+r)\}$ et $\lambda^2 = \lambda'^2$.

À (r,m) on associe la représ. irréductible $\sigma(r,m) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes \mathrm{dét}^m$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ où $p \in \mathbb{Q}_p^\times \mapsto 1$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ agit via $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.
On définit la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{aligned}\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m) \overset{\text{déf}}{=} \{&f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \sigma(r,m) \text{ à support compact} \\ &\text{mod } \mathbb{Q}_p^\times \text{ t. q. } \forall\ (k,g) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), f(kg) = k(f(g))\}\end{aligned}$$

où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit par $(g'f)(g) \overset{\text{déf}}{=} f(gg')$.

Exemple 4

Les représ. irréductibles de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont paramétrées par les classes d'équiv. de $(r, m, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ où $(r, m, \lambda) \sim (r', m', \lambda')$ ssi $(r', m') \in \{(r, m), (p-1-r, m+r)\}$ et $\lambda^2 = \lambda'^2$.

À (r, m) on associe la représ. irréductible $\sigma(r, m) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes \mathrm{dét}^m$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ où $p \in \mathbb{Q}_p^\times \mapsto 1$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ agit via $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On définit la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{aligned}\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma(r, m) \overset{\text{déf}}{=} \{ & f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \sigma(r, m) \text{ à support compact} \\ & \text{mod } \mathbb{Q}_p^\times \text{ t. q. } \forall\ (k, g) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), f(kg) = k(f(g))\}\end{aligned}$$

où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit par $(g'f)(g) \overset{\text{déf}}{=} f(gg')$. C'est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ mais de longueur infinie.

Exemple 4 (suite)

On a $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)\big) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$

Exemple 4 (suite)

On a $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)\big) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$ (moralement T = "somme sur les sommets adjacents de l'arbre de Bruhat-Tits").

Exemple 4 (suite)

On a $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)\big) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$ (moralement T = "somme sur les sommets adjacents de l'arbre de Bruhat-Tits").

À la représentation (r,m,λ) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ correspond la représentation $\frac{\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)}{(T)} \otimes (\mathrm{nr}(\lambda)\circ \mathrm{d\acute{e}t})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \overset{\text{déf}}{=} \lambda^m$.

Exemple 4 (suite)

On a $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)\big) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$ (moralement $T =$ “somme sur les sommets adjacents de l'arbre de Bruhat-Tits”).

À la représentation (r, m, λ) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ correspond la représentation $\frac{\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)}{(T)} \otimes (\mathrm{nr}(\lambda) \circ \mathrm{dét})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \overset{\text{déf}}{=} \lambda^m$.
C'est une représ. irréductible supercuspidale, aussi appelée **supersingulière**.

Exemple 4 (suite)

On a $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)\big) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$ (moralement T = "somme sur les sommets adjacents de l'arbre de Bruhat-Tits").

À la représentation (r,m,λ) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ correspond la représentation $\dfrac{\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)}{(T)} \otimes (\mathrm{nr}(\lambda)\circ \mathrm{d\acute{e}t})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \overset{\text{déf}}{=} \lambda^m$.
C'est une représ. irréductible supercuspidale, aussi appelée **supersingulière**.

Remarque 4

- La correspondance du Théorème 3 est réalisée sur le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes modulaires (Emerton ~ 2010).

Exemple 4 (suite)

On a $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)\big) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$ (moralement T = "somme sur les sommets adjacents de l'arbre de Bruhat-Tits").

À la représentation (r, m, λ) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ correspond la représentation $\frac{\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma(r,m)}{(T)} \otimes (\mathrm{nr}(\lambda)\circ \mathrm{dét})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathbb{Z}_p^\times p^m) \overset{\text{déf}}{=} \lambda^m$.
C'est une représ. irréductible supercuspidale, aussi appelée **supersingulière**.

Remarque 4

- La correspondance du Théorème 3 est réalisée sur le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes modulaires (Emerton ~ 2010).
- La représentation $\frac{\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)}1}{(T)}$ existe aussi sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, mais là elle est isomorphe à une série principale !

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Malheureusement, en 2022 on en est toujours à ☹ :

Conjecture 1 (peut-être optimiste)

À toute représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Malheureusement, en 2022 on en est toujours à ☹ :

Conjecture 1 (peut-être optimiste)

À toute représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

De multiples problèmes sont apparus en essayant de sortir de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Malheureusement, en 2022 on en est toujours à ☹ :

Conjecture 1 (peut-être optimiste)

À toute représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

De multiples problèmes sont apparus en essayant de sortir de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

- pour $K \neq \mathbb{Q}_p$ et σ représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la représentation $(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)}\sigma)/(T)$ est de longueur infinie

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Malheureusement, en 2022 on en est toujours à ☹ :

Conjecture 1 (peut-être optimiste)

À toute représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

De multiples problèmes sont apparus en essayant de sortir de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

- pour $K \neq \mathbb{Q}_p$ et σ représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la représentation $(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)}\sigma)/(T)$ est de longueur infinie
- Zorn $\Rightarrow$ il existe des quotients irréductibles (supersinguliers),

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Malheureusement, en 2022 on en est toujours à ☹ :

Conjecture 1 (peut-être optimiste)

À toute représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

De multiples problèmes sont apparus en essayant de sortir de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

- pour $K \neq \mathbb{Q}_p$ et σ représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la représentation $(\mathrm{c\text{-}Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)}\sigma)/(T)$ est de longueur infinie
- Zorn $\Rightarrow$ il existe des quotients irréductibles (supersinguliers), mais ils sont définis par une infinité d'équations (Schraen ~ 2012, Wu ~ 2019)

Dans la première moitié des années 2000, on avait l'espoir que ces résultats s'étendraient sans trop de problèmes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_n(K)$ ☺.

Malheureusement, en 2022 on en est toujours à ☹ :

Conjecture 1 (peut-être optimiste)

À toute représentation continue de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

De multiples problèmes sont apparus en essayant de sortir de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

- pour $K \neq \mathbb{Q}_p$ et σ représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la représentation $(\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)}\sigma)/(T)$ est de longueur infinie
- Zorn $\Rightarrow$ il existe des quotients irréductibles (supersinguliers), mais ils sont définis par une infinité d'équations (Schraen ~ 2012, Wu ~ 2019) $\Rightarrow$ on ne sait en construire explicitement aucun !

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \overset{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \overset{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ont-ils tous une interprétation galoisienne ?

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \stackrel{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ont-ils tous une interprétation galoisienne ? (Si $K = \mathbb{Q}_p$, toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent dans la correspondance.)

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \overset{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ont-ils tous une interprétation galoisienne ? (Si $K = \mathbb{Q}_p$, toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent dans la correspondance.)
- Cas réductible $\chi_1 \oplus \chi_2$: les deux séries principales de l'Exemple 3 se trouvent encore dans le H^1 étale des courbes de Shimura,

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \overset{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ont-ils tous une interprétation galoisienne ? (Si $K = \mathbb{Q}_p$, toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent dans la correspondance.)

- Cas réductible $\chi_1 \oplus \chi_2$: les deux séries principales de l'Exemple 3 se trouvent encore dans le H^1 étale des courbes de Shimura, mais il y a là d'**autres** représentations si $K \neq \mathbb{Q}_p$, nécessairement supersingulières.

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \overset{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ont-ils tous une interprétation galoisienne ? (Si $K = \mathbb{Q}_p$, toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent dans la correspondance.)

- Cas réductible $\chi_1 \oplus \chi_2$: les deux séries principales de l'Exemple 3 se trouvent encore dans le H^1 étale des courbes de Shimura, mais il y a là d'**autres** représentations si $K \neq \mathbb{Q}_p$, nécessairement supersingulières.

- Cas de $\mathrm{GL}_n(K)$, $n \geq 3$, pire : on soupçonne la présence d'encore plus de représ. supersingulières (même si $K = \mathbb{Q}_p$), on ne sait rien sur elles.

- Si $\mathcal{O}_K/\sqrt{(p)} \neq \mathbb{F}_p$ ($\sqrt{(p)} \overset{\text{déf}}{=}$ radical de l'idéal (p)), il existe parado--xalement beaucoup de tels quotients irréductibles non isomorphes (B.-Paškūnas ~ 2007), bien plus que de représentations de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ont-ils tous une interprétation galoisienne ? (Si $K = \mathbb{Q}_p$, toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent dans la correspondance.)

- Cas réductible $\chi_1 \oplus \chi_2$: les deux séries principales de l'Exemple 3 se trouvent encore dans le H^1 étale des courbes de Shimura, mais il y a là d'**autres** représentations si $K \neq \mathbb{Q}_p$, nécessairement supersingulières.

- Cas de $\mathrm{GL}_n(K)$, $n \geq 3$, pire : on soupçonne la présence d'encore plus de représ. supersingulières (même si $K = \mathbb{Q}_p$), on ne sait rien sur elles.

Les représentations supersingulières sont une sorte d' "énergie noire" : elles devraient être presque partout, on ne sait pas les voir.

Résultats pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Résultats pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Théorème 4

- Toutes les représ. lisses irréd. admissibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont des sous-quotients d'induites paraboliques de supersingulières(Herzig~2010).

Résultats pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Théorème 4

- Toutes les représ. lisses irréd. admissibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont des sous-quotients d'induites paraboliques de supersingulières(Herzig~2010).
- Il existe des représentations irréductibles admissibles supersingulières de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout (n, K) (Herzig-Kozioł-Vignéras ~ 2020).

Résultats pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Théorème 4

- Toutes les représ. lisses irréd. admissibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont des sous-quotients d'induites paraboliques de supersingulières(Herzig ~ 2010).
- Il existe des représentations irréductibles admissibles supersingulières de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout (n, K) (Herzig-Kozioł-Vignéras ~ 2020).

Admissible : les invariants sous tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ sont de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Résultats pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Théorème 4

- Toutes les représ. lisses irréd. admissibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont des sous-quotients d'induites paraboliques de supersingulières(Herzig ~2010).
- Il existe des représentations irréductibles admissibles supersingulières de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout (n, K) (Herzig-Kozioł-Vignéras ~ 2020).

Admissible : les invariants sous tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ sont de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Toutes les représentations de longueur finie de cet exposé sont en fait admissibles (automatique sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, pas sur $\overline{\mathbb{F}}_p$).

Résultats pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Théorème 4

- Toutes les représ. lisses irréd. admissibles de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont des sous-quotients d'induites paraboliques de supersingulières(Herzig~2010).
- Il existe des représentations irréductibles admissibles supersingulières de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout (n, K) (Herzig-Kozioł-Vignéras ~ 2020).

Admissible : les invariants sous tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ sont de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Toutes les représentations de longueur finie de cet exposé sont en fait admissibles (automatique sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, pas sur $\overline{\mathbb{F}}_p$).

La preuve de Herzig-Kozioł-Vignéras est globale (via la théorie des formes automorphes), elle ne dit rien de plus sur les supersingulières.

Résultats pour $\mathrm{GL}_2(K)$

Résultats pour $\mathrm{GL}_2(K)$

Espoir : les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ de longueur finie se trouvent dans le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes de Shimura.

Résultats pour $\mathrm{GL}_2(K)$

Espoir : les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ de longueur finie se trouvent dans le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes de Shimura.

Inconvénient : les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ y dépendent *a priori* de données **globales** en plus de la représ. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ fixée : extension finie F de $\mathbb{Q}$ dont un complété est K, courbe de Shimura sur F, ...

Résultats pour $\mathrm{GL}_2(K)$

Espoir : les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ de longueur finie se trouvent dans le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes de Shimura.

Inconvénient : les reprexcl. de $\mathrm{GL}_2(K)$ y dépendent *a priori* de données **globales** en plus de la représ. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ fixée : extension finie F de $\mathbb{Q}$ dont un complété est K, courbe de Shimura sur F, ... (Sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, ou si $K = \mathbb{Q}_p$, les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ ne dépendent *a posteriori* que de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, pas du cadre global : c'est la compatibilité local-global).

Résultats pour $\mathrm{GL}_2(K)$

Espoir : les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ de longueur finie se trouvent dans le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes de Shimura.

Inconvénient : les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ y dépendent *a priori* de données **globales** en plus de la représ. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ fixée : extension finie F de $\mathbb{Q}$ dont un complété est K, courbe de Shimura sur F, ... (Sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, ou si $K = \mathbb{Q}_p$, les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ ne dépendent *a posteriori* que de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, pas du cadre global : c'est la compatibilité local-global).

Théorème 5 (B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen + Hu-Wang ~ 2021)

Hypothèses : K non ramifié (i. e. $\mathcal{O}_K/(p)$ est un corps) et $p \gg \dim_{\mathbb{Q}_p} K$.

Résultats pour $\mathrm{GL}_2(K)$

Espoir : les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ de longueur finie se trouvent dans le H^1 étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ des courbes de Shimura.

Inconvénient : les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ y dépendent *a priori* de données **globales** en plus de la représ. de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ fixée : extension finie F de $\mathbb{Q}$ dont un complété est K, courbe de Shimura sur F, ... (Sur $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, ou si $K = \mathbb{Q}_p$, les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ ne dépendent *a posteriori* que de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$, pas du cadre global : c'est la compatibilité local-global).

Théorème 5 (B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen + Hu-Wang ~ 2021)

Hypothèses : K non ramifié (i. e. $\mathcal{O}_K/(p)$ est un corps) et $p \gg \dim_{\mathbb{Q}_p} K$.

- Les représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale associées à une représentation de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ suffisamment générique sont des $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(K)]$-modules de type fini.

Théorème 5 (suite)

- Les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont irréductibles (et supersingulières) ssi la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ est irréductible.

Théorème 5 (suite)

- Les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont irréductibles (et supersingulières) ssi la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ est irréductible.
- Si de plus $\dim_{\mathbb{Q}_p} K \leq 2$, les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont de longueur finie.

Théorème 5 (suite)

- Les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont irréductibles (et supersingulières) ssi la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ est irréductible.
- Si de plus $\dim_{\mathbb{Q}_p} K \leq 2$, les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont de longueur finie.

Exemple 5 (B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen ~ 2021)

(Hypothèses du Théorème 5 et $\dim_{\mathbb{Q}_p} K = 2$) À la représentation $\chi_1 \oplus \chi_2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ correspond $\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\chi_1\omega \otimes \chi_2) \oplus \mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\chi_2\omega \otimes \chi_1) \oplus \pi$ où π est une représentation irréductible supersingulière de $\mathrm{GL}_2(K)$.

Théorème 5 (suite)

- Les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont irréductibles (et supersingulières) ssi la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ est irréductible.
- Si de plus $\dim_{\mathbb{Q}_p} K \leq 2$, les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont de longueur finie.

Exemple 5 (B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen ~ 2021)

(Hypothèses du Théorème 5 et $\dim_{\mathbb{Q}_p} K = 2$) À la représentation $\chi_1 \oplus \chi_2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ correspond $\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\chi_1\omega \otimes \chi_2) \oplus \mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\chi_2\omega \otimes \chi_1) \oplus \pi$ où π est une représentation irréductible supersingulière de $\mathrm{GL}_2(K)$. On **ignore** si π ne dépend que de χ_1 et χ_2 (et pas des données globales ambiantes).

Théorème 5 (suite)

- Les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont irréductibles (et supersingulières) ssi la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ est irréductible.
- Si de plus $\dim_{\mathbb{Q}_p} K \leq 2$, les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur le H^1 étale sont de longueur finie.

Exemple 5 (B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen ~ 2021)

(Hypothèses du Théorème 5 et $\dim_{\mathbb{Q}_p} K = 2$) À la représentation $\chi_1 \oplus \chi_2$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ correspond $\mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\chi_1\omega \otimes \chi_2) \oplus \mathrm{Ind}_{B(K)}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\chi_2\omega \otimes \chi_1) \oplus \pi$ où π est une représentation irréductible supersingulière de $\mathrm{GL}_2(K)$. On **ignore** si π ne dépend que de χ_1 et χ_2 (et pas des données globales ambiantes).

Tout ce que l'on peut calculer à ce jour sur ces représ. de $\mathrm{GL}_2(K)$ dans le H^1 étale ne dépend que de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$.

La preuve du Théorème 5 est de nature globale.

La preuve du Théorème 5 est de nature globale. Les deux ingrédients principaux sont : la méthode de Taylor-Wiles (rendue fonctorielle), l'autodualité du H^1 étale des courbes de Shimura.

La preuve du Théorème 5 est de nature globale. Les deux ingrédients principaux sont : la méthode de Taylor-Wiles (rendue fonctorielle), l'autodualité du H^1 étale des courbes de Shimura.

Je termine avec une conjecture pour $\mathrm{GL}_2(K)$ dans le cas réductible qui précise (dans ce cas) la Conjecture 1 :

La preuve du Théorème 5 est de nature globale. Les deux ingrédients principaux sont : la méthode de Taylor-Wiles (rendue fonctorielle), l'autodualité du H^1 étale des courbes de Shimura.

Je termine avec une conjecture pour $\mathrm{GL}_2(K)$ dans le cas réductible qui précise (dans ce cas) la Conjecture 1 :

Conjecture 2 (B.-Paškūnas ~ 2007, B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen ~ 2021)

À toute représentation continue réductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur $1 + \dim_{\mathbb{Q}_p} K$ de $\mathrm{GL}_2(K)$, où deux constituants irréductibles sont les deux séries principales de l'Exemple 5, et les $\dim_{\mathbb{Q}_p} K - 1$ autres sont des représentations supersingulières distinctes.

La preuve du Théorème 5 est de nature globale. Les deux ingrédients principaux sont : la méthode de Taylor-Wiles (rendue fonctorielle), l'autodualité du H^1 étale des courbes de Shimura.

Je termine avec une conjecture pour $\mathrm{GL}_2(K)$ dans le cas réductible qui précise (dans ce cas) la Conjecture 1 :

Conjecture 2 (B.-Paškūnas ~ 2007, B.-Herzig-Hu-Morra-Schraen ~ 2021)

À toute représentation continue réductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ (avec topologie discrète) "correspond" une représentation lisse de longueur $1 + \dim_{\mathbb{Q}_p} K$ de $\mathrm{GL}_2(K)$, où deux constituants irréductibles sont les deux séries principales de l'Exemple 5, et les $\dim_{\mathbb{Q}_p} K - 1$ autres sont des représentations supersingulières distinctes.

Rendez-vous peut-être aux 200 ans de la S.M.F. pour la solution (par d'autres...) aux conjectures de cet exposé. ☺