# MULTIPLICITÉS MODULAIRES ET REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ ET DE $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $\ell = p$

Christophe Breuil et Ariane Mézard

(avec un appendice par Guy Henniart)

Table des matières

## 1. Introduction et résultats principaux

Soient $p$ un nombre premier impair et $\mathfrak{O} \subset \overline{\mathbf{Z}}_p$ (= les entiers algébriques sur $\mathbf{Q}_p$) un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel fini $\mathbf{F}$ et de corps des fractions $E$. On fixe $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation continue telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[\mathrm{Gal}]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$. Grâce à Mazur et Ramakrishna, on sait que les déformations de $\overline{\rho}$ aux $\mathfrak{O}$-algèbres locales noethériennes complètes $R$ de corps résiduel $\mathbf{F}$, c'est-à-dire les représentations continues :

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(R)$$

qui se réduisent sur $\overline{\rho}$ modulo l'ideal maximal de $R$, sont paramétrées par une $\mathfrak{O}$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel $\mathbf{F}$ qu'on note $R(\overline{\rho})$. Le point de départ de cet article est la question (vague) suivante : étant donnés un entier $k$ strictement supérieur à 1, une représentation $\overline{\rho}$ comme ci-dessus et une représentation $\tau : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{nr}) \to \mathrm{GL}_2(E)$ de noyau ouvert, de déterminant modéré (pour simplifier) et supposée s'étendre à tout le groupe de Galois, quelle est la "taille" ou la "complexité" du quotient $R(k, \tau, \overline{\rho})$ de $R(\overline{\rho})$ qui "paramètre" toutes les déformations $\rho$ de $\overline{\rho}$ à une extension finie de $\mathfrak{O}$ (dans $\overline{\mathbf{Z}}_p$) vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\rho \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p$ est potentiellement semi-stable (au sens de Fontaine) à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$,
(ii) la restriction à l'inertie de la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p$ est isomorphe à $\tau$,
(iii) $\det(\rho)$ est la puissance $(k-1)^{\text{ième}}$ du caractère cyclotomique $p$-adique fois un caractère fini d'ordre premier à $p$.

On renvoie au §2.2.2 pour la définition précise de $R(k, \tau, \overline{\rho})$ dont le calcul direct est en général très délicat. Cette question se présente naturellement lorsque l'on étudie les déformations de représentations résiduelles globales car alors connaître la "taille" de $R(k, \tau, \overline{\rho})$ se révèle un ingrédient important (par exemple, la méthode de Wiles et Taylor-Wiles ([Wi], [TW]) ne s'applique à ce jour que si $R(k, \tau, \overline{\rho})$ est un quotient non nul de $\mathfrak{O}[[X]]$, cf. e.g. [CDT] et [BCDT]). Dans [BCDT] conjecture 1.3.1, une réponse conjecturale partielle à la question ci-dessus est proposée pour les déformations potentiellement cristallines à poids de Hodge-Tate $(0,1)$ (c'est-à-dire $k = 2$ et $\tau$ non scalaire) permettant de prédire les cas particuliers où $R(k, \tau, \overline{\rho})$ est un quotient non nul de $\mathfrak{O}[[X]]$ à partir de calculs plus simples en théorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (cette conjecture était suggérée par des dévissages sur les espaces de formes modulaires localisés en un idéal maximal de l'algèbre de Hecke et par tous les exemples où on savait que $R(2, \tau, \overline{\rho})$ était un quotient non nul de $\mathfrak{O}[[X]]$). Le but du présent article est :

1) de proposer une conjecture pour les poids $k \in \{2, ..., p-1\}$ et pour tout $\tau$ permettant de prédire dans tous les cas la “complexité” de $R(k, \tau, \overline{\rho})$ à partir de la théorie des représentations $p$-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$,
2) de démontrer cette conjecture lorsque $k$ est pair et $\tau$ scalaire, ce qui revient (à torsion près) à étudier les anneaux paramétrant les déformations semi-stables à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$.
Les méthodes de cet article s'appliquent aussi aux valeurs impaires de $k$ restantes. Mais les calculs différant sensiblement du cas pair, nous avons préféré nous limiter aux valeurs paires et préserver à cet article une longueur raisonnable. Comme conséquence, nous obtenons des renseignements assez précis sur la réduction modulo $p$ des représentations $p$-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ associées à certaines formes modulaires sur $\Gamma_1(pN)$ ($p \nmid N$) de poids pair $< p$. Nous proposons aussi une conjecture sur la structure générale des anneaux $R(k, \tau, \overline{\rho})$, que nous démontrons pour $k$ pair et $\tau$ scalaire.

Pour énoncer la conjecture mentionnée au 1), il faut d'abord préciser ce que l'on entend par “taille” ou “complexité” de $R(k, \tau, \overline{\rho})$. Le bon invariant à considérer semble être l'entier $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ suivant : si $R(k, \tau, \overline{\rho}) = 0$, $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) = 0$, si $R(k, \tau, \overline{\rho}) \neq 0$, $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ est la multiplicité de Samuel de $R(k, \tau, \overline{\rho}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$, c'est-à-dire $d!$ fois le coefficient dominant du polynôme en $n$ donnant $\dim_{\mathbf{F}} \frac{R(k,\tau,\overline{\rho})\otimes \mathbf{F}}{\mathfrak{m}^{n+1}}$ pour $n \gg 0$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de cette $\mathbf{F}$-algèbre locale et $d$ sa dimension de Krull (on a par exemple $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) = 1$ si $R(k, \tau, \overline{\rho}) \simeq \mathfrak{O}[[X]]$). En fait, on peut s'attendre à avoir toujours $d = 1$ (cf. conjecture 2.2.2.4) de sorte que $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) = \dim_{\mathbf{F}} \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$ pour $n \gg 0$. Cela rapproche $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ de l'entier $\dim_{\mathbf{F}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ (= le nombre minimal de générateurs de la $\mathfrak{O}$-algèbre $R(k, \tau, \overline{\rho})$) souvent considéré, mais notons que la multiplicité $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ se comporte beaucoup mieux que $\dim_{\mathbf{F}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$, cf. §5.1. On veut prédire $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ côté représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. A $\tau$ est associée une unique représentation d'image finie $\sigma(\tau)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$) caractérisée par le fait que toute représentation lisse irréductible $\pi$ de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ telle que la restriction à l'inertie de la représentation de Weil-Deligne associée à $\pi$ par la correspondance locale de Langlands est isomorphe à $\tau$ contient $\sigma(\tau)$ (lorsqu'on restreint $\pi$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$). L'existence de $\sigma(\tau)$ n'est pas nouvelle mais l'unicité est un résultat nouveau que démontre G. Henniart en appendice (dans un cadre plus général). On définit alors la représentation $p$-adique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ suivante :

$$\sigma(k, \tau) = \sigma(\tau) \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_p} \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2$$

qui apparaît naturellement dans l'étude des espaces de formes modulaires de poids $k$ et on note $\overline{\sigma(k, \tau)}^{ss}$ la semi-simplifiée modulo $p$ de $\sigma(k, \tau)$. D'après la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ en caractéristique $p$ :

$$\overline{\sigma(k, \tau)}^{ss} = \bigoplus_{(n,m)} \left( \mathrm{Sym}^n \overline{\mathbf{F}}_p^2 \otimes \det{}^m \right)^{a(n,m)}$$

où $(n, m) \in \{0, ..., p-1\} \times \{0, ..., p-2\}$ et $a(n, m)$ est un entier positif ou nul (la multiplicité de $\mathrm{Sym}^n \overline{\mathbf{F}}_p^2 \otimes \det^m$). On fait maintenant intervenir $\overline{\rho}$. D'après [Se1],§2 et la condition $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[\mathrm{Gal}]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$, on a (en notant $\omega$ le caractère donnant l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ sur les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $\omega_2$ le caractère fondamental d'ordre 2 de Serre) :

$$\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{n+1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \omega^m \text{ avec } * \neq 0,\ \begin{pmatrix} \omega_2^{n+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(n+1)} \end{pmatrix} \otimes \omega^m,\ (n,m) \in \{0,...,p-2\} \right\}.$$

Si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{n+1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \omega^m$ avec $1 \leq n \leq p-2$, on définit $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho}) = a(n,m)$. Si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{n+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(n+1)} \end{pmatrix} \otimes \omega^m$, on définit $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho}) = \sum_{(n',m')\in I} a(n',m')$ où :

$$I = \left\{ (n',m') \in \{0,...,p-1\} \times \{0,...,p-2\} \ \mid\ \overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{n'+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(n'+1)} \end{pmatrix} \otimes \omega^{m'} \right\}.$$

Si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \omega^m$, la définition de $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho})$ est un peu plus subtile, voir le §2.1.2. La conjecture est alors (cf. conjecture 2.3.1.1 dans le texte) :

**Conjecture 1.1.** *Pour tous $(k,\tau,\overline{\rho})$ comme précédemment :*

$$\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho}) = \mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho}).$$

Dans ce texte, nous vérifions par le calcul cette conjecture lorsque $k$ est pair et $\tau$ scalaire. Les preuves utilisent la théorie de [Br2]. Elles sont assez techniques et les résultats complets, un peu longs à énoncer, paraissent un peu miraculeux (cf. par exemple le corollaire 1.4 ci-après). C'est pourquoi il est possible qu'il existe une méthode de démonstration purement conceptuelle (voir la fin de cette introduction). Quitte à tordre, on suppose $\tau$ trivial et grâce à [Br2], on commence par déterminer toutes les réductions modulo $p$ non scindées des représentations semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$. Concernant les formes modulaires, on en déduit le théorème suivant (cf. corollaire 4.3.3.1 dans le texte) :

**Théorème 1.2.** *Soit $f$ une forme parabolique normalisée de niveau $Np$, poids $k$ et caractère $\chi$ avec $(p,N)=1$, $1<k<p$, $k$ pair et $\chi$ trivial en $p$. On suppose $f$ nouvelle en $p$ et $T_\ell(f) = a_\ell f$ pour tout premier $\ell$ avec $a_\ell \in \overline{\mathbf{Z}}_p$. On note $\rho_f$ la représentation continue de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *à valeurs dans* $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ *associée à $f$, $\overline{\rho}_f$ sa semi-simplifiée modulo $p$, $\overline{\rho}_{f,p}$ la restriction de $\overline{\rho}_f$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, $\mathfrak{L}_p(f) \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ l'invariant $\mathfrak{L}$ associé à $f$ (avec la définition de [Maz]), $\ell(f) = val_p(\mathfrak{L}_p(f))$ (où $val_p$ désigne la valuation $p$-adique normalisée par $val_p(p)=1$), $[\ell(f)]$ la partie entière de $\ell(f)$ et, si $\ell(f) \in \mathbf{Z}$, $\alpha(f) = \mathfrak{L}_p(f)/p^{\ell(f)}$. Soit $H_0 = 0$ et, pour $n$ entier strictement positif, $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$. On pose :*

$$a(f) = (-1)^{\frac{k}{2}}\left( -1 + \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\mathfrak{L}_p(f) + 2H_{k/2-1}\right)\right) \in \overline{\mathbf{Z}}_p$$

*et si $\ell(f) \in \{-\frac{k}{2}+2, -\frac{k}{2}+1, ..., -1\}$ :*

$$b(f) = (-1)^{\frac{k}{2}-\ell(f)}\left(\frac{k}{2}-\ell(f)\right)\binom{\frac{k}{2}-1-\ell(f)}{-2\ell(f)+1}\alpha(f) \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times.$$

*On note enfin $I_p$ le sous-groupe d'inertie de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *et $\lambda(\alpha)$ :* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ *l'unique caractère non ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$.*

*(i) Supposons $val_p(a(f)) = 0$.*

– *Si* $val_p\big(\mathfrak{L}_p(f)+2H_{k/2-1}\big)<1$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \quad\simeq\quad \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(f)}\,\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big)\end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ peu ramifié}$$

*ou*

$$\overline{\rho}_{f,p} \quad\simeq\quad \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(f)}\,\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big)\end{pmatrix} \text{ avec } *=0 \text{ si } k=2,$$

– *si* $val_p\big(\mathfrak{L}_p(f)+2H_{k/2-1}\big)\geq 1$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \quad\simeq\quad \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix}\otimes\lambda\big(\overline{a_p/(-p)^{\frac{k}{2}-1}}\big) \text{ avec } * \text{ très ramifié}$$

*ou*

$$\overline{\rho}_{f,p} \quad\simeq\quad \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-1} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\end{pmatrix}\otimes\lambda\big(\overline{a_p/(-p)^{\frac{k}{2}-1}}\big) \text{ avec } *=0 \text{ si } k=2.$$

*(ii) Supposons* $val_p\big(a(f)\big)>0$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)}\end{pmatrix} \text{ et } \det(\overline{\rho}_{f,p})\simeq\omega^{k-1}\lambda\big(\overline{a_p^2/p^{k-2}}\big).$$

*(iii) Supposons* $val_p\big(a(f)\big)<0$ *(i.e.* $\ell(f)<0$ *et* $k\neq 2$*).*

– *Si* $\ell(f)<-\frac{k}{2}+2$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)}\end{pmatrix} \text{ et } \det(\overline{\rho}_{f,p})\simeq\omega^{k-1}\lambda\big(\overline{a_p^2/p^{k-2}}\big),$$

– *si* $-\frac{k}{2}+2\leq\ell(f)$ *et* $\ell(f)\notin\mathbf{Z}$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}-[\ell(f)]+p(\frac{k}{2}+[\ell(f)]-1)} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+[\ell(f)]-1+p(\frac{k}{2}-[\ell(f)])}\end{pmatrix} \text{ et } \det(\overline{\rho}_{f,p})\simeq\omega^{k-1}\lambda\big(\overline{a_p^2/p^{k-2}}\big),$$

– *si* $-\frac{k}{2}+2\leq\ell(f)$ *et* $\ell(f)\in\mathbf{Z}$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \quad\simeq\quad \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-\ell(f)}\lambda\big(\overline{b(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}+\ell(f)-1}\lambda\big(\overline{b(f)}\,\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big)\end{pmatrix}$$

*ou*

$$\overline{\rho}_{f,p} \quad\simeq\quad \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}+\ell(f)-1}\lambda\big(\overline{b(f)}\,\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-\ell(f)}\lambda\big(\overline{b(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big)\end{pmatrix}.$$

(Voir [Se1] pour la terminologie “peu ramifié” et “très ramifié”.)

Si $R_1,...,R_r$ sont des $\mathfrak{O}$-algèbres plates locales noethériennes complètes, on note $R(k,\tau,\overline{\rho})\sim\prod_{i=1}^r R_i$ s'il existe un morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R(k,\tau,\overline{\rho})\to\prod_{i=1}^r R_i$ qui induit un isomorphisme $R(k,\tau,\overline{\rho})\big[\frac{1}{p}\big]\xrightarrow{\sim}\prod_{i=1}^r R_i\big[\frac{1}{p}\big]$ et (composé avec les projections) des surjections $R(k,\tau,\overline{\rho}) \twoheadrightarrow R_i$. A partir des calculs permettant d'obtenir le théorème précédent, on déduit (presque) la structure des anneaux $R(k,triv,\overline{\rho})$ pour $k$ pair et $1 < k < p$ avec $\mathfrak{O} = W(\mathbf{F})$ (cf. théorème 5.3.1 dans le texte) :

**Théorème 1.3.** *Soient $k$ un entier pair tel que $1 < k < p$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation continue telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[\mathrm{Gal}]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$. Il existe une extension finie $\mathbf{F}(\overline{\rho})$ de $\mathbf{F}$ telle que :*

*(i) Supposons $k = 2$, alors :*

– $R(2,triv,\overline{\rho}) = 0$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix} \right\}$,

– $R(2,triv,\overline{\rho}) \simeq W(\mathbf{F})[[X]]$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ très ramifié}, \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix} \right\}$ *ou si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$ *et* $\alpha \neq \beta$,

– $R(2,triv,\overline{\rho}) \sim W(\mathbf{F})[[X]] \times W(\mathbf{F})[[X]]$ *si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha \in \mathbf{F}^\times$ *et* $*$ *peu ramifié.*

*(ii) Supposons $k \geq 4$, alors :*

– $R(k,triv,\overline{\rho}) = 0$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}, \ 0 \leq i \leq k-2 \right\},$$

– $R(k,triv,\overline{\rho}) \simeq W(\mathbf{F})[[X]]$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1} \end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ très ramifié}, \begin{pmatrix} \omega^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

– $R(k,triv,\overline{\rho}) \otimes_{W(\mathbf{F})} W(\mathbf{F}(\overline{\rho})) \sim W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X]] \times W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X]]$ *si :* $\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i \end{pmatrix} \text{ avec } 1 \leq i \leq k-2 \text{ et } i \neq \frac{k}{2}-1, \begin{pmatrix} \omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}} \end{pmatrix} \right\}$ *ou si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$ *et* $\alpha \neq \beta$,

– $R(k,triv,\overline{\rho}) \otimes_{W(\mathbf{F})} W(\mathbf{F}(\overline{\rho})) \sim W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X]] \times W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X]] \times W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X]]$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)} \end{pmatrix}$,

– $R(k,triv,\overline{\rho}) \sim W(\mathbf{F})[[X]] \times \dfrac{W(\mathbf{F})[[X,Y]]}{(XY-p)}$ *si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha \in \mathbf{F}^\times$ *et* $*$ *peu ramifié,*

– $R(k,triv,\overline{\rho}) \otimes_{W(\mathbf{F})} W(\mathbf{F}(\overline{\rho})) \sim \dfrac{W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X,Y]]}{(XY-p)} \times \dfrac{W(\mathbf{F}(\overline{\rho}))[[X,Y]]}{(XY-p)}$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}$ *avec* $1 \leq i \leq \frac{k}{2}-2$ *(ce dernier cas n'arrive donc que pour $k > 4$).*

Par ailleurs, $\sigma(k,triv)=St\otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{Q}}_p^2$ où $St$ est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, c'est-à-dire le quotient de $\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}1$ par la représentation triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ où $U_0(p)\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ désigne les matrices triangulaires supérieures modulo $p$. Du théorème précédent et de la décomposition de $\overline{\sigma(k,triv)}=\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbf{F}}_p^2\otimes \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbf{F}}_p^2$, on déduit le cas particulier suivant de la conjecture 1.1 (cf. corollaires 5.3.3 et 5.4.2 dans le texte) :

**Corollaire 1.4.** *Soient $k$ un entier pair tel que $1<k<p$ et $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)\to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation continue telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[\mathrm{Gal}]}(\overline{\rho})=\mathbf{F}$.*
*(i) Supposons $k=2$, alors :*

– $\mu_{aut}(2,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(2,triv,\overline{\rho})=0$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\notin\left\{\begin{pmatrix}\omega & * \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\omega_2 & 0\\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}\right\}$,

– $\mu_{aut}(2,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(2,triv,\overline{\rho})=1$ *si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha,\beta\in\mathbf{F}^\times$ *et* $\alpha\neq\beta$ *ou si* $\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \textit{avec } *\ \textit{très ramifié},\ \begin{pmatrix}\omega_2 & 0\\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}\right\}$,

– $\mu_{aut}(2,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(2,triv,\overline{\rho})=2$ *si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha\in\mathbf{F}^\times$ *et* $*$ *peu ramifié.*

*(ii) Supposons $k\geq 4$, alors :*

– $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(k,triv,\overline{\rho})=0$ *si :*
$$\overline{\rho}|_{I_p}\notin\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\omega_2^{k-1-i+pi} & 0\\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)}\end{pmatrix},\ 0\leq i\leq k-2\right\},$$

– $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(k,triv,\overline{\rho})=1$ *si :*
$$\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix}\ \textit{avec } *\ \textit{très ramifié},\ \begin{pmatrix}\omega^{k-1} & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},$$

– $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(k,triv,\overline{\rho})=2$ *si :*
$$\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i\end{pmatrix}\ \textit{avec } 1\leq i\leq k-2 \textit{ et } i\neq \tfrac{k}{2}-1,\ \begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)} & 0\\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}}\end{pmatrix}\right\}$$
*ou si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha,\beta\in\mathbf{F}^\times$ *et* $\alpha\neq\beta$,

– $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(k,triv,\overline{\rho})=3$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{k-1} & 0\\ 0 & \omega_2^{p(k-1)}\end{pmatrix}$ *ou si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha\in\mathbf{F}^\times$ *et* $*$ *peu ramifié,*

– $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=\mu_{gal}(k,triv,\overline{\rho})=4$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{k-1-i+pi} & 0\\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)}\end{pmatrix}$ *avec* $1\leq i\leq \frac{k}{2}-2$ *(ce dernier cas n'arrive donc que pour* $k>4$*).*

On termine l'article en explorant quelques exemples potentiellement Barsotti-Tate, i.e. avec $k = 2$, mais où $\tau$ n'est plus scalaire. Le dernier exemple en particulier est assez spectaculaire, bien que nous sommes loin d'avoir mené dans ce cas les calculs jusqu'au bout.

La conjecture 1.1, si elle se révèle correcte (ou correcte après de mineurs ajustements), est surtout intéressante par ce qu'il pourrait y avoir derrière. Elle soulève en effet un certain nombre de questions. Parmi elles :
(i) Que se passe-t'il si $k \geq p$ ? Y-a-t'il encore une formule conjecturale permettant de calculer les multiplicités $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ à partir des représentations $\sigma(k, \tau)$ ?
Un des problèmes est qu'on ne dispose pas actuellement de théorie entière satisfaisante côté galoisien lorsque les poids de Hodge-Tate sont supérieurs ou égaux à $p - 1$.
(ii) Y-a-t'il des généralisations de la conjecture 1.1 lorsque l'on remplace $\mathbf{Q}_p$ par une extension finie $F$ quelconque ?
Si $F$ est trop ramifié, la théorie entière du côté galoisien est encore conjecturale en poids de Hodge-Tate $(0, k - 1)$ avec $2 < k < p$. Mais ce qui manque pour $F \neq \mathbf{Q}_p$ est surtout une recette analogue à celle du §2.1.2 pour calculer les $\mu_{aut}(k, \tau, \overline{\rho})$. Même le cas $F = \mathbf{Q}_{p^2}$ n'a pas vraiment été étudié de ce point de vue.
(iii) Même question que (ii) mais en remplaçant $\mathrm{GL}_2$ par $\mathrm{GL}_n$ ?
(iv) Peut-on interpréter de façon plus "géométrique" la multiplicité de Samuel $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho})$ ?
(v) Peut-on remplacer les représentations $p$-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ par des représentations $p$-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ? etc...
Un scénario possible est que la conjecture précédente soit une lointaine conséquence d'une hypothétique "correspondance de Langlands $p$-adique" (i.e. avec de la topologie $p$-adique du côté groupe de Weil, ou de Galois, de même que du côté représentations de $\mathrm{GL}_2$), plus exactement de la "réduction modulo $p$" (en un sens à définir) d'une telle correspondance. Mais les représentations $p$-adiques et en caractéristique $p$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ commencent juste à être étudiées de façon systématique ([BL1], [BL2], [ST]).

Les méthodes de cet article sont assez longues et calculatoires et les auteurs sont conscients qu'il est peu probable (pour cette raison) qu'elles conduisent à une démonstration de la conjecture 1.1 en toute généralité. Cependant, outre le fait que les calculs ne sont pas dénués d'une certaine élégance, il ne semble pas exister à l'heure actuelle de méthode alternative. Il est possible qu'une telle méthode passe par la résolution de certaines des questions précédentes, ou par des considérations globales (ou par les deux).

*Notations* : On fixe un nombre premier $p \neq 2$ et une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$. On note $\mathbf{C}_p$ sa complétion $p$-adique et $\overline{\mathbf{Z}}_p$ son anneau d'entiers d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$ et de corps résiduel $\overline{\mathbf{F}}_p$. Pour $n$ entier non nul, on note $\mathbf{Q}_{p^n}$ l'unique extension non ramifiée de degré $n$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, $\mathbf{Z}_{p^n}$ son anneau d'entiers, $\mathbf{F}_{p^n}$ son corps résiduel, $G_{p^n} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^n})$, $W_{p^n} = W(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^n})$ le sous-groupe de Weil de $G_{p^n}$, $I_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{nr})$ le sous-groupe d'inertie des $W_{p^n}$ où $\mathbf{Q}_p^{nr} = \cup_n \mathbf{Q}_{p^n}$ est la plus grande extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $I_p^{sauv} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{mod})$ le sous-groupe d'inertie sauvage de $I_p$ où $\mathbf{Q}_p^{mod}$ est la plus grande extension modérément ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. On normalise les isomorphismes de la théorie du corps de classes local de telle sorte que les Frobenius arithmétiques s'envoient sur les *inverses* des uniformisantes. On note $\varepsilon : G_p \to \mathbf{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique $p$-adique, $\omega$ sa réduction modulo $p$ et $\omega_2 : I_p \to \mu_{p^2-1}(\overline{\mathbf{Z}}_p^\times) \subset \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ le caractère fondamental de niveau 2 donné par $\omega_2(g) = \frac{g(p^{1/(p^2-1)})}{p^{1/(p^2-1)}}$. Pour $r \in \mathbf{N}$, $(r, p+1) = 1$, on note $\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^r$ l'unique représentation (irréductible) de $G_p$ dans $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ de déterminant $\omega^r$ et dont la restriction à $I_p$ est $\omega_2^r \oplus \omega_2^{pr}$. Si $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$, on note $\lambda(\alpha) : G_p \to \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ l'unique caractère non ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur $\alpha$. Si $x \in \overline{\mathbf{Z}}_p$, $\overline{x} \in \overline{\mathbf{F}}_p$ désigne la réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$ de $x$. Si $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$. On note $\mathrm{val}_p$ la valuation $p$-adique sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ normalisée par $\mathrm{val}_p(p) = 1$. Lorsque $\mathfrak{O}$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, par $\mathfrak{O}$-*algèbre locale* on désigne un anneau local $A$ muni d'un morphisme local d'anneaux locaux $\mathfrak{O} \to A$. Par représentation *finie* d'un groupe compact, on entend représentation triviale sur un sous-groupe ouvert. On dit parfois abusivement “réduction modulo $p$” au lieu de “réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$”.

*Remerciements* : C.B. remercie en premier lieu R. Taylor pour de nombreuses et enrichissantes conversations à Harvard en novembre 1998 et pour avoir suggéré de calculer les anneaux $R(k, \tau, \overline{\rho})$ directement comme coefficients de modules fortement divisibles “généralisés”. A.M. remercie le centre Emile Borel de l'I.H.P. et l'université de Regensburg pour leur accueil pendant la réalisation de ce travail. Durant la rédaction de cet article, les auteurs ont également bénéficié de conversations instructives avec les mathématiciens suivants, qu'ils remercient chaleureusement : L. Blasco, J.-B. Bost, L. Clozel, G. Henniart, M. Raynaud, L. Szpiro et M.-F. Vignéras. Ils remercient enfin le rapporteur de cet article, dont les remarques ont permis une amélioration significative de sa rédaction.

## 2. La conjecture sur les multiplicités modulaires

### 2.1. **La multiplicité automorphe.**

2.1.1.

**Définition 2.1.1.1.** *([BCDT],§1.1) Un type galoisien de degré 2, ou simplement un type galoisien, est une représentation de noyau ouvert :*

$$\tau : I_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{nr}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$$

*(définie à équivalence près) qui s'étend en une représentation du groupe de Weil $W_p$.*

Le lemme classique suivant, dont nous omettons la preuve, donne la structure des types galoisiens de degré 2 :

**Lemme 2.1.1.2.** *Soit $\tau$ un type galoisien de degré 2, alors :*
*(i) ou bien $\tau$ est réductible et somme de deux caractères finis de $I_p$ qui s'étendent à $W_p$ auquel cas $\tau \simeq \chi_1|_{I_p} \oplus \chi_2|_{I_p}$ où $\chi_1, \chi_2$ sont des caractères de $W_p$,*
*(ii) ou bien $\tau$ est réductible et somme de deux caractères finis de $I_p$ qui ne s'étendent pas*

*à $W_p$ auquel cas $\tau \simeq (\mathrm{Ind}_{W_{p^2}}^{W_p}\chi)|_{I_p} \simeq \chi|_{I_p} \oplus \chi^s|_{I_p}$ où $\chi$ est un caractère de $W_{p^2}$ qui ne s'étend pas à $W_p$, $s$ le générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_{p^2}/\mathbf{Q}_p)$ et $\chi^s$ le conjugué de $\chi$,*
*(iii) ou bien $\tau$ est irréductible auquel cas $\tau \simeq (\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_p}\chi)|_{I_p}$ où $K$ est une extension quadratique ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\chi$ un caractère du groupe de Weil $W_K$ de $K$ dont la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K\mathbf{Q}_p^{nr})$ ne s'étend pas à $I_p$.*

Rappelons qu'une représentation *lisse* de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un $\overline{\mathbf{Q}}_p$-espace vectoriel $V$ est un morphisme de groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}(V)$ tel que le stabilisateur de tout vecteur de $V$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Une telle représentation irréductible est de dimension infinie dès qu'elle n'est pas un caractère. La correspondance locale de Langlands (pour la normalisation du corps de classes local fixée dans l'introduction) établit une bijection canonique entre représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations de degré 2 du groupe de Weil-Deligne de $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $W_p$ est semi-simple ([JL], [Ku]). Si $\pi$ est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on note $WD(\pi)$ la représentation de Weil-Deligne correspondante.

**Théorème 2.1.1.3.** *Soit $\tau$ un type galoisien de degré 2. Il existe, à isomorphisme près, une et une seule représentation finie irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ par exemple), notée $\sigma(\tau)$, telle que pour toute représentation lisse irréductible $\pi$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de dimension infinie :*

$$\pi|_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \text{ contient } \sigma(\tau) \iff WD(\pi)|_{I_p} \simeq \tau.$$

*De plus, $\sigma(\tau)$ intervient alors dans $\pi|_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}$ avec multiplicité 1.*

Ce théorème est démontré par Henniart en appendice, dans le cas général où $\mathbf{Q}_p$ est remplacé par un corps commutatif localement compact non archimédien arbitraire. L'existence de $\sigma(\tau)$ n'est pas nouvelle (cf. th.2.1.1.4 ci-dessous) mais l'unicité semble absente de la littérature. Nous explicitons maintenant la construction de $\sigma(\tau)$ en suivant, comme [BCDT], [Ge] mais en adoptant les notations et la présentation de [BCDT],§1.2 et du lemme 2.1.1.2 :

**Théorème 2.1.1.4.** *Soit $\tau$ un type galoisien de degré 2.*
*(i) Supposons $\tau \simeq \chi_1|_{I_p} \oplus \chi_2|_{I_p}$ et soit $p^a$ le conducteur d'Artin de $\chi_1\chi_2^{-1}$.*

- *Si $a = 0$, alors :*

$$\sigma(\tau) \simeq St \otimes (\chi_1 \circ \det) \simeq St \otimes (\chi_2 \circ \det)$$

*où $St$ est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.*

- *Si $a \geq 1$, alors :*

$$\sigma(\tau) \simeq \left(\mathrm{Ind}_{U_0(p^a)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\chi_1\chi_2^{-1}\right) \otimes (\chi_2 \circ \det)$$

$$\text{où } U_0(p^a) = \begin{pmatrix} * & * \\ p^a * & * \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \text{ et } \chi_1\chi_2^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ p^a\gamma & \delta \end{pmatrix} = \chi_1(\alpha)\chi_2^{-1}(\alpha).$$

*(ii) Supposons $\tau \simeq (\mathrm{Ind}_{W_{p^2}}^{W_p}\chi)|_{I_p} \simeq \chi|_{I_p} \oplus \chi^s|_{I_p}$ où $\chi \neq \chi^s$. Soient $p^a$ ($a \geq 1$) le conducteur d'Artin de $\chi^s\chi^{-1}$, $\chi'$ un caractère de $W_p$ tel que $\chi\chi'^{-1}|_{W_{p^2}}$ est de conducteur $p^a$ (il en existe) et choisissons un plongement $\mathbf{Z}_{p^2} \hookrightarrow M_2(\mathbf{Z}_p)$ (i.e. une $\mathbf{Z}_p$-base de $\mathbf{Z}_{p^2}$). En particulier, la conjugaison $s$ dans $\mathbf{Z}_{p^2}$ est une matrice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.*

– *Si* $a=1$, *alors* $\sigma(\tau)$ *est l'unique représentation irréductible de dimension* $p-1$ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *telle que :*

$$St\otimes\sigma(\tau)\simeq\left(\mathrm{Ind}_{\mathbf{Z}_{p^2}^\times(1+p\mathbf{Z}_{p^2}s)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\chi\chi'^{-1})|_{W_{p^2}}\right)\otimes(\chi'\circ\det)$$

*où* $((\chi\chi'^{-1})|_{W_{p^2}})(\alpha\beta)=\chi(\alpha)\chi'^{-1}(N_{\mathbf{Z}_{p^2}/\mathbf{Z}_p}(\alpha))$, $\alpha\in\mathbf{Z}_{p^2}^\times$, $\beta\in 1+p\mathbf{Z}_{p^2}s$.

– *Si* $a$ *est impair* $\geq 3$, *alors :*

$$\sigma(\tau)\simeq\left(\mathrm{Ind}_{\mathbf{Z}_{p^2}^\times(1+p^{\frac{a-1}{2}}\mathbf{Z}_{p^2}s)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\eta\right)\otimes(\chi'\circ\det)$$

*où* $\eta$ *est l'unique représentation irréductible de dimension* $p$ *de* $\mathbf{Z}_{p^2}^\times(1+p^{\frac{a-1}{2}}\mathbf{Z}_{p^2}s)$ *telle que* $\eta|_{\mathbf{Z}_{p^2}^\times(1+p^{\frac{a+1}{2}}\mathbf{Z}_{p^2}s)}\simeq\oplus_{\chi''\neq 1}(\chi\chi'^{-1})|_{W_{p^2}}\chi''$ *avec* $\chi''$ *caractère non trivial de* $\mathbf{Z}_{p^2}^\times/\mathbf{Z}_p^\times(1+p\mathbf{Z}_{p^2})$ *et* $((\chi\chi'^{-1})|_{W_{p^2}}\chi'')(\alpha\beta)=\chi(\alpha)\chi'^{-1}(N_{\mathbf{Z}_{p^2}/\mathbf{Z}_p}(\alpha))\chi''(\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{Z}_{p^2}^\times$, $\beta\in 1+p^{\frac{a+1}{2}}\mathbf{Z}_{p^2}s$.

– *Si* $a$ *est pair, alors :*

$$\sigma(\tau)\simeq\left(\mathrm{Ind}_{\mathbf{Z}_{p^2}^\times(1+p^{\frac{a}{2}}\mathbf{Z}_{p^2}s)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\chi\chi'^{-1})|_{W_{p^2}}\right)\otimes(\chi'\circ\det)$$

*où* $((\chi\chi'^{-1})|_{W_{p^2}})(\alpha\beta)=\chi(\alpha)\chi'^{-1}(N_{\mathbf{Z}_{p^2}/\mathbf{Z}_p}(\alpha))$, $\alpha\in\mathbf{Z}_{p^2}^\times$, $\beta\in 1+p^{\frac{a}{2}}\mathbf{Z}_{p^2}s$.

*(iii) Supposons* $\tau\simeq(\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_p}\chi)|_{I_p}$ *où* $K$ *est une extension quadratique ramifiée de* $\mathbf{Q}_p$ *et* $\chi|_{W_K\cap I_p}\neq\chi^s|_{W_K\cap I_p}$. *Soient* $p^a$ *le conducteur de* $\chi^s\chi^{-1}$ *(par [Ge],§4.3* $a$ *est pair non nul),* $\chi'$ *un caractère de* $W_p$ *tel que* $(\chi\chi'^{-1})|_{W_K}$ *est de conducteur* $p^a$ *et choisissons un plongement* $\mathfrak{O}_K\hookrightarrow M_2(\mathbf{Z}_p)$ *(i.e. une* $\mathbf{Z}_p$*-base de* $\mathfrak{O}_K$*). Alors :*

$$\sigma(\tau)\simeq\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{O}_K^\times(1+\mathfrak{p}_K^{\frac{a}{2}}s)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\chi\chi'^{-1})|_{W_K}\chi''\right)\otimes(\chi'\circ\det)$$

*où* $\chi''$ *est l'unique caractère non trivial de* $\mathfrak{O}_K^\times/(\mathfrak{O}_K^\times)^2$ *et* $((\chi\chi'^{-1})|_{W_K}\chi'')(\alpha\beta)=\chi(\alpha)\chi'^{-1}(N_{\mathfrak{O}_K/\mathbf{Z}_p}(\alpha))\chi''(\alpha)$, $\alpha\in\mathfrak{O}_K^\times$, $\beta\in 1+\mathfrak{p}_K^{\frac{a}{2}}s$.

*Démonstration.* Pour le (i), on renvoie au §A.2 de l'appendice d'Henniart. Le (ii) se déduit aisément de [Ge],§3 et le (iii) de [Ge],§4 et [BCDT],lemme 1.2.1. □

**Remarque 2.1.1.5.** Notons $\sigma_\tau$ la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ ou de $U_0(p)$ associée au type galoisien $\tau$ dans [BCDT],§1.2. On a $\sigma(\tau)=\sigma_\tau^\vee$ si $\sigma_\tau$ est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $\sigma(\tau)=\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\sigma_\tau^\vee$ si $\sigma_\tau$ est une représentation de $U_0(p)$. On prend la contragrédiente $\sigma_\tau^\vee$ car dans [CDT] et [BCDT] l'isomorphisme $W_p^{ab}\xrightarrow{\sim}\mathbf{Q}_p^\times$ choisi est celui qui envoie les Frobenius sur les uniformisantes. On adopte ici une convention différente pour avoir une règle d'admission plus naturelle (voir ce qui suit).

2.1.2. Rappelons que les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ en caractéristique $p$ sont données par :

$$\sigma_{n,m} = \mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbf{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbf{F}}_p} \det{}^m$$

où $(n,m) \in \{0,...,p-1\} \times \{0,...,p-2\}$ et où $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ agit sur $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbf{F}}_p^2)$ via l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p^2$ (cf. par exemple [CDT],§3.1 ou [BL2],prop.1). On définit la "règle d'admission" suivante (cf. [Se1],p.186 pour la définition des termes "peu ramifié" et "très ramifié") :

(i) $\sigma_{0,m}$ admet avec multiplicité 1 toutes les représentations finies $\overline{\rho} : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ telles que $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{m+1} & * \\ 0 & \omega^m \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié ou telles que $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix} \otimes \omega^m$,
(ii) si $1 \leq n \leq p-2$, $\sigma_{n,m}$ admet avec multiplicité 1 toutes les représentations finies $\overline{\rho} : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ telles que $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{n+m+1} & * \\ 0 & \omega^m \end{pmatrix}$ ou $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{n+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(n+1)} \end{pmatrix} \otimes \omega^m$,
(iii) $\sigma_{p-1,m}$ admet avec multiplicité 1 toutes les représentations finies $\overline{\rho} : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ telles que $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{m+1}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^m\lambda(\beta) \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$, $\alpha \neq \beta$ ou $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{m+1}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^m\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ et $*$ très ramifié ou $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix} \otimes \omega^m$ et admet avec multiplicité 2 toutes les représentations finies $\overline{\rho} : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ telles que $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{m+1}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^m\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ et $*$ peu ramifié.

Pour tout $(n,m) \in \{0,...,p-1\} \times \{0,...,p-2\}$ et toute représentation finie $\overline{\rho} : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$, on définit un entier positif ou nul $\mu_{n,m}(\overline{\rho})$ de la façon suivante :
(i) $\mu_{n,m}(\overline{\rho}) = 0$ si $\sigma_{n,m}$ n'admet pas $\overline{\rho}$,
(ii) $\mu_{n,m}(\overline{\rho}) = 1$ si $\sigma_{n,m}$ admet $\overline{\rho}$ avec multiplicité 1,
(iii) $\mu_{n,m}(\overline{\rho}) = 2$ si $\sigma_{n,m}$ admet $\overline{\rho}$ avec multiplicité 2.
Remarquons que $\mu_{n,0}(\overline{\rho}) \neq 0$ (i.e. $\sigma_{n,0}$ admet $\overline{\rho}$) si et seulement si ou bien $n+2$ est le poids associé par Serre à $\overline{\rho}$ dans [Se1],§2 ou bien $n = p-1$ et 2 est le poids associé par Serre à $\overline{\rho}$ dans *loc.cit.*. Ensuite, on tord d'un côté par une puissance du déterminant, de l'autre par la même puissance du caractère cyclotomique. Nous n'avons pas encore d'explication raisonnable pour le cas de multiplicité 2 autre que celle de satisfaire la conjecture 2.3.1.1 dans tous les cas que nous avons vérifiés.

**Remarque 2.1.2.1.** La règle d'admission précédente est la duale de Cartier de la règle d'admission de [BCDT],§1.2 mais où tout était de multiplicité 1.

Soit $k$ un entier $> 1$ et posons :

$$\sigma(k,\tau) = \sigma(\tau) \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_p} \mathrm{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbf{Q}}_p^2)$$

(donc $\sigma(2,\tau) \simeq \sigma(\tau)$). C'est une représentation linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ continue pour la topologie $p$-adique de dimension finie sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ (et $\sigma(k,\tau)$ est en fait définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$). Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est un groupe compact, il existe des $\overline{\mathbf{Z}}_p$-réseaux de $\sigma(k,\tau)$ stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (cf. par exemple [Se2],§1.1) et la semi-simplifiée $\overline{\sigma(k,\tau)}^{ss}$ de la réduction modulo l'idéal $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$ d'un de ces réseaux est indépendante du réseau choisi (Brauer-Nesbitt).

A tout entier $k > 1$, à tout type galoisien $\tau$ de degré 2 et à toute représentation finie $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$, on associe un entier positif ou nul $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho})$, la "multiplicité automorphe", de la façon suivante :

$$\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho}) = \sum_{n,m} \mu_{n,m}(\overline{\rho}) \dim_{\overline{\mathbf{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\big(\sigma_{n,m}, \overline{\sigma(k,\tau)}^{ss}\big)$$

où $(n,m)$ parcourt $\{0,...,p-1\} \times \{0,...,p-2\}$. Autrement dit, on compte 1 (resp. 2) par facteur irréductible de $\overline{\sigma(k,\tau)}^{ss}$ qui admet $\overline{\rho}$ avec multiplicité 1 (resp. 2) et on ajoute le tout.

## 2.2. **La multiplicité galoisienne.**

2.2.1. Commençons par rappeler le lemme suivant :

**Lemme 2.2.1.1.** *Soit $\rho : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ une représentation continue. Alors il existe une extension finie $E \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ telle que $\rho(G_p) \subset \mathrm{GL}_2(E)$.*

*Démonstration.* (J.-B. Bost) On a $G_p = \cup_E \rho^{-1}(\mathrm{GL}_2(E))$ où $E$ parcourt les extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et où $\rho^{-1}(\mathrm{GL}_2(E))$ est un fermé de $G_p$ par continuité de $\rho$. Comme ces extensions finies forment un ensemble dénombrable (cela se déduit du lemme de Krasner), on a que $G_p$ est une union dénombrable de fermés. Comme $G_p$ est compact, c'est un espace de Baire et $\cup_E \mathrm{Int}(\rho^{-1}(\mathrm{GL}_2(E)))$ est un ouvert dense de $G_p$. Donc il existe une extension finie $F$ de $\mathbf{Q}_p$ telle que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F) \subset \cup_E \mathrm{Int}(\rho^{-1}(\mathrm{GL}_2(E)))$. Comme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ est compact, il suffit d'un nombre fini d'ouverts pour le recouvrir, i.e. il existe une extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$ telle que $\rho(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)) \subset \mathrm{GL}_2(E)$. On en déduit aisément le résultat, quitte à agrandir encore un peu $E$. Signalons que ce lemme et sa preuve sont valables dans un cadre bien plus général que nous n'avons pas cherché à atteindre. $\square$

Dans la suite, par représentation continue de $G_p$ dans $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$, on sous-entend donc représentation à valeurs dans une extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$.

On renvoie au §3 ci-après pour quelques définitions et références sur la théorie des représentations $p$-adiques semi-stables et des anneaux qui vont avec. Nous rappelons maintenant la construction de la représentation de Weil-Deligne associée à une représentation $p$-adique potentiellement semi-stable $V$ de $G_p$ (c'est-à-dire une représentation $p$-adique de $G_p$ dont la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ est semi-stable pour une extension finie suffisamment grande $F$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$). Lorsque $V$ est à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$, la construction est détaillée dans [Fo1]. Lorsque $V$ est à coefficients dans une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ arbitrairement grande, il faut faire un peu attention. Soit donc $V$ un $\overline{\mathbf{Q}}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action $\overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaire continue de $G_p$ qui en fait une représentation potentiellement semi-stable et soit $F$ une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$

dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ telle que $V|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)}$ soit semi-stable (N.B. : ne pas confondre le $\overline{\mathbf{Q}}_p$ dans lequel vit $F$ et le $\overline{\mathbf{Q}}_p$ des coefficients !). On pose $D_{st,F}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)}$ : c'est un $F_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p$-module libre de rang $\dim_{\overline{\mathbf{Q}}_p} V$ où $F_0$ est la plus grande extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dans $F$ (cf. [CDT],§B.1). Il est muni d'un automorphisme $F_0$-semi-linéaire et $\overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaire $\varphi$, d'un endomorphisme nilpotent $F_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaire $N$ tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action $F_0$-semi-linéaire et $\overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaire de $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ qui commute avec $\varphi$ et $N$. On munit $D_{st,F}(V)$ d'une action du groupe de Weil $W_p$ en faisant agir $g \in W_p$ par $g \circ \varphi^{-\alpha(g)}$ où l'image de $g$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ est la puissance $\alpha(g)^{\text{ième}}$ du Frobenius arithmétique absolu. Remarquons que $F_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p \simeq \overline{\mathbf{Q}}_p^d$ où $d = [F_0 : \mathbf{Q}_p]$ et où le Frobenius agit sur $\overline{\mathbf{Q}}_p^d$ par permutation circulaire. Ainsi $D_{st,F}(V) \simeq D_{1,F} \times \ldots \times D_{d,F}$ où $D_{i,F}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_p$-espace vectoriel de même dimension que $V$ et muni d'une action de $(W_p, N)$ qui en fait une représentation de Weil-Deligne.

**Lemme 2.2.1.2.** *La classe d'isomorphisme de représentation de Weil-Deligne de $D_{i,F}$ est indépendante des choix de $i$ et de $F$.*

*Démonstration.* Commençons par exhiber pour tout $i$ un isomorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaire $D_{i,F} \xrightarrow{\sim} D_{i+1,F}$ qui commute à $W_p$ et à $N$. Par un lemme de Deligne, il existe un automorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_p$-linéaire de $D_{i,F}$, disons $f_i$, tel que $f_i$ est $W_p$-équivariant et $N \circ f_i = \frac{1}{p} f_i \circ N$ ([De],lemme 8.4.3). L'isomorphisme $\varphi \circ f_i : D_{i,F} \to D_{i+1,F}$ convient alors et $D_{st,F}(V) \otimes_{F_0 \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p$ (isomorphe à un des $D_{i,F}$) se trouve donc indépendant du plongement $F_0 \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$ choisi. Si $F'$ est une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$ contenant $F$, $D_{st,F'}(V) \simeq F'_0 \otimes_{F_0} D_{st,F}(V)$ de sorte que $D_{st,F'}(V) \otimes_{F'_0 \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p \simeq D_{st,F}(V) \otimes_{F_0 \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p$ et les représentations de Weil-Deligne $D_{i,F}$ et $D_{j,F'}$ sont toutes isomorphes. Si $F'$ est une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$ sur laquelle $V$ devient semi-stable, on raisonne comme avant avec la composée $F'F$. $\square$

La classe d'isomorphisme du lemme 2.2.1.2, c'est-à-dire la classe d'isomorphisme de représentation de Weil-Deligne de $D_{st,F}(V) \otimes_{F_0 \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p$, est *par définition* la représentation de Weil-Deligne associée à la représentation potentiellement semi-stable $V$. Rappelons enfin la définition des poids de Hodge-Tate associés à une représentation potentiellement semi-stable de $G_p$ à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ (i.e. dans une extension finie arbitrairement grande de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$). Soient $E$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $V$ une représentation continue $E$-linéaire de $G_p$ sur un $E$-espace vectoriel de dimension finie, on note (rappelons que $\varepsilon$ est le caractère cyclotomique $p$-adique) :

$$(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)\{i\} = \{x \in \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \mid g(x) = \varepsilon^i(g)x,\ \forall g \in G_p\}$$

($G_p$ agissant sur $\mathbf{C}_p$ et sur $V$). C'est un $E$-espace vectoriel de dimension finie.

**Proposition 2.2.1.3.** *Soit $V$ une représentation potentiellement semi-stable de $G_p$ à coefficients dans une extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, alors on a un isomorphisme de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-modules compatible à l'action de $G_p$ :*

$$\bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)\{i\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

*(l'action de $G_p$ étant semi-linéaire sur $\mathbf{C}_p$ et linéaire sur $E$).*

Voir [Fo2],§3 pour la preuve. Les entiers $i$ tels que $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)\{i\}$ est non nul sont *par définition* les poids de Hodge-Tate de la représentation potentiellement semi-stable $V$ (il n'y en a qu'un nombre fini).

2.2.2. On fixe une représentation continue :

$$\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$$

telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbf{F}}_p$. Pour toute extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ d'anneau de valuation $\mathfrak{O}$ et de corps résiduel $\mathbf{F}$ tel que $\overline{\rho}(G_p) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$, on dispose d'un anneau de déformation universel $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ qui est une $\mathfrak{O}$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel $\mathbf{F}$ (voir par exemple l'appendice A de [CDT]). Fixons $k$ un entier $> 1$, $\tau$ un type galoisien de degré 2 et $E$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}$ et de corps résiduel $\mathbf{F}$. On suppose que $\tau$ est *rationnel sur* $E$ (i.e. $\tau : I_p \to \mathrm{GL}_2(E) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$) et que $\overline{\rho}$ est *rationnel sur* $\mathbf{F}$. On dit qu'une déformation $\rho$ de $\overline{\rho}$ à l'anneau des entiers $\mathfrak{O}'$ d'une extension finie $E'$ de $E$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ est de type $(k, \tau)$ si :

(i) $\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p$ est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$,
(ii) $WD(\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p)|_{I_p} \simeq \tau$ où $WD(\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p)$ est la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p$ (i.e. on regarde seulement la restriction à l'inertie de la représentation de Weil sous-jacente),
(iii) $\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(G_p)$ est d'ordre fini et $p \nmid \dfrac{\#\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(G_p)}{\#\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(I_p^{sauv})}$.

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p)\big)|_{I_p} &= WD\big(\det(\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p)\big)|_{I_p} \\
&= \det\big(WD(\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p)\big)|_{I_p} \\
&= \det\big(WD(\rho \otimes_{\mathfrak{O}'} \overline{\mathbf{Q}}_p)|_{I_p}\big) \\
&= \det(\tau)
\end{aligned}$$

de sorte que la dernière condition est équivalente à :
(iii)$_{\mathrm{bis}}$ $\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(G_p)$ est d'ordre fini et $p \nmid \dfrac{\#\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(G_p)}{\#\det(\tau)(I_p^{sauv})}$.
En particulier si $\det(\tau)$ est modéré, elle est aussi équivalente à :
(iii)$_{\mathrm{mod}}$ $\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(G_p)$ est d'ordre fini premier à $p$.

**Remarque 2.2.2.1.** Si $\det(\tau)$ n'est pas modéré, il n'existe pas de déformations de $\overline{\rho}$ satisfaisant (i), (ii) et (iii)$_{\mathrm{mod}}$ puisqu'alors $p$ divise $\#\det(\tau)(I_p^{sauv})$ et donc $\#\big(\varepsilon^{-k+1}\det(\rho)\big)(G_p)$.

Signalons tout de suite :

**Lemme 2.2.2.2.** *Lorsque $\tau$ n'est pas scalaire, toute représentation potentiellement semi-stable de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et de type $\tau$ (i.e. telle que la restriction à $I_p$ de la représentation de Weil-Deligne associée est isomorphe à $\tau$) est potentiellement cristalline.*

*Démonstration.* Toute représentation de Weil-Deligne de dimension 2 telle que $N \neq 0$ est scalaire quand on la restreint à l'inertie. En effet, elle est réductible car elle stabilise

$\mathrm{Ker}(N)$ et les deux caractères diagonaux restreints à l'inertie sont les mêmes car $N$ commute avec l'inertie. Si $\tau$ n'est pas scalaire, c'est donc que $N = 0$, i.e. que la représentation de départ est potentiellement cristalline. □

On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ est de type $(k, \tau)$ s'il existe un homomorphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ de noyau $\mathfrak{p}$ tel que la déformation $\rho : G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ obtenue par composition à partir de la déformation universelle $G_p \to \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}})$ soit de type $(k, \tau)$. Puisque $\tau$ est rationnel sur $E$, si $\mathfrak{p}$ est un tel idéal premier, alors pour *tout* morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ de noyau $\mathfrak{p}$, la déformation correspondante $G_p \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ est de type $(k, \tau)$. S'il n'y a pas d'idéal $\mathfrak{p}$ de type $(k, \tau)$, on définit $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} = 0$. Sinon, on définit $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ comme le quotient de $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ par l'intersection des idéaux premiers de type $(k, \tau)$. C'est une $\mathfrak{O}$-algèbre plate locale noethérienne complète réduite de corps résiduel $\mathbf{F}$.

**Lemme 2.2.2.3.** *Si on remplace $E$ par une extension finie $E'$ de $E$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}'$, alors $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \simeq \mathfrak{O}' \otimes_{\mathfrak{O}} R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$.*

*Démonstration.* Notons d'abord que $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \simeq R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}'$ (cf. l'appendice A de [CDT]). Il suffit de montrer que si $\mathfrak{p} \subset R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ est un idéal premier de type $(k, \tau)$, alors $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{O}' = \cap \mathfrak{q}$ où l'intersection est prise sur les idéaux premiers de $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}'$ contenant $\mathfrak{p}$ (en utilisant que $\tau$ est rationnel sur $E$, on vérifie que *tous* ces idéaux sont encore de type $(k, \tau)$). Ce résultat se déduit du fait classique d'algèbre commutative suivant : si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux et $\mathfrak{p}$ un idéal de $A$ tel que $B/\mathfrak{p}B$ n'a pas d'éléments nilpotents, alors $\mathfrak{p}B = \cap_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}} \mathfrak{q}$, l'intersection étant prise sur les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de $B$ contenant $\mathfrak{p}$. □

La conjecture suivante a été inspirée par des conjectures ou questions antérieures (cf. par exemple l'introduction de [FM] ou le §1.2 de [CDT]) et par tous nos calculs :

**Conjecture 2.2.2.4.** *Pour tous $(k, \tau, \overline{\rho})$ et $E, \mathfrak{O}$ comme ci-dessus :*
*(i) $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ est équidimensionnel de dimension de Krull 2 (s'il est non nul),*
*(ii) $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E$ est un anneau régulier,*
*(iii) si $\mathfrak{p}$ est le noyau d'un morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ qui se factorise par $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$, alors $\mathfrak{p}$ est de type $(k, \tau)$.*

Rappelons qu'un anneau local noethérien $A$ est dit équidimensionnel si $\dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p})$ pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de $A$ où dim désigne la dimension de Krull.

**Lemme 2.2.2.5.** *Soit $\mathfrak{O}'$ comme au lemme 2.2.2.3. La conjecture 2.2.2.4 est vraie pour $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ si et seulement si elle est vraie pour $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$.*

*Démonstration.* Commençons par (iii). Si (iii) est vrai pour $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ et si $\mathfrak{q}$ est le noyau de $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \to R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} = R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes \mathfrak{O}' \to \overline{\mathbf{Z}}_p$, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ est de type $(k, \tau)$ par hypothèse d'où il s'ensuit aisément que $\mathfrak{q}$ est de type $(k, \tau)$. La réciproque est facile et est laissée au lecteur. Passons à (ii). Si $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E$ est régulier, comme toute extension finie de $E$ est séparable, $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E$ est géométriquement régulier sur $E$ (voir par exemple [Mat], Lemma 1 p.216 et Theorem 28.7). En particulier $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \otimes E'$ est régulier. Supposons $R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \otimes E'$ régulier. Il suffit de montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E$, le localisé $(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E)_{\mathfrak{p}}$ est régulier. Soit $\mathfrak{p}'$ un idéal premier de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E' = R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \otimes E'$ au dessus de $\mathfrak{p}$, alors $(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E')_{\mathfrak{p}'}$ est régulier et est plat sur $(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E)_{\mathfrak{p}}$. Par EGA $0_{\mathrm{IV}}$, proposition 17.3.3 (i), il s'ensuit que $(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes E)_{\mathfrak{p}}$ est régulier. Passons maintenant à (i). Comme $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$ est entier sur $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ par le lemme 2.2.2.3, on a $\dim(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}) = \dim(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}})$. Supposons $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$ équidimensionnel et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$. Si $\mathfrak{p}'$ est minimal (pour l'inclusion) parmi les idéaux premiers de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$ au dessus de $\mathfrak{p}$, on vérifie facilement que $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier minimal de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$. Comme $\frac{R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}}{\mathfrak{p}'}$ est entier sur $\frac{R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}}{\mathfrak{p}}$, on a $\dim\big(\frac{R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}}{\mathfrak{p}}\big) = \dim\big(\frac{R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}}{\mathfrak{p}'}\big)$ et $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ est équidimensionnel. Réciproquement, supposons $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ équidimensionnel et soit $\mathfrak{p}'$ un idéal premier minimal de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$. Le "going-down" entraîne que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ est un idéal premier minimal de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$. On a comme précédemment $\dim\big(\frac{R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}}{\mathfrak{p}'}\big) = \dim\big(\frac{R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}}{\mathfrak{p}}\big)$ d'où l'équidimensionnalité de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'}$. $\square$

Pour tout anneau local noethérien $(A,\mathfrak{m})$, la fonction $\chi(n) = \mathrm{long}_A(A/\mathfrak{m}^{n+1})$ est un polynôme en $n$ pour $n \gg 0$ de degré $\dim(A)$ et de coefficient dominant $\dfrac{e_{max}(A)}{\dim(A)!}$ où $e_{max}(A)$ est un entier strictement positif (si $A$ est non nul) appelé "multiplicité de Samuel" (cf. [Mat],§13).

A tout entier $k > 1$, à tout type galoisien $\tau$ de degré 2 et à toute représentation finie $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbf{F}}_p$, on associe un entier positif ou nul $\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho})$, la "multiplicité galoisienne", de la façon suivante :

$$\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho}) = e_{max}\big(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}\big).$$

Autrement dit $\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho})$ est la multiplicité de Samuel de l'anneau local $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$. Le lemme élémentaire suivant est laissé au lecteur :

**Lemme 2.2.2.6.** *Soit $\mathfrak{O}'$ comme au lemme 2.2.2.3 de corps résiduel $\mathbf{F}' \supset \mathbf{F}$, alors $e_{max}\big(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}'} \otimes_{\mathfrak{O}'} \mathbf{F}'\big) = e_{max}\big(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}\big)$.*

Notons que $\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho}) = 0$ si et seulement si $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} = 0$ (i.e. il n'y a pas de déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k,\tau)$), et que $\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho}) = 1$ si et seulement si $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \simeq \mathfrak{O}[[X]]$ (modulo la conjecture 2.2.2.4 : voir le lemme 5.1.8).

**Remarque 2.2.2.7.** Si $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \neq 0$, la conjecture 2.2.2.4 prédit que $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ est de dimension 1 de sorte que $\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho})$ peut se voir de façon plus directe comme la dimension sur $\mathbf{F}$ de $\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$ pour $n \gg 0$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$.

**Remarque 2.2.2.8.** Plutôt que de supposer $\tau$ rationnel sur $E$, on aurait pu supposer seulement $\tau^{\sigma} \simeq \tau$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/E)$ où $\tau^{\sigma}$ est le conjugué de $\tau$ par $\sigma$.

**Remarque 2.2.2.9.** En oubliant la condition (iii) sur le déterminant dans la définition des déformations de $\overline{\rho}$ de type $(k,\tau)$ (ce qui conduit à davantage d'idéaux premiers de ce type), on définit de manière analogue des quotients $R(k,\tau,\overline{\rho})'_{\mathfrak{O}}$ de $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$. Lorsque $\det(\tau)$ est modéré, on peut montrer qu'on a des isomorphismes (non canoniques) : $R(k,\tau,\overline{\rho})'_{\mathfrak{O}} \simeq R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}[[D]]$ et donc des égalités $e_{max}\big(R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}\big) = e_{max}\big(R(k,\tau,\overline{\rho})'_{\mathfrak{O}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}\big)$.

Nous avons gardé la condition (iii) car elle intervient dans les problèmes de déformations de [Wi], [TW], [CDT], [BCDT], etc.

2.3. **La conjecture.**

2.3.1. La conjecture fait le lien entre les multiplicités $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho})$ (côté représentations en caractéristique $p$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$) et les multiplicités $\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho})$ (côté représentations $p$-adiques et en caractéristique $p$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$). Il s'agit donc, comme indiqué dans l'introduction, d'une conjecture dans l'esprit de la "philosophie de Langlands" :

**Conjecture 2.3.1.1.** *Soient $k$ un entier tel que $1<k<p$, $\tau$ un type galoisien de degré 2 et $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)\to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ une représentation continue telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho})=\overline{\mathbf{F}}_p$. Avec les notations précédentes :*

$$\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho})=\#\mathrm{det}(\tau)(I_p^{sauv})\cdot\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho}).$$

*En particulier si* $\det(\tau)$ *est modéré, on a :*

$$\mu_{gal}(k,\tau,\overline{\rho})=\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho}).$$

Cette conjecture et la précédente impliquent :
(i) $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho})=0$ si et seulement si $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}=0$ (et $\overline{\rho}$ n'admet pas de déformation de type $(k,\tau)$),
(ii) si $\det(\tau)$ est modéré, $\mu_{aut}(k,\tau,\overline{\rho})=1$ si et seulement si $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\simeq\mathfrak{O}[[X]]$ (par 5.1.8).
Lorsque $k=2$, la conjecture 2.3.1.1 entraîne essentiellement la partie "type" de la conjecture 1.3.1 de [BCDT] (mais seuls les types galoisiens non scalaires, i.e. par le lemme 2.2.2.2 et le théorème 1.4 de [Br5] seules les représentations potentiellement Barsotti-Tate, sont considérés dans [BCDT]).

2.3.2. Nous montrons ici qu'il suffit de démontrer les conjectures 2.2.2.4 et 2.3.1.1 pour les $\tau$ tels que $\det(\tau)$ est un caractère modéré de $I_p$. Appelons type (galoisien) de degré 1 tout caractère de noyau ouvert $\chi: I_p\to\overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ qui s'étend à $G_p$ et $p$-type de degré 1 tout type de degré 1 tel que $\chi(I_p)$ est un $p$-groupe, i.e. $\chi(I_p)\subset 1+\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$.

**Lemme 2.3.2.1.** *Soient $\tau$ un type galoisien de degré 2 quelconque et $\chi$ un type galoisien de degré 1 modéré. Alors la conjecture 2.2.2.4 est vraie pour $\tau$ (i.e. pour tous les $k,\overline{\rho}$) si et seulement si elle est vraie pour $\tau\otimes\chi$. De même, la conjecture 2.3.1.1 est vraie pour $\tau$ si et seulement si elle est vraie pour $\tau\otimes\chi$.*

*Démonstration.* Soit $\chi'$ un caractère de $G_p$ de noyau ouvert tel que $\#\chi'(G_p)$ est premier à $p$ et $\chi'|_{I_p}=\chi$. Quitte à augmenter $\mathfrak{O}$, on peut supposer $\chi'(G_p)\subset\mathfrak{O}$ (lemmes 2.2.2.5 et 2.2.2.6). Remarquons que si $\overline{\chi}'$ est la réduction de $\chi'$ dans $\mathbf{F}$, $\chi'=[\overline{\chi}']$ (représentant de Teichmüller). La torsion par $\chi'$ sur $R(\overline{\rho})$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $h_{\chi'}:R(\overline{\rho}\otimes\overline{\chi}')\xrightarrow{\sim}R(\overline{\rho})$ et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $R(\overline{\rho}\otimes\overline{\chi}')$ de type $(k,\tau\otimes\chi)$ si et seulement si $h_{\chi'}(\mathfrak{p})$ est de type $(k,\tau)$. De ceci et du fait que la règle d'admission du §2.1.2 est compatible aux twists, on déduit aisément le résultat. $\square$

**Proposition 2.3.2.2.** *Soit $\tau$ un type galoisien de degré 2 tel que* $\det(\tau)$ *est modéré et $\chi$ un type galoisien de degré 1 quelconque. Si les conjectures 2.2.2.4 et 2.3.1.1 sont vraies pour $\tau$ (i.e. pour tous les $k, \overline{\rho}$) alors elles sont vraies pour $\tau \otimes \chi$.*

*Démonstration.* Quitte à écrire $\chi = \chi_{mod} \cdot \chi_{sauv}$ où $\chi_{mod}$ est un type de degré 1 modéré et $\chi_{sauv}$ un $p$-type de degré 1 et à remplacer $\tau$ par $\tau \otimes \chi_{mod}$, on est ramené par le lemme 2.3.2.1 au cas où $\chi$ est un $p$-type. Remarquons qu'alors $\mu_{aut}(k, \tau, \overline{\rho}) = \mu_{aut}(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho})$ puisque $\overline{\sigma(k,\tau)}^{ss} = \overline{\sigma(k, \tau \otimes \chi)}^{ss}$. Soit $r = \#\chi(I_p^{sauv})$ et notons $\chi_1, ..., \chi_r$ les $r$ caractères finis distincts de $G_p$ tels que (via $W_p^{ab} \simeq \mathbf{Q}_p^\times$) $\chi_i|_{I_p} = \chi$ et $\chi_i(p) \in \chi(I_p^{sauv})$. Si $\rho$ est une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k, \tau)$, il est clair que pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $\rho \otimes \chi_i$ est une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k, \tau \otimes \chi)$ (la seule condition non triviale est (iii) mais comme $\det(\tau)$ est modéré, $\det(\tau \otimes \chi)(I_p^{sauv}) = \chi^2(I_p^{sauv}) = \chi(I_p^{sauv})$ car $p \neq 2$, et on a un isomorphisme de groupes abéliens $(\det(\rho)\varepsilon^{-k+1})(G_p) \xrightarrow{\sim} (\det(\rho)\varepsilon^{-k+1}\chi_i^2)(G_p)/(\chi^2)(I_p^{sauv}) \simeq (\det(\rho \otimes \chi_i)\varepsilon^{-k+1})(G_p)/\det(\tau \otimes \chi)(I_p^{sauv})$). De plus, si $i \neq j$ et si $\rho, \rho'$ sont deux déformations de $\overline{\rho}$ de type $(k, \tau)$, alors $\rho \otimes \chi_i \not\simeq \rho' \otimes \chi_j$ (car $\#(\det(\rho)\varepsilon^{-k+1})(G_p)$ est premier à $p$ et $p$ divise $\#(\det(\rho')\varepsilon^{-k+1}\chi_j^2\chi_i^{-2})(G_p)$). Réciproquement, pour toute déformation $\tilde{\rho}$ de $\overline{\rho}$ de type $(k, \tau \otimes \chi)$, on a $(\det(\tilde{\rho})\varepsilon^{-k+1})(p) = \mu_1\mu_2$ où $\mu_1$ est une racine de l'unité dans $\mathbf{Q}_p^{nr}$ et $\mu_2 \in \chi^2(I_p^{sauv}) = \chi(I_p^{sauv}) \subset \mu_{p^\infty}(\overline{\mathbf{Q}}_p^\times)$. Soit $\tilde{\chi}$ l'unique extension de $\chi$ à $G_p$ telle que $\tilde{\chi}(p) = \sqrt{\mu_2} \in \chi(I_p^{sauv})$, alors il existe $i \in \{1, ..., r\}$ tel que $\tilde{\chi} = \chi_i$ et $\rho = \tilde{\rho} \otimes \chi_i^{-1}$ est une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k, \tau)$. Quitte à étendre $\mathfrak{O}$, on suppose $\chi(I_p) \subset \mathfrak{O}$. Par la suite, on omet les coefficients $\mathfrak{O}$ en indice pour alléger le texte. Soient $h_i : R(\overline{\rho}) \xrightarrow{\sim} R(\overline{\rho})$ pour $1 \leq i \leq r$ les automorphismes de $\mathfrak{O}$-algèbres correspondant au twist par $\chi_i$ sur la déformation universelle de $\overline{\rho}$. De tout ce qui précède, on déduit l'égalité suivante entre ensembles d'idéaux premiers de $R(\overline{\rho})$ :

$$\{\mathfrak{p} \text{ premier de type } (k, \tau \otimes \chi)\} = \coprod_{i=1}^{r} \{h_i(\mathfrak{p}),\ \mathfrak{p} \text{ premier de type } (k, \tau)\}.$$

Notons $I_i = \cap_{\mathfrak{p}} h_i(\mathfrak{p})$ et $R_i = R(\overline{\rho})/I_i \xrightarrow[\sim]{h_i^{-1}} R(k, \tau, \overline{\rho})$, comme $R(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho}) = R(\overline{\rho})/\cap_i I_i$, on a une injection de $\mathfrak{O}$-algèbres $R(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho}) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r R_i$. Supposons vraies les conjectures pour $\tau$. Par le (iii) de la conjecture 2.2.2.4, le noyau de tout morphisme $R(\overline{\rho}) \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ se factorisant par $R_i$ est de la forme $h_i(\mathfrak{p})$ avec $\mathfrak{p}$ de type $(k, \tau)$. On en déduit $(R(\overline{\rho})/(I_i + I_j))(\overline{\mathbf{Z}}_p) = \emptyset$ si $i \neq j$ : en effet, s'il existe un morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R(\overline{\rho}) \to R(\overline{\rho})/(I_i + I_j) \to \overline{\mathbf{Z}}_p$, son noyau est de la forme $h_i(\mathfrak{p}) = h_j(\mathfrak{q})$ avec $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ de type $(k, \tau)$ ce qui est exclus par ce qui précède. Par le lemme 5.1.1, $I_i[\frac{1}{p}] + I_j[\frac{1}{p}] = R(\overline{\rho})[\frac{1}{p}]$ d'où $R(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho})[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r R_i[\frac{1}{p}]$ par le "lemme chinois" ([Mat],th.1.3 et 1.4). On en déduit aisément les (i) et (ii) de la conjecture 2.2.2.4 pour $\tau \otimes \chi$ à partir de leurs analogues pour $\tau$ en remarquant que tous les $R_i$ sont isomorphes à $R(k, \tau, \overline{\rho})$. Par le lemme 5.1.2, on a aussi $\coprod_{i=1}^r R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p) \xrightarrow{\sim} R(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho})(\overline{\mathbf{Z}}_p)$. Cela entraîne que tout élément de $R(\overline{\rho})(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ se factorisant par $R(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho})$ se factorise aussi par un $R_i$, donc a pour noyau un idéal premier de la forme $h_i(\mathfrak{p})$ avec $\mathfrak{p}$ de type $(k, \tau)$ i.e. un idéal premier de type $(k, \tau \otimes \chi)$. Du lemme 5.1.6, on déduit encore :

$$\begin{aligned} \mu_{gal}(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho}) &= r \cdot \mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) \\ &= \#\det(\tau \otimes \chi)(I_p^{sauv}) \cdot \mu_{aut}(k, \tau, \overline{\rho}) \\ &= \#\det(\tau \otimes \chi)(I_p^{sauv}) \cdot \mu_{aut}(k, \tau \otimes \chi, \overline{\rho}). \end{aligned}$$

Les deux conjectures sont donc vraies pour $\tau \otimes \chi$. $\square$

**Corollaire 2.3.2.3.** *Il suffit de montrer les conjectures 2.2.2.4 et 2.3.1.1 pour les $\tau$ tels que* $\det(\tau)$ *est modéré.*

*Démonstration.* Soit $\tau$ un type galoisien de degré 2 quelconque. Il est facile de voir qu'il peut s'écrire $\tau = \tau' \otimes \chi$ où $\chi$ est un $p$-type de degré 1 et $\tau'$ un type de degré 2 tel que $\det(\tau')$ est modéré. Par la proposition 2.3.2.2, il suffit de montrer les conjectures pour $\tau'$. $\square$

2.3.3. Donnons tout de suite l'exemple le plus simple, celui où $k = 2$ et $\tau = triv$ (la représentation triviale de dimension 2). D'après le §2.1.1, $\sigma(\tau) = St = \sigma(2, triv)$ et donc $\overline{\sigma(2, triv)}^{ss} = \sigma_{p-1,0}$. Rappelons ce que donne la règle d'admission dans ce cas (cf. §2.1.2) :
(i) $\mu_{aut}(2, triv, \overline{\rho}) = 1$ si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié ou si $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta) \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ et $\alpha \neq \beta$ ou si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix}$,
(ii) $\mu_{aut}(2, triv, \overline{\rho}) = 2$ si $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ et $*$ peu ramifié,
(iii) $\mu_{aut}(2, triv, \overline{\rho}) = 0$ sinon.
Par ailleurs un calcul (facile) de réseaux dans les représentations semi-stables de $G_p$ de dimension 2 à poids de Hodge-Tate $(0, 1)$ fournit le résultat (cf. théorème 5.3.1 (i)) :
(i) $R(2, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \simeq \mathfrak{O}[[X]]$, donc $\mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho}) = 1$, si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié ou si $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta) \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ et $\alpha \neq \beta$ ou si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix}$,
(ii) $R(2, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \sim \mathfrak{O}[[X]] \times \mathfrak{O}[[X]]$ (voir l'introduction ou la définition 5.1.3 pour la notation $\sim$), d'où $\mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho}) = 1 + 1 = 2$ par le lemme 5.1.6, si $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ et $*$ peu ramifié,
(iii) $R(2, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} = 0$, donc $\mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho}) = 0$, sinon.
On a bien dans chaque cas $\mu_{aut}(2, triv, \overline{\rho}) = \mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho})$. Nous allons voir par la suite que la règle d'admission du §2.1.2 fournit encore cette même formule en poids pairs supérieurs.

## 3. Préliminaires sur les modules filtrés à coefficients

La théorie des modules de Dieudonné filtrés (resp. des modules fortement divisibles) est en général présentée dans la littérature lorsque les représentations galoisiennes potentiellement semi-stables correspondantes (resp. leurs réseaux préservés par Galois) sont à coefficients seulement dans $\mathbf{Q}_p$ (resp. $\mathbf{Z}_p$) (e.g. [Fo1], [FM]§II, [Br2], etc...). Or la présence de coefficients est essentielle lorsque l'on travaille avec des formes ou des représentations automorphes, mais source de complications techniques du côté modules filtrés. Dans la suite, après avoir rappelé quelques résultats élémentaires sur les modules filtrés avec coefficients généraux, nous nous restreignons pour limiter ces complications (et vu notre objectif principal) à ceux provenant des représentations semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$.

3.1. **Modules filtrés faiblement admissibles à coefficients.** On commence par le cas général. On renvoie à [Fo3],§3 et §4.2 pour la définition de $B_{st}^+$ et $B_{st}$.

3.1.1. Soient $F$ et $E$ des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $F_0$ la plus grande extension non ramifiée contenue dans $F$. Appelons $(\varphi, N, F, E)$-module filtré la donnée d'un $F_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-module libre de rang fini $D$ muni d'un automorphisme $F_0$-semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur $F_0$) et $E$-linéaire $\varphi$, d'un endomorphisme nilpotent $F_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-linéaire $N$ tel que $N\varphi = p\varphi N$ et, après extension des scalaires à $F$, d'une filtration décroissante par des sous-$F \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-modules $Fil^i(F \otimes_{F_0} D)$ (pas forcément libres, cf. remarque 3.1.1.4) nuls pour $i \gg 0$ et égaux à $F \otimes_{F_0} D$ pour $i \ll 0$. Tout $(\varphi, N, F, E)$-module filtré est aussi un $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-module filtré en oubliant sa structure de $E$-espace vectoriel.

Soit $D$ un $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-module filtré. Pour tout entier $d$, $\Lambda^d_{F_0} D$ est un $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-module filtré de manière évidente (cf. [Fo2],§4.3). Si $d = \dim_{F_0} D$, $\Lambda^d_{F_0} D$ est de dimension 1 sur $F_0$. Notons $t_H(D)$ le plus grand $i$ tel que $Fil^i(F \otimes_{F_0} \Lambda^d_{F_0} D) \neq 0$ et $t_N(D) = \mathrm{val}_p(\varphi(x)/x)$ où $x$ est un élément quelconque non nul de $\Lambda^d_{F_0} D$ et $\varphi(x)/x \in F_0^\times$.

**Définition 3.1.1.1.** *([Fo2],§4.4) (i) Soit $D$ un $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-module filtré. On dit que $D$ est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous-$F_0$-espace vectoriel $D'$ de $D$ stable par $\varphi$ et $N$, on a $t_H(D') \leq t_N(D')$ où $F \otimes_{F_0} D'$ est muni de la filtration induite par $F \otimes_{F_0} D$.*
*(ii) Soit $D$ est un $(\varphi, N, F, E)$-module filtré. On dit que $D$ est faiblement admissible si le $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-module filtré sous-jacent est faiblement admissible.*

A tout $(\varphi, N, F, E)$-module filtré $D$, on associe :

$$V_{st}(D) = (B_{st} \otimes_{F_0} D)^{\varphi=1}_{N=0} \bigcap Fil^0\big(B_{dR} \otimes_F (F \otimes_{F_0} D)\big)$$

où $\varphi$ sur $B_{st} \otimes_{F_0} D$ est défini comme $\varphi \otimes \varphi$, $N$ comme $N \otimes Id + Id \otimes N$, où $Fil^0$ est la filtration "produit tensoriel sur $F$" et où ${}^{\varphi=1}_{N=0}$ signifie qu'on considère les éléments $x \in B_{st} \otimes D$ tels que $\varphi(x) = x$ et $N(x) = 0$ (remarquons que $B_{st}$ muni de $\varphi$, $N$ et vu comme sous-anneau de $B_{dR}$ dépend du choix d'une uniformisante sur $F$, cf. [Fo2],§5.1.2). On voit que $V_{st}(D)$ est une représentation $E$-linéaire de $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ via son action sur $B_{st}$. Par [Fo2],th.5.3.5 et [CF], le foncteur $D \mapsto V_{st}(D)$ est une équivalence de catégories entre les $(\varphi, N, F, E)$-modules filtrés faiblement admissibles et les représentations $p$-adiques semi-stables de $G_F$ à coefficients dans $E$. Certains cas importants de cette équivalence, en particulier tous ceux du §4, étaient déjà connus avant ([FL],[Br4]). Soit $k$ un entier $\geq 1$, $D$ un $(\varphi, N, F, E)$-module filtré et posons :

$$V_{st,k}(D) = (B_{st} \otimes_{F_0} D)^{\varphi=p^{k-1}}_{N=0} \bigcap Fil^{k-1}\big(B_{dR} \otimes_F (F \otimes_{F_0} D)\big). \tag{1}$$

C'est encore une représentation $E$-linéaire de $G_F$.

**Lemme 3.1.1.2.** *Pour tout $(\varphi, N, F, E)$-module filtré $D$, on a un isomorphisme de $E[G_F]$-modules : $V_{st,k}(D) \simeq V_{st}(D)(k-1)$.*

*Démonstration.* On passe d'un élément de $V_{st}(D)$ (resp. $V_{st,k}(D)$) à un élément de $V_{st,k}(D)$ (resp. $V_{st}(D)$) en multipliant (resp. divisant) par $t^{k-1}$ où $t$ est un générateur de $\mathbf{Z}_p(1)$ dans $B_{st}$. Le résultat s'en déduit facilement. □

Du résultat de [CF], du lemme 3.1.1.2 et en se souvenant que les poids de Hodge-Tate (cf. §2.2.1) de $V_{st}(D)$ sont les opposés des entiers $i$ tels que $Fil^i(F\otimes_{F_0}D) \neq Fil^{i+1}(F\otimes_{F_0}D)$ (cf. [Fo2],th.3.8), on déduit aisément :

**Corollaire 3.1.1.3.** *Le foncteur $D \mapsto V_{st,k}(D)$ est une équivalence de catégories entre les $(\varphi, N, F, E)$-modules filtrés faiblement admissibles $D$ tels que $Fil^0(F\otimes_{F_0}D) = F\otimes_{F_0}D$ et $Fil^k(F\otimes_{F_0}D) = 0$ et les représentations $p$-adiques semi-stables de $G_F$ à coefficients dans $E$ et à poids de Hodge-Tate dans $\{0, ..., k-1\}$.*

**Remarque 3.1.1.4.** Soit $D$ un $(\varphi, N, F, E)$-module filtré faiblement admissible. Il n'est pas vrai en général que les $Fil^i(F\otimes_{F_0}D)$ sont des $F\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-modules libres. Voici un contre-exemple élémentaire où le $(\varphi, N, F, E)$-module filtré est libre de rang 1 sur $F_0\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$ (on suppose $p$ non congru à 1 modulo 4) :

$$\begin{aligned}
E = F = F_0 &= \mathbf{Q}_{p^2} = \mathbf{Q}_p(\sqrt{-1})\\
D &= F_0\otimes_{\mathbf{Q}_p}E\cdot e\\
\varphi(e) &= \Big(\frac{p+1}{2}\otimes 1 + \frac{p-1}{2}\sqrt{-1}\otimes\sqrt{-1}\Big)\cdot e\\
N(e) &= 0\\
Fil^iD &= D \text{ si } i\leq 0\\
Fil^1D &= F_0\otimes_{\mathbf{Q}_p}E\cdot\big[(1\otimes 1+\sqrt{-1}\otimes\sqrt{-1})\cdot e\big]\\
Fil^iD &= 0 \text{ si } i\geq 2.
\end{aligned}$$

**Proposition 3.1.1.5.** *Soit $D$ un $(\varphi, N, F, E)$-module filtré. Alors $D$ est faiblement admissible si et seulement si $t_H(D) = t_N(D)$ et pour tout sous-$F_0\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-module $D'$ de $D$ stable par $\varphi$ et $N$, on a $t_H(D')\leq t_N(D')$ où $F\otimes_{F_0}D'$ est muni de la filtration induite.*

*Démonstration.* Notons qu'un tel $D'$ est en particulier un $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-module filtré de sorte que l'assertion a bien un sens. La condition étant évidemment nécessaire, le point est de montrer qu'il suffit d'avoir $t_H(D')\leq t_N(D')$ pour les sous-$F_0\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-modules $D'$ de $D$ stables par $\varphi$ et $N$ pour en déduire la même chose pour les sous-$F_0$-espaces vectoriels stables par $\varphi$ et $N$ (mais pas forcément par l'action de $E$). La preuve est essentiellement la même que celle de [Fo2],prop.4.4.9 mais pour la commodité du lecteur, nous la donnons en entier. Remarquons d'abord que la catégorie des $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-modules filtrés tels que tout sous-$F_0$-espace vectoriel stable par $\varphi, N$ (avec filtration induite) vérifie l'inégalité $t_H\leq t_N$ est stable par somme directe (exercice). Supposons l'énoncé faux et soit $D'$ un contre-exemple de dimension minimale sur $F_0$ i.e. un sous-$F_0$-espace vectoriel de $D$ stable par $\varphi$, $N$ tel que $t_H(D') > t_N(D')$ et $t_H(D'')\leq t_N(D'')$ pour tout sous-$F_0$-espace vectoriel $D''\subsetneq D'$ stable par $\varphi$, $N$. Soient $d = [E:\mathbf{Q}_p]$, $x$ un élément primitif de $E$ sur $\mathbf{Q}_p$ et $D'_{sat} = \sum_{i=0}^{d-1}x^iD'\subset D$ : c'est un sous-$F_0\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-module de $D$ stable par $\varphi$, $N$ d'où $t_H(D'_{sat})\leq t_N(D'_{sat})$. Soient $i_1, ..., i_r\in\{0, ..., d-1\}$ tels que $D'_{sat} = \sum_{j=1}^{r}x^{i_j}D'$ avec $r$ minimal. Notons $D_1$ le noyau de $\oplus_{j=1}^{r}x^{i_j}D'\to D'_{sat}$ (avec $F\otimes_{F_0}D_1$ muni de la filtration induite) et $D_2 = (\oplus_{j=1}^{r}x^{i_j}D')/D_1$ avec $F\otimes_{F_0}D_2$ muni de la filtration quotient. Remarquons que $D_2 \simeq D'_{sat}$ si l'on oublie la filtration mais $Fil^i(F \otimes_{F_0} D_2) \hookrightarrow Fil^i(F \otimes_{F_0} D'_{sat})$, de sorte que $t_H(D_2) \leq t_H(D'_{sat}) \leq t_N(D'_{sat}) = t_N(D_2)$. Soit $D'_j$ l'image de $D_1$ dans $x^{i_j}D'$ (via la projection sur $x^{i_j}D'$) et munissons $F \otimes_{F_0} D'_j$ de la filtration induite par $F \otimes_{F_0} x^{i_j}D'$. On a $D'_j \subsetneq x^{i_j}D'$ sinon $r$ ne serait plus minimal puisqu'on pourrait se passer de $x^{i_j}D'$. Comme la multiplication par $x^{i_j} : D' \xrightarrow{\sim} x^{i_j}D'$ est un isomorphisme de $(\varphi, N, F, \mathbf{Q}_p)$-modules filtrés, on en déduit que tous les sous-$F_0$-espaces vectoriels de $D'_j$ stables par $\varphi, N$ (avec filtration induite) vérifient l'inégalité $t_H \leq t_N$, donc il en est de même pour $\oplus_{j=1}^r x^{i_j}D'_j$ ce qui entraîne $t_H(D_1) \leq t_N(D_1)$. Les propriétés d'additivité de $t_H$ et $t_N$ impliquent d'une part $t_H(\oplus_{j=1}^r x^{i_j}D') = t_H(D_1) + t_H(D_2) \leq t_N(D_1) + t_N(D_2)$ et d'autre part $t_H(\oplus_{j=1}^r x^{i_j}D') = rt_H(D') > rt_N(D') = t_N(\oplus_{j=1}^r x^{i_j}D') = t_N(D_1) + t_N(D_2)$

ce qui est absurde. $\square$

L'avantage de cette proposition est qu'il y a en général moins de sous-$F_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-modules stables par $\varphi$ et $N$ que de sous-$F_0$-espaces vectoriels stables par $\varphi$ et $N$...

3.1.2. Considérons maintenant le cas des représentations semi-stables de $G_p$, i.e. le cas $F = F_0 = \mathbf{Q}_p$. Un $(\varphi, N, \mathbf{Q}_p, E)$-module filtré est simplement la donnée d'un $E$-espace vectoriel de dimension finie $D$ muni d'un automorphisme $E$-linéaire $\varphi$, d'un endomorphisme nilpotent $E$-linéaire $N$ tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une filtration décroissante par des sous-$E$-espaces vectoriels $Fil^iD$ nuls pour $i \gg 0$ et égaux à $D$ pour $i \ll 0$. Si $D$ est un $(\varphi, N, \mathbf{Q}_p, E)$-module filtré, il en est de même de $\Lambda_E^d D$ pour tout entier $d$ non nul et on note $t_H^E(D)$ le plus grand $i$ tel que $Fil^i(\Lambda_E^{\dim_E D} D) \neq 0$ et $t_N^E(D) = \mathrm{val}_p(\varphi(x)/x)$ où $x$ est un élément quelconque non nul de $\Lambda_E^{\dim_E D} D$ et $\varphi(x)/x \in E^\times$.

**Corollaire 3.1.2.1.** *(i) Soit $D$ un $(\varphi, N, \mathbf{Q}_p, E)$-module filtré. Alors $D$ est faiblement admissible si et seulement si $t_H^E(D) = t_N^E(D)$ et pour tout sous-$E$-espace vectoriel $D'$ de $D$ stable par $\varphi$, $N$ et muni de la filtration induite, on a $t_H^E(D') \leq t_N^E(D')$.*
*(ii) Le foncteur $D \mapsto V_{st,k}(D) = Fil^{k-1}(B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D)_{N=0}^{\varphi = p^{k-1}}$ est une équivalence de catégories entre les $(\varphi, N, \mathbf{Q}_p, E)$-modules filtrés faiblement admissibles $D$ tels que $Fil^0D = D$ et $Fil^kD = 0$ et les représentations $p$-adiques semi-stables de $G_p$ à coefficients dans $E$ et à poids de Hodge-Tate dans $\{0, ..., k-1\}$.*

*Démonstration.* (i) découle de la proposition 3.1.1.5 et des formules $t_H^E = [E : \mathbf{Q}_p]t_H$ et $t_N^E = [E : \mathbf{Q}_p]t_N$. (ii) est un cas particulier du corollaire 3.1.1.3. $\square$

**Exemple 3.1.2.2.** Donnons l'exemple des représentations semi-stables de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique, on se ramène au cas où les poids de Hodge-Tate sont $(0, k-1)$ (pour un entier $k \geq 1$). Les modules filtrés faiblement admissibles auxquels ces représentations correspondent par le foncteur $V_{st,k}$ sont tous de la forme $D = \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \oplus \overline{\mathbf{Q}}_p e_2$ avec $Fil^iD = D$ pour $i \leq 0$, $Fil^{k-1}D \neq 0$ et $Fil^iD = 0$ pour $i \geq k$ où $k$ est un entier $> 0$. Si $k = 1$, alors $N = 0$ et, quitte à changer de base, $\varphi$ s'écrit de manière unique soit $\varphi(e_1) = \mu e_1$, $\varphi(e_2) = \mu e_2$ avec $\mu \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$, soit $\varphi(e_1) = \mu_1 e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = \mu_2 e_2$ avec $\mu_1, \mu_2 \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$. Si $k \geq 2$, alors $Fil^1D = ... = Fil^{k-1}D$ est une droite et, après changement de base, on a les possibilités suivantes deux à deux non isomorphes :

(i) $N=0$ et représentation scindée

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & = & p^{k-1}\mu_1 e_1 \\ \varphi(e_2) & = & \mu_2 e_2 \\ Fil^{k-1}D & = & \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \\ \mu_1,\mu_2 & \in & \overline{\mathbf{Z}}_p^{\times} \end{array}\right.$$

(ii) $N=0$ et représentation réductible non scindée

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & = & p^{k-1}(\mu_1 e_1+e_2) \\ \varphi(e_2) & = & \mu_2 e_2 \\ Fil^{k-1}D & = & \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \\ \mu_1,\mu_2 & \in & \overline{\mathbf{Z}}_p^{\times} \end{array}\right.$$

(iii) $N=0$ et représentation irréductible

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & = & p^{k-1}\mu e_2 \\ \varphi(e_2) & = & -e_1+\nu e_2 \\ Fil^{k-1}D & = & \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \\ \mu & \in & \overline{\mathbf{Z}}_p^{\times} \\ \nu & \in & \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p} \end{array}\right.$$

(iv) $N\neq 0$. Fixons $\pi\in\overline{\mathbf{Z}}_p$ tel que $\pi^2=p$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & = & \pi^k\mu e_1 \\ \varphi(e_2) & = & \pi^{k-2}\mu e_2 \\ Fil^{k-1}D & = & \overline{\mathbf{Q}}_p(e_1+\mathfrak{L}e_2) \\ N(e_1) & = & e_2 \\ N(e_2) & = & 0 \\ \mu & \in & \overline{\mathbf{Z}}_p^{\times} \\ \mathfrak{L} & \in & \overline{\mathbf{Q}}_p \end{array}\right.$$

Nous omettons la preuve. Le lecteur peut l'extrapoler à partir du corollaire 3.1.2.1, de [FM],Th.A et de [Br2],§6.1.1. Dans la suite, on note $D=D(\mu_1,\mu_2)$, $(\mu_1,\mu_2)\in\overline{\mathbf{Z}}_p^{\times}\times\overline{\mathbf{Z}}_p^{\times}$, si $D$ provient du (i) ou du (ii) (sans distinction des deux cas), $D=D(\mu,\nu)$, $(\mu,\nu)\in\overline{\mathbf{Z}}_p^{\times}\times\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$, si $D$ provient du (iii) et $D=D(\mu,\mathfrak{L})$, $(\mu,\mathfrak{L})\in\overline{\mathbf{Z}}_p^{\times}\times\overline{\mathbf{Q}}_p$, si $D$ provient du (iv).

3.2. **Certains modules fortement divisibles à coefficients.** Notre intention n'est pas de développer ici une théorie systématique des modules fortement divisibles avec coefficients mais seulement d'introduire le strict nécessaire pour nos besoins (cf. §5.2). On fixe $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et on note $\mathbf{F}$ son corps résiduel. On fixe également un entier $k\in\{1,...,p-1\}$. Pour utiliser $B_{st}$ et $\widehat{A_{st}}$, on a besoin de choisir une uniformisante de $\mathbf{Q}_p$ : on prend $p$. Nous ne rappelons pas ici la construction de $\widehat{A_{st}}$ mais renvoyons le lecteur à [Br1],§2 ou [Br2],§3.1.1 ou [Br4],§2.2.2.

3.2.1. On fixe $R$ une $\mathfrak{O}$-algèbre plate locale noethérienne complète pour la topologie de son idéal maximal $\mathfrak{m}_R$ de corps résiduel $\mathbf{F}$. Soit $S_R$ le complété $\mathfrak{m}_R$-adique de l'algèbre des polynômes à puissances divisées en $u$ et coefficients dans $R$. En clair :

$$S_R = \widehat{R<u>} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^j}{j!}, r_j \in R, r_j \to 0 \text{ dans } R \text{ quand } j \to +\infty \right\}.$$

On munit $S_R$ d'une filtration positive décroissante par des sous-$S_R$-modules $Fil^i S_R$ ($i$ entier), d'un opérateur de Frobenius $\varphi$ et d'une dérivation $R$-lineaire $N$ en posant :

$$\begin{aligned} Fil^i S_R &= \left\{ \sum_{j=i}^{\infty} r_j \frac{(u-p)^j}{j!}, r_j \in R, r_j \to 0 \text{ quand } j \to +\infty \right\}, \\ \varphi\Big( \sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^j}{j!} \Big) &= \sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^{jp}}{j!}, \\ N\Big( \sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^j}{j!} \Big) &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j r_j \frac{u^j}{(j-1)!}. \end{aligned}$$

On pourrait se dispenser des signes qui apparaissent dans la formule définissant $N$, mais nous préférons garder les conventions de [Br2] (ces signes ont une origine "syntomique" !). Les relations entre ces structures sont $N\varphi = p\varphi N$, $N(Fil^i S_R) \subset Fil^{i-1} S_R$ (pour tout $i$) et $\varphi(Fil^i S_R) \subset p^i S_R$ pour $i \leq p-1$. On remarque que $\varphi((u-p)^i) \in p^i S_R^{\times}$ ($0 \leq i \leq p-1$). Si $I$ est un idéal de $R$, notons que $IS_R = \{\sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^j}{j!}, r_j \in I, r_j \to 0 \text{ quand } j \to +\infty\}$ par le lemme d'Artin-Rees ([Mat],th.8.5).

**Définition 3.2.1.1.** *On appelle $R$-module fortement divisible la donnée d'un $S_R$-module $\mathcal{M}$ libre de type fini muni d'un sous-$S_R$-module $Fil^{k-1}\mathcal{M}$ et d'endomorphismes $\varphi, N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, ces données étant assujetties aux conditions suivantes :*
*(i) $Fil^{k-1}\mathcal{M}$ contient $Fil^{k-1}S_R\mathcal{M}$,*
*(ii) $Fil^{k-1}\mathcal{M} \cap I\mathcal{M} = IFil^{k-1}\mathcal{M}$ pour tout idéal $I$ de $R$,*
*(iii) $\varphi(sx) = \varphi(s)\varphi(x)$ où $s \in S_R$, $x \in \mathcal{M}$,*
*(iv) $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M})$ est contenu dans $p^{k-1}\mathcal{M}$ et l'engendre sur $S_R$,*
*(v) $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ où $s \in S_R$, $x \in \mathcal{M}$,*
*(vi) $N\varphi = p\varphi N$,*
*(vii) $Fil^1 S_R N(Fil^{k-1}\mathcal{M}) \subset Fil^{k-1}\mathcal{M}$.*

Si $\mathcal{M}$ est un $R$-module fortement divisible alors $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est automatiquement injectif (regarder sur $\mathcal{M}[1/p]$).

**Exemple 3.2.1.2.** (i) Soit $M$ un $\mathbf{Z}_p$-module fortement divisible de Fontaine-Laffaille ([FL],déf.7.7) qu'on suppose muni d'une action de $\mathfrak{O}$ (de sorte que $M$ est aussi un $\mathfrak{O}$-module libre) et d'un endomorphisme $\mathfrak{O}$-linéaire $N$ tel que $N(Fil^i M) \subset Fil^{i-1}M$ et $N\varphi = p\varphi N$, alors :

$$\begin{aligned} \Big( \mathcal{M} = M \otimes_{\mathfrak{O}} S_R, Fil^{k-1}\mathcal{M} = \sum\nolimits_{i=0}^{k-1} Fil^i M \otimes Fil^{k-1-i} S_R, \varphi &= \sum\nolimits_{i=0}^{k-1} p^i \varphi_i \otimes \varphi, \\ N &= N \otimes Id + Id \otimes N \Big) \end{aligned}$$

est un $R$-module fortement divisible.
(ii) Soient $h \in \{0, ..., k-1\}$ et $r \in R^\times$, alors :

$$\big(\mathcal{M} = S_R e_1, Fil^{k-1}\mathcal{M} = (Fil^{k-1}S_R)e_1 + S_R(u-p)^h e_1, \varphi(e_1) = p^{k-1-h} r e_1, N(e_1) = 0\big)$$

est un $R$-module fortement divisible de rang 1. Si $R$ est intègre, tous les $R$-modules fortement divisibles de rang 1 sont de cette forme.
(iii) On verra des exemples de $R$-modules fortement divisibles de rang 2 non triviaux aux §4 et §5.

Rappelons qu'un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ de [Br2],§2.1.2 est la donnée d'un quadruple $(\mathcal{N}, Fil^{k-1}\mathcal{N}, \varphi_{k-1}, N)$ où :
(i) $\mathcal{N}$ est un $S_{\mathbf{Z}_p}$-module de la forme $\oplus_{n\in\mathbf{Z}_{>0}}(S_{\mathbf{Z}_p}/p^n S_{\mathbf{Z}_p})^{r_n}$ pour des entiers $r_n$ presque tous nuls,
(ii) $Fil^{k-1}\mathcal{N}$ est un sous-$S_{\mathbf{Z}_p}$-module de $\mathcal{N}$ contenant $Fil^{k-1}S_{\mathbf{Z}_p}\mathcal{N}$,
(iii) $\varphi_{k-1} : Fil^{k-1}\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est une application additive dont l'image engendre $\mathcal{N}$ et satisfaisant $\varphi_{k-1}(sx) = \varphi(s)\varphi_{k-1}(x)$ ($s \in S_{\mathbf{Z}_p}$, $x \in Fil^{k-1}\mathcal{N}$) et :

$$\varphi_{k-1}(sx) = \frac{\frac{\varphi}{p^{k-1}}(s)}{\frac{\varphi}{p^{k-1}}((u-p)^{k-1})}\varphi_{k-1}((u-p)^{k-1}x)$$

($s \in Fil^{k-1}S_{\mathbf{Z}_p}$, $x \in \mathcal{N}$),
(iv) $N : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est une application additive satisfaisant $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ ($s \in S_{\mathbf{Z}_p}$, $x \in \mathcal{N}$), $Fil^1 S_{\mathbf{Z}_p} N(Fil^{k-1}\mathcal{N}) \subset Fil^{k-1}\mathcal{N}$ et :

$$\varphi_{k-1} \circ ((u-p)N|_{Fil^{k-1}}) = \Big(\frac{u^p}{p} - 1\Big)N \circ \varphi_{k-1}.$$

Un morphisme entre deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ est une application $S_{\mathbf{Z}_p}$-linéaire qui préserve $Fil^{k-1}$ et commute avec $\varphi_{k-1}$ et $N$. Soit $I$ un idéal de $R$ contenant une puissance de $\mathfrak{m}_R^n$ (de sorte que $R/I$ est un $\mathbf{Z}_p$-module de longueur finie). Par définition, on appelle objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$ tout objet $\mathcal{N}$ de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'un morphisme d'algèbres $R/I \to \mathrm{End}_{\underline{\mathcal{M}}^{k-1}}(\mathcal{N})$. En particulier $\mathcal{N}$ est alors un $S_R/IS_R$-module. Pour tout idéal $I$ de $R$ et tout $R$-module fortement divisible $\mathcal{M}$, on définit $Fil^{k-1}(\mathcal{M}/I\mathcal{M}) = Fil^{k-1}(\mathcal{M})/IFil^{k-1}(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{M}/I\mathcal{M}$, $\varphi_{k-1} : Fil^{k-1}(\mathcal{M}/I\mathcal{M}) \to \mathcal{M}/I\mathcal{M}$ la réduction modulo $I$ de $\frac{\varphi}{p^{k-1}}|_{Fil^{k-1}\mathcal{M}}$ et $\varphi, N$ la réduction modulo $I$ de $\varphi, N$. Si $R/I$ est plat sur $\mathfrak{O}$, alors $\mathcal{M}/I\mathcal{M}$ muni de $Fil^{k-1}(\mathcal{M}/I\mathcal{M})$,$\varphi$,$N$ est un $R/I$-module fortement divisible. Si $R/I$ est artinien, alors $\mathcal{M}/I\mathcal{M}$ muni de $Fil^{k-1}(\mathcal{M}/I\mathcal{M}), \varphi_{k-1}, N$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$.

**Lemme 3.2.1.3.** *Soient $I$ un idéal de $R$ contenant $\mathfrak{m}_R^n$ pour $n \gg 0$, $R'$ une $\mathfrak{O}$-algèbre locale artinienne de corps résiduel une extension finie de $\mathbf{F}$, $R/I \to R'$ un morphisme local de $\mathfrak{O}$-algèbres et $\mathcal{N}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$. Alors $\mathcal{N} \otimes_{R/I} R'$ a naturellement une structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R'$ tel que l'application canonique $\mathcal{N} \to \mathcal{N} \otimes_{R/I} R'$ est un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$.*

*Démonstration.* La structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ qu'on veut sur $\mathcal{N} \otimes_{R/I} R'$ est la suivante :

$$\Big(\mathcal{N} \otimes_{R/I} R', (Fil^{k-1}\mathcal{N}) \otimes_{R/I} R', \varphi_{k-1} \otimes 1, N \otimes 1\Big)$$

mais il faut montrer qu'elle est bien définie. C'est clair si $R'$ est un $R/I$-module libre de rang fini puisqu'alors $\mathcal{N} \otimes_{R/I} R'$ est une somme directe de copies de $\mathcal{N}$. En général, $R'$ peut toujours s'écrire comme un quotient d'une $R/I$-algèbre qui est libre de rang fini en tant que $R/I$-module (voir la preuve de 3.2.2.2). On est donc ramené au cas $R/I \to R'$ surjectif par ce qui précède, i.e. au cas où on quotiente $\mathcal{N}$ par un idéal $I'$ de $R/I$. Soit $i'_1, \cdots, i'_r$ des générateurs de $I'$ sur $R/I$ et considérons le morphisme $f$ dans $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ : $\mathcal{N}^r \to \mathcal{N}$, $f(x_1 \oplus \cdots \oplus x_r) = i'_1 x_1 + \cdots + i'_r x_r$ dont l'image est $I'\mathcal{N}$. Par [Br2],prop.2.3.2.2, on a $f(Fil^{k-1}\mathcal{N}^r) = Fil^{k-1}\mathcal{N} \cap f(\mathcal{N}^r)$ i.e. $I'Fil^{k-1}\mathcal{N} = (Fil^{k-1}\mathcal{N}) \cap I'\mathcal{N}$, d'où on obtient aisément le résultat. $\square$

**Remarque 3.2.1.4.** Soit $R'$ une $\mathfrak{O}$-algèbre plate locale noethérienne complète de corps résiduel une extension finie de $\mathbf{F}$, $R \to R'$ un morphisme local de $\mathfrak{O}$-algèbres et $\mathcal{M}$ un $R$-module fortement divisible. En utilisant le lemme précédent et un passage à la limite convenable, on peut montrer que $\mathcal{M} \otimes_R R'$ muni de $\varphi \otimes 1$, $N \otimes 1$ et de l'image de $Fil^{k-1}\mathcal{M} \otimes_R R'$ est toujours un $R'$-module fortement divisible (la seule condition non triviale dans la définition 3.2.1.1 est la condition (ii)). On l'a vu lorsque $R \to R'$ est surjectif, qui est le seul cas que nous utilisons vraiment par la suite.

3.2.2. On rappelle que dans [Br2],§3.1.3 est défini un foncteur contravariant, exact et pleinement fidèle $V_{st}$ de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ dans la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules de longueur finie munis d'une action linéaire continue de $G_p$ de la manière suivante :

$$V_{st}(\mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{(Fil^{k-1}, \varphi_{k-1}, N)}(\mathcal{N}, \widehat{A_{st}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$$

où l'indice ${}_{(Fil^{k-1}, \varphi_{k-1}, N)}$ signifie qu'on considère les applications $S_{\mathbf{Z}_p}$-linéaires qui préservent $Fil^{k-1}$ et commutent à $\varphi_{k-1}$ et $N$. Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$, on pose :

$$T_{st,k}(\mathcal{N}) = V_{st}(\mathcal{N})^\wedge(k-1)$$

où l'exposant $^\wedge$ signifie qu'on prend le dual en tant que $\mathbf{Z}_p$-module dans $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et où on tord par le caractère cyclotomique à la puissance $k-1$. Pour tout idéal $I$ de $R$ contenant $\mathfrak{m}_R^n$ pour $n \gg 0$ et pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$, on munit $T_{st,k}(\mathcal{N})$ d'une structure de $R/I$-module en posant $(\lambda \cdot F)(f) = F(\lambda \cdot f)$ où $F \in T_{st,k}(\mathcal{N})$, $f \in V_{st}(\mathcal{N})$, $\lambda \in R/I$ et $(\lambda \cdot f)(x) = f(\lambda x)$ si $x \in \mathcal{N}$. L'action de $G_p$ est alors bien sûr $R/I$-linéaire. L'avantage du foncteur $T_{st,k}$ sur le foncteur $V_{st}$ est sa covariance, ce qui facilite la vie en présence de coefficients (les coefficients ne sont en général pas "autoduaux", etc...).

**Lemme 3.2.2.1.** *Soit $I$ un idéal de $R$ contenant $\mathfrak{m}_R^n$ pour $n \gg 0$.*
*(i) Soit $\mathcal{N}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$ et $I'$ un idéal de $R$ contenant $I$, alors la flèche $T_{st,k}(\mathcal{N}) \to T_{st,k}(\mathcal{N}/I'\mathcal{N})$ est surjective.*
*(ii) Soit $\mathcal{N}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$ qui en fait un $S_R/IS_R$-module libre de rang $d$, alors le $R/I$-module $T_{st,k}(\mathcal{M}/I\mathcal{M})$ est libre de rang $d$.*
*(iii) Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ munis d'une action de $R/I$, alors :*

$$\mathrm{Hom}_{R,\underline{\mathcal{M}}^{k-1}}(\mathcal{N}, \mathcal{N}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R[G_p]}\big(T_{st,k}(\mathcal{N}), T_{st,k}(\mathcal{N}')\big)$$

*où l'indice à gauche signifie qu'on prend les morphismes dans $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ qui sont de plus $S_R$-linéaires.*

*Démonstration.* (i) se déduit de [Br2],prop.3.2.3.1 (notons que $\mathcal{N}/I'\mathcal{N}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I'$ par 3.2.1.3). Pour (ii), on fait une récurrence sur $\mathrm{long}_R R/I$. Si $I = \mathfrak{m}_R$, alors $T_{st,k}(\mathcal{N})$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $[\mathbf{F} : \mathbf{F}_p]d$ par [Br2],cor.3.2.3.2, donc un $\mathbf{F}$-espace vectoriel de dimension $d$. Si $I \subsetneq \mathfrak{m}_R$, soit $I'$ un idéal contenant strictement $I$ et tel que $I'/I \simeq \mathbf{F}\cdot\overline{x}$ pour un $x \in I'\backslash I$, d'après [Br2],prop.3.2.3.1 on a une suite exacte courte de $R[G_p]$-modules :

$$0 \to T_{st,k}(\mathcal{N}/\mathfrak{m}_R\mathcal{N}) \stackrel{\times x}{\to} T_{st,k}(\mathcal{N}) \to T_{st,k}(\mathcal{N}/I'\mathcal{N}) \to 0$$

où $T_{st,k}(\mathcal{N}/I'\mathcal{N})$ est libre de rang $d$ sur $R/I'$ par récurrence. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ des relevés dans $T_{st,k}(\mathcal{N})$ d'une base de $T_{st,k}(\mathcal{N}/I'\mathcal{N})$ sur $R/I'$, alors les $e_i$ sont linéairement indépendants sur $R/I$ et engendrent $T_{st,k}(\mathcal{N})$ d'où (ii). Pour (iii), d'après [Br2],cor.3.1.3.2, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{k-1}}(\mathcal{N},\mathcal{N}') \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G_p]}\big(T_{st,k}(\mathcal{N}), T_{st,k}(\mathcal{N}')\big)$$

et cet isomorphisme préserve la $R$-linéarité des flèches, d'où le résultat. $\square$

**Lemme 3.2.2.2.** *Soient $I$ un idéal de $R$ contenant $\mathfrak{m}_R^n$ pour $n \gg 0$, $R'$ une $\mathfrak{O}$-algèbre locale artinienne de corps résiduel une extension finie de $\mathbf{F}$, $R/I \to R'$ un morphisme local de $\mathfrak{O}$-algèbres et $\mathcal{N}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R/I$ qui en fait un $S_R/IS_R$-module libre de rang fini, alors :*

$$T_{st,k}(\mathcal{N}) \otimes_R R' \stackrel{\sim}{\to} T_{st,k}(\mathcal{N} \otimes_R R').$$

*Démonstration.* Par 3.2.1.3, $\mathcal{N} \otimes_{R/I} R'$ est bien un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $R'$. Supposons d'abord $R' \simeq R/I \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}' \simeq (R/I)^{[\mathfrak{O}':\mathfrak{O}]}$ où $\mathfrak{O}'$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $E$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de corps résiduel $\mathbf{F}' \supset \mathbf{F}$. Le résultat est alors clair puisque :

$$T_{st,k}(\mathcal{N}) \otimes_R R' \simeq T_{st,k}(\mathcal{N})^{[\mathfrak{O}':\mathfrak{O}]} \simeq T_{st,k}(\mathcal{N} \otimes_R R').$$

Traitons à présent le cas général. Soit $\mathbf{F}'$ le corps résiduel de $R'$, quitte à remplacer $R$ par $R \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}'$ avec $\mathfrak{O}' = \mathfrak{O} \otimes_{W(\mathbf{F})} W(\mathbf{F}')$, on peut supposer par ce qui précède que $R$ et $R'$ ont même corps résiduel. Comme $R'$ est fini sur $R/I$ car artinien, on peut l'écrire comme un quotient de $(R/I)[X_1, ..., X_h]/(X_1^{n_1}, ..., X_h^{n_h})$ pour certains entiers $h, n_1, ..., n_h$. Comme $(R/I)[X_1, ..., X_h]/(X_1^{n_1}, ..., X_h^{n_h})$ est libre de rang fini sur $R/I$, le même argument qu'avant permet de remplacer $R/I$ par $(R/I)[X_1, ..., X_h]/(X_1^{n_1}, ..., X_h^{n_h})$, i.e. de se ramener au cas où $R/I \to R'$ est surjectif. Le résultat découle alors des (i) et (ii) du lemme 3.2.2.1. $\square$

Si $\mathcal{M}$ est un $R$-module fortement divisible, on pose :

$$T_{st,k}(\mathcal{M}) = \varprojlim_n T_{st,k}(\mathcal{M}/\mathfrak{m}_R^n\mathcal{M}).$$

C'est naturellement un $R[G_p]$-module.

**Corollaire 3.2.2.3.** *(i) Soit $\mathcal{M}$ un $R$-module fortement divisible de rang $d$, alors le $R$-module $T_{st,k}(\mathcal{M})$ est libre de rang $d$, l'action de $G_p$ est continue pour la topologie $\mathfrak{m}_R$-adique et $T_{st,k}(\mathcal{M})/\mathfrak{m}_R^n \stackrel{\sim}{\to} T_{st,k}(\mathcal{M}/\mathfrak{m}_R^n\mathcal{M})$ $(n \in \mathbf{N})$.*
*(ii) Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux $R$-modules fortement divisibles, alors :*

$$\mathrm{Hom}_{(R,Fil^{k-1},\varphi,N)}(\mathcal{M},\mathcal{M}') \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{R[G_p]}(T_{st,k}(\mathcal{M}), T_{st,k}(\mathcal{M}'))$$

*où l'indice à gauche signifie qu'on prend les morphismes $S_R$-linéaires qui préservent $Fil^{k-1}$ et commutent à $\varphi$ et $N$.*

*(iii) Soient $\mathcal{M}$ un $R$-module fortement divisible, $R'$ une $\mathfrak{O}$-algèbre plate locale noethérienne complète de corps résiduel une extension finie de $\mathbf{F}$ et $R \to R'$ un morphisme local de $\mathfrak{O}$-algèbres, alors :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}) \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} T_{st,k}(\mathcal{M} \otimes_R R')$$

*où $T_{st,k}(\mathcal{M} \otimes_R R')$ est par définition $\varprojlim_n T_{st,k}\big((\mathcal{M}/\mathfrak{m}_R^n\mathcal{M}) \otimes R'/\mathfrak{m}_{R'}^n\big)$ (bien défini car $(\mathcal{M}/\mathfrak{m}_R^n\mathcal{M}) \otimes R'/\mathfrak{m}_{R'}^n$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ par 3.2.1.3).*

*Démonstration.* Se déduit des deux lemmes précédents par passage à la limite projective sur les $T_{st,k}(\mathcal{M}/\mathfrak{m}_R^n\mathcal{M})$. □

3.2.3. On suppose maintenant $R = \mathfrak{O}$ i.e. $R$ est l'anneau des entiers d'une extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible, d'après [Br2],§4.1.1 et [Br2],th.A.4, il existe un $(\varphi, N, \mathbf{Q}_p, E)$-module faiblement admissible $D$ tel que $Fil^0 D = D$ et $\mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{O}} E \xrightarrow{\sim} S_{\mathfrak{O}}[1/p] \otimes_E D$, cet isomorphisme étant $S_{\mathfrak{O}}[1/p]$-linéaire et compatible à toutes les structures, i.e. à $(Fil^{k-1},\ \varphi,\ N)$ en définissant à droite $\varphi = \varphi \otimes \varphi$, $N = N \otimes Id + Id \otimes N$ et $Fil^{k-1}$ par récurrence à partir de $Fil^0(S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D) = S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D$ et $Fil^{i+1}(S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D) = \{x \in S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D \mid N(x) \in Fil^i(S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D)$ et $f_p(x) \in Fil^{i+1}D\}$ où $f_p : S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D \to D$, $\sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^j}{j!} \otimes x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{p^j}{j!} x$.

**Lemme 3.2.3.1.** *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme de $E[G_p]$-modules : $T_{st,k}(\mathcal{M})[1/p] \xrightarrow{\sim} V_{st,k}(D)$.*

*Démonstration.* Soit $\pi$ une uniformisante de $\mathfrak{O}$, par [Br3],prop.3.2.1.7 et [Br1],lemme 8.1.2 (plus exactement la version avec $B_{st}^+$ de ce lemme, dont la preuve est encore plus simple), on a des isomorphismes de $E[G_p]$-modules :

$$\begin{aligned} T_{st,k}(\mathcal{M})\left[\frac{1}{p}\right] &\simeq \Big(\varprojlim_n Fil^{k-1}\big(\mathcal{M}/\pi^n\mathcal{M} \otimes_{S_{\mathbf{Z}_p}} \widehat{A_{st}}\big)_{N=0}^{\varphi_{k-1}=1}\Big)\left[\frac{1}{p}\right] \\ &\simeq Fil^{k-1}\big(\mathcal{M} \otimes_{S_{\mathbf{Z}_p}} \widehat{A_{st}}\big)_{N=0}^{\varphi_{k-1}=1}\left[\frac{1}{p}\right] \\ &\simeq Fil^{k-1}\big(D \otimes_{\mathbf{Q}_p} \widehat{A_{st}}[1/p]\big)_{N=0}^{\varphi=p^{k-1}} \\ &\simeq Fil^{k-1}\big(D \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{st}^+\big)_{N=0}^{\varphi=p^{k-1}}. \end{aligned}$$

Donc par le (i) du corollaire 3.2.2.3, $Fil^{k-1}\big(D \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{st}^+\big)_{N=0}^{\varphi=p^{k-1}}$ est un $E$-espace vectoriel de dimension $\dim_E D$. Mais comme $D$ est admissible ([Br4],th.1.1 suffit dans ce cas), $V_{st,k}(D) = Fil^{k-1}\big(D \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_{st}\big)_{N=0}^{\varphi=p^{k-1}}$ est aussi un $E$-espace vectoriel de dimension $\dim_E D$ qui contient le précédent. Ces deux espaces sont donc les mêmes d'où le résultat. □

En particulier, par le (i) du corollaire 3.2.2.3, $T_{st,k}(\mathcal{M})$ est un $\mathfrak{O}$-réseau stable par $G_p$ dans $V_{st,k}(D)$.

**Proposition 3.2.3.2.** *Soit $D$ un $(\varphi, N, \mathbf{Q}_p, E)$-module faiblement admissible, alors tout $\mathfrak{O}$-réseau stable par $G_p$ dans $V_{st,k}(D)$ est isomorphe à $T_{st,k}(\mathcal{M})$ pour un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible $\mathcal{M}$ dans $S_{\mathfrak{O}}[1/p] \otimes_E D$.*

*Démonstration.* D'après la proposition 5 de [Br6] (et un passage au dual), tout $\mathbf{Z}_p$-réseau stable par $G_p$ dans $V_{st,k}(D)$ est de la forme $T_{st,k}(\mathcal{M})$ pour un $\mathbf{Z}_p$-module fortement divisible $\mathcal{M}$. S'il s'agit d'un $\mathfrak{O}$-réseau, alors par le (ii) du corollaire 3.2.2.3 $\mathcal{M}$ est muni d'une action de $\mathfrak{O}$ et $M = \mathcal{M}/(Fil^1 S_{\mathbf{Z}_p}\mathcal{M}) \hookrightarrow D$ est un $\mathfrak{O}$-module sans torsion donc libre de rang $\dim_E D = d$. Soient $(e_1, ..., e_d)$ des relevés dans $\mathcal{M}$ d'une base de $M$ sur $\mathfrak{O}$, $d' = [E : \mathbf{Q}_p]$ et $x_1, ..., x_{d'}$ une base de $\mathfrak{O}$ sur $\mathbf{Z}_p$, alors $(x_j e_i)_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq d'}}$ est une base de $\mathcal{M}$ sur $S_{\mathbf{Z}_p}$ (car la matrice des $x_j e_i$ dans une base de $\mathcal{M}$ sur $S_{\mathbf{Z}_p}$ est inversible modulo $Fil^1 S_{\mathbf{Z}_p}$ donc est inversible). Il est donc clair que $\mathcal{M}$ est libre sur $S_{\mathfrak{O}}$ de base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$, c'est-à-dire est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. □

## 4. Calculs de réseaux galoisiens. Application aux formes modulaires

Dans toute cette section, on fixe un entier $k$ tel que $1 < k < p$.

4.1. **Rappels sur les cas cristallins.** Soit $V$ une représentation cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$. On a vu que $V$ provient par le foncteur (1) d'un des modules filtrés $D$ du (i), (ii) ou (iii) de l'exemple 3.1.2.2. On note $V = V_{st,k}(D(\mu_1, \mu_2)) = V(\mu_1, \mu_2)$ si $V$ est réductible (i.e. provient du (i) ou (ii) de *loc.cit.*) et $V = V_{st,k}(D(\mu, \nu)) = V(\mu, \nu)$ si $V$ est irréductible (i.e. provient du (iii)). La proposition qui suit est un corollaire facile des résultats de [FL] :

**Proposition 4.1.1.** *Soit $V$ une représentation cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ avec $1 < k < p$, $T$ un $\overline{\mathbf{Z}}_p$-réseau de $V$ stable par $G_p$ et $\overline{T}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$.*
*(i) Si $V$ est réductible, i.e. $V \simeq V(\mu_1, \mu_2)$ avec $(\mu_1, \mu_2) \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times \times \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$, alors :*

$$\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{k-1}\lambda(\overline{\mu}_2^{-1}) & * \\ 0 & \lambda(\overline{\mu}_1^{-1}) \end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ peu ramifié si } k = 2.$$

*(ii) Si $V$ est irréductible, i.e. $V \simeq V(\mu, \nu)$ avec $(\mu, \nu) \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times \times \mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$, alors :*

$$\overline{T} \simeq (\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{k-1}) \otimes \lambda(\overline{\mu}^{-1/2}) \text{ i.e. } \overline{T}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)} \end{pmatrix} \text{ et } \det(\overline{T}) \simeq \omega^{k-1}\lambda(\overline{\mu}^{-1}).$$

*Démonstration.* Soit $E$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}$ telle que $V$ soit à coefficients dans $E$. On note $\mathbf{F}$ le corps résiduel de $\mathfrak{O}$.
(i) Par le lemme 3.1.1.2 et [Fo2],§5.4.1, on voit que $V(\mu_1, \mu_2)$ est une extension de $\lambda(\mu_1^{-1})$ par $\varepsilon^{k-1}\lambda(\mu_2^{-1})$ où $\lambda(\mu_i^{-1}) : G_p \to \mathfrak{O}^\times$ est le caractère non ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur $\mu_i^{-1}$. Il est donc clair que $\overline{T}$ est une extension de $\lambda(\overline{\mu}_1^{-1})$ par $\omega^{k-1}\lambda(\overline{\mu}_2^{-1})$. D'après la proposition 3.2.3.2, [Br3],prop.4.4.1 et le (iii) du corollaire 3.2.2.3, $\overline{T}$ provient d'un objet de la catégorie $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ de [FL],§1.5 annulé par $p$ et muni d'une action de $\mathbf{F}$ qui en fait un $\mathbf{F}$-espace vectoriel de dimension 2. Lorsque $k = 2$, la condition "peu ramifié" se déduit alors soit de [FL],§9 + [Ed],prop.8.2, soit des équations explicites dans $\overline{\mathbf{Z}}_p$ donnant la représentation $\overline{T}$ à partir de l'objet correspondant de $\underline{MF}_{tor}^{f,1}$ (cf. par exemple [Wa],§2.3.2).
(ii) Quitte à tordre par un caractère non ramifié, on peut supposer $V \simeq V(1, \nu)$. Soient $M$

le $\mathbf{Z}_p$-module fortement divisible de Fontaine-Laffaille muni d'une action de $\mathfrak{O}$ suivant : $\big(M = \mathfrak{O}e_1 \oplus \mathfrak{O}e_2, Fil^0 M = M, Fil^1 M = ... = Fil^{k-1} M = \mathfrak{O}e_1, Fil^k M = 0, \varphi_{k-1}(e_1) = e_2, \varphi_0(e_2) = -e_1 + \nu e_2\big)$ et $\mathcal{M} = M \otimes_{\mathfrak{O}} S_{\mathfrak{O}}$ (cf. (i) exemple 3.2.1.2), alors $T_{st,k}(\mathcal{M})$ est un $\mathfrak{O}$-réseau de $V$ stable par $G_p$ par le lemme 3.2.3.1 et $T_{st,k}(\mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}) \simeq T_{st,k}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$ par le corollaire 3.2.2.3. Mais $\mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ (cf. §3.2.1) qui provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}_p$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ de l'objet simple suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ : $\big(\overline{M} = \mathbf{F}_p\overline{e}_1 \oplus \mathbf{F}_p\overline{e}_2, Fil^0\overline{M} = \overline{M}, Fil^1\overline{M} = ... = Fil^{k-1}\overline{M} = \mathbf{F}_p\overline{e}_1, Fil^k\overline{M} = 0, \varphi_{k-1}(\overline{e}_1) = \overline{e}_2, \varphi_0(\overline{e}_2) = -\overline{e}_1\big)$ et par [FL],th.5.3 (iii) (via [Br2],prop.3.2.1.1) on a $T_{st,k}(\mathcal{M} \otimes \mathbf{F}) \simeq \mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{k-1}$. Donc $V$ est irréductible modulo $p$ d'où $\overline{T} \simeq T_{st,k}(\mathcal{M}) \otimes \mathbf{F} \simeq \mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{k-1}$. $\square$

**Remarque 4.1.2.** La présence des exposants $-1$ dans les caractères non ramifiés de l'énoncé 4.1.1 est due au choix du foncteur covariant $V_{st,k}$. Par ailleurs, le cas (i) est bien sûr vrai pour tout $k \geq 2$.

4.2. **Les cas semi-stables non cristallins de poids pair.** Dans cette section, on suppose de plus que $k$ est pair (avec toujours $k$ entier et $1 < k < p$).

4.2.1. Le cas $k = 2$ apparaît comme un cas dégénéré dans les calculs des paragraphes suivants (cf. l'énoncé 4.2.4.7 et la remarque 4.3.3.2). Pour des raisons pratiques et vu sa simplicité, nous le traitons ici à part. Soit $V$ une représentation semi-stable non cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0, 1)$. On a vu que $V$ provient par le foncteur (1) d'un des modules filtrés $D(\mu, \mathfrak{L})$ du (iv) de l'exemple 3.1.2.2. On note $V(\mu, \mathfrak{L}) = V_{st,2}(D(\mu, \mathfrak{L}))$.

**Proposition 4.2.1.** *Soient $V$ une représentation semi-stable non cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0, 1)$, i.e. $V \simeq V(\mu, \mathfrak{L})$ avec $\mu \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$ et $\mathfrak{L} \in \overline{\mathbf{Q}}_p$, $T$ un $\overline{\mathbf{Z}}_p$-réseau de $V$ stable par $G_p$ et $\overline{T}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$.*

*(i) Si $val_p(\mathfrak{L}) < 1$ alors $\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \lambda\big(\overline{\mu}^{-1}\big)$ avec $*$ peu ramifié.*

*(ii) Si $val_p(\mathfrak{L}) \geq 1$ alors $\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \lambda\big(\overline{\mu}^{-1}\big)$ avec $*$ très ramifié ou $\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \lambda\big(\overline{\mu}^{-1}\big)$.*

*Démonstration.* Soit $E$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}$ telle que $V$ soit à coefficients dans $E$. On note $\mathbf{F}$ le corps résiduel de $\mathfrak{O}$. Quitte à tordre par un caractère non ramifié, on peut supposer $V \simeq V(1, \mathfrak{L})$. Par le lemme 3.1.1.2 et [Fo2],§5.4.1, on voit que $V(1, \mathfrak{L})$ est une extension de 1 par $\varepsilon$ et il est alors clair que $\overline{T}$ est une extension de 1 par $\omega$.Soit $\mathcal{D}(1, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D(1, \mathfrak{L}) \simeq S_{\mathfrak{O}}[\frac{1}{p}]e_1 \oplus S_{\mathfrak{O}}[\frac{1}{p}]e_2$ (cf. exemple 3.1.2.2 (iv)) muni des structures $(Fil^1, \varphi, N)$ définies au §3.2.3.
Supposons $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) < 1$. Alors le sous-$S_{\mathfrak{O}}$-module $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}(1, \mathfrak{L})$ engendré par $(pe_1, \mathfrak{L}e_2)$ et muni des structures induites est fortement divisible et $\mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^1$ (cf. §3.2.1) qui provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}_p$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,1}$ : $\big(M = \mathbf{F}_p f_1 \oplus \mathbf{F}_p f_2, Fil^0 M = M, Fil^1 M = \mathbf{F}_p f_1, Fil^2 M = 0, \varphi_1(f_1) = f_1 + f_2, \varphi_0(f_2) = f_2\big)$. On en déduit $T_{st,2}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ non nul et peu ramifié (cf. corollaire 3.2.2.3

et la preuve de la proposition 4.1.1).
Supposons $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) \geq 1$. Alors le sous-$S_{\mathfrak{O}}$-module $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}(1,\mathfrak{L})$ engendré par $(e_1, e_2)$ et muni des structures induites est fortement divisible et $\mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^1$ qui provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ et d'un endomorphisme $\mathbf{F}$-linéaire $N$ : $\big(M = \mathbf{F}f_1 \oplus \mathbf{F}f_2, Fil^0 M = M, Fil^1 M = \mathbf{F}f_1, Fil^2 M = 0, \varphi_1(f_1) = f_1 + \frac{\overline{\mathfrak{L}}}{p} f_2, \varphi_0(f_2) = f_2, N(f_1) = f_2, N(f_2) = 0\big)$. Par pleine fidélité (cor.3.2.2.3 (ii)), $T_{st,2}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$ est une extension de 1 par $\omega$ non scindée et non isomorphe à la précédente, on a donc forcément $T_{st,2}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié. Si $\overline{T}$ est non scindé, on a dans chaque cas $\overline{T} \simeq T_{st,2}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F}$ d'où le résultat. □

4.2.2. On suppose maintenant $k \geq 4$ (avec toujours $k$ pair et $1 < k < p$) et on fixe une extension finie $E$ (arbitrairement grande) de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}$ de corps résiduel $\mathbf{F}$. Dans le §4.2.4, nous allons construire certains $\mathfrak{O}$-modules fortement divisibles. La définition de ces modules est un peu laborieuse et requiert l'introduction de plusieurs notations, ce que nous faisons ici.

Soit $\mathfrak{L}$ un élément quelconque de $E$, $\ell = \mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) \in \mathbf{Q} \cup \{+\infty\}$ et, si $\ell \in \mathbf{Z}$, $\alpha = \mathfrak{L}/p^\ell$. On pose :

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell \geq 0 \\ -[\ell] & \text{si} \quad -k/2+2 \leq \ell < 0 \\ k/2-1 & \text{si} \quad \ell < -k/2+2. \end{cases}$$

On définit $H_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. On commence par définir deux éléments $\delta_V(\mathfrak{L})$ et $\delta_Z(\mathfrak{L})$ de $\mathbf{Z}_p[[\frac{(u-p)^p}{p}]] \subset S_{\mathfrak{O}}$. Ces éléments apparaissent naturellement lorsque l'on cherche, par un procédé récursif, des modules fortement divisibles dans $\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ (ce qui fait intervenir la filtration sur $\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ : voir proposition 4.2.4.1). On pose donc :

$$(2)\ \delta_V(\mathfrak{L}) \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{k/2+m-1}\left(\frac{(u-p)^p}{p}-1\right)^i \sum_{j=0}^{\min(i-1,k/2-m-1)} \frac{(-1)^{i-j+1}}{i-j}\binom{k-2-j}{k/2-m-1}\binom{k/2-m-1}{j}}{\sum_{i=0}^{k/2-m-1}\left(\frac{(u-p)^p}{p}-1\right)^i \binom{k-2-i}{k/2-m-1}\binom{k/2-m-1}{i}},$$

$$(3)\ \delta_Z(\mathfrak{L}) \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{k/2+m}\left(\frac{(u-p)^p}{p}-1\right)^i \sum_{j=0}^{\min(i-1,k/2-m-2)} \frac{(-1)^{i-j+1}}{i-j}\binom{k-2-j}{k/2-m-2}\binom{k/2-m-2}{j}}{\sum_{i=0}^{k/2-m-2}\left(\frac{(u-p)^p}{p}-1\right)^i \binom{k-2-i}{k/2-m-2}\binom{k/2-m-2}{i}}.$$

L'élément $\delta_Z(\mathfrak{L})$ n'a de sens (et n'est considéré) que pour $m \leq k/2-2$ i.e. $\ell \geq -k/2+2$. Ces deux éléments sont bien définis car $\sum_{i=0}^{k/2-m-1}(-1)^i\binom{k-2-i}{k/2-m-1}\binom{k/2-m-1}{i} = 1$ et $\sum_{i=0}^{k/2-m-2}(-1)^i\binom{k-2-i}{k/2-m-2}\binom{k/2-m-2}{i} = 1$ (utiliser pour cela la formule combinatoire $\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{q-j}{q-r}\binom{n}{j} = \binom{q-n}{q-r-n}$). Donc les dénominateurs dans les formules (2) et (3) sont inversibles dans $\mathbf{Z}_p[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ (et donc dans $S_{\mathfrak{O}}$). On remarque qu'à un décalage près sur $m$, ces deux éléments sont essentiellement les mêmes.

**Définition 4.2.2.1.** *Soit $n$ un entier compris entre $0$ et $p-1$. On dit qu'une famille d'éléments $(C(i), D(i))_{0\leq i\leq n}$ de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ vérifie l'hypothèse (H 4.2.2.1) si $D(0)=0$ et si $D(i)=\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(-1)^{i-j+1}}{i-j}C(j)$ pour $1\leq i\leq n$.*

L'origine de cette définition est la proposition 4.2.4.1. On définit maintenant deux familles $(C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-3}$, $(C_V(\mathfrak{L}, i), D_V(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-2}$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$.

(i) On définit la famille $(C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-3}$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ de la façon suivante.

• Si $\ell\geq 0$ et $k=4$ :

$$\begin{cases} (C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq 1} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_U(\mathfrak{L}, 0)=1, C_U(\mathfrak{L}, 1)=0, \end{cases}$$

• si $\ell\geq 0$ et $k>4$ :

$$\begin{cases} (C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-3} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_U(\mathfrak{L}, 0)=1, C_U(\mathfrak{L}, k/2-1)=\cdots=C_U(\mathfrak{L}, k-3)=0 \\ D_U(\mathfrak{L}, k/2)=\cdots=D_U(\mathfrak{L}, k-3)=0, \end{cases}$$

• si $-k/2+3\leq\ell<0$ (et par conséquent $k>6$) :

$$\begin{cases} (C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-3} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_U(\mathfrak{L}, 0)=1, C_U(\mathfrak{L}, k/2+[\ell]-1)=\cdots=C_U(\mathfrak{L}, k/2-1)=0 \\ C_U(\mathfrak{L}, k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_U(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p}, \ldots, C_U(\mathfrak{L}, k/2-[\ell]-1)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_U(\mathfrak{L},k/2-[\ell]-1)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p} \\ C_U(\mathfrak{L}, k/2-[\ell])=\cdots=C_U(\mathfrak{L}, k-3)=0 \\ D_U(\mathfrak{L}, k/2-[\ell])=\cdots=D_U(\mathfrak{L}, k-3)=0 \end{cases}$$

où on remarque que $\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p\in\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]^\times$,

• si $-k/2+2\leq\ell<-k/2+3$ et $k>4$ :

$$\begin{cases} (C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-3} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_U(\mathfrak{L}, 0)=1, C_U(\mathfrak{L}, 1)=\cdots=C_U(\mathfrak{L}, k/2-1)=0 \\ C_U(\mathfrak{L}, k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_U(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p}, \ldots, C_U(\mathfrak{L}, k-3)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_U(\mathfrak{L},k-3)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p}, \end{cases}$$

• si $\ell<-k/2+2$ :

$$\begin{cases} C_U(\mathfrak{L}, 0)=1, C_U(\mathfrak{L}, 1)=\cdots=C_U(\mathfrak{L}, k-3)=0 \\ D_U(\mathfrak{L}, 0)=\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}-\mathfrak{L}, D_U(\mathfrak{L}, 1)=\cdots=D_U(\mathfrak{L}, k-3)=0. \end{cases}$$

Ce dernier cas définit en particulier la famille $(C_U(\mathfrak{L}, i), D_U(\mathfrak{L}, i))_{0\leq i\leq k-3}$ pour $\ell<0$ et $k=4$. Pour $k\geq 6$, l'hypothèse (H 4.2.2.1) implique que les éléments $(C_U(\mathfrak{L}, i))_{1\leq i\leq k/2-m-2}$ satisfont un système qui est modulo $p$ :

$$(S_U(\mathfrak{L}))\begin{cases} \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_1 & + & \frac{(-1)^{k/2+m-1}}{k/2+m-2}C_2 & + & \cdots & + & \frac{(-1)^{2m+3}}{2m+2}C_{k/2-m-2} & = & \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m} \\ \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m}C_1 & + & \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_2 & + & \cdots & + & \frac{(-1)^{2m+4}}{2m+3}C_{k/2-m-2} & = & \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m+1} \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{(-1)^{k-3}}{k-4}C_1 & + & \frac{(-1)^{k-4}}{k-5}C_2 & + & \cdots & + & \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_{k/2-m-2} & = & \frac{(-1)^{k-3}}{k-3}. \end{cases}$$

Ce système correspond à une matrice de déterminant inversible modulo $p$, donc inversible dans $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ et dans $S_{\mathfrak{O}}$ et les éléments $(C_U(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-3}$ (et donc aussi les $(D_U(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-3}$) sont bien tous définis.

(ii) On définit la famille $(C_V(\mathfrak{L},i),D_V(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2}$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ de la façon suivante.
• Si $\ell\geq 0$ :

$$\begin{cases} (C_V(\mathfrak{L},i),D_V(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_V(\mathfrak{L},0)=1, C_V(\mathfrak{L},k/2)=\cdots=C_V(\mathfrak{L},k-2)=0 \\ D_V(\mathfrak{L},k/2)=\cdots=D_V(\mathfrak{L},k-2)=0, \end{cases}$$

• si $-k/2+2\leq\ell<0$ (et par conséquent $k>4$) :

$$\begin{cases} (C_V(\mathfrak{L},i),D_V(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_V(\mathfrak{L},0)=1, C_V(\mathfrak{L},k/2+[\ell])=\cdots=C_V(\mathfrak{L},k/2-1)=0 \\ C_V(\mathfrak{L},k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_V(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p},\dots,C_V(\mathfrak{L},k/2-[\ell]-1)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_V(\mathfrak{L},k/2-[\ell]-1)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p} \\ C_V(\mathfrak{L},k/2-[\ell])=\cdots=C_V(\mathfrak{L},k-2)=0 \\ D_V(\mathfrak{L},k/2-[\ell])=\cdots=D_V(\mathfrak{L},k-2)=0, \end{cases}$$

• si $\ell<-k/2+2$ :

$$\begin{cases} (C_V(\mathfrak{L},i),D_V(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_V(\mathfrak{L},0)=1, C_V(\mathfrak{L},1)=\cdots=C_V(\mathfrak{L},k/2-1)=0 \\ C_V(\mathfrak{L},k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_V(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p},\dots,C_V(\mathfrak{L},k-2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_V(\mathfrak{L},k-2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})+1-p}. \end{cases}$$

La famille $(C_V(\mathfrak{L},i),D_V(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2}$ est bien définie dans tous les cas. En effet, pour $k/2\geq m+2$, l'hypothèse (H 4.2.2.1) implique que les éléments $(C_V(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k/2-m-1}$ satisfont un système qui est modulo $p$ :

$$(S_V(\mathfrak{L}))\begin{cases} \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_1 + \frac{(-1)^{k/2+m-1}}{k/2+m-2}C_2 + \cdots + \frac{(-1)^{2m+2}}{2m+1}C_{k/2-m-1} = \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m} \\ \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m}C_1 + \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_2 + \cdots + \frac{(-1)^{2m+3}}{2m+2}C_{k/2-m-1} = \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m+1} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \frac{(-1)^{k-2}}{k-3}C_1 + \frac{(-1)^{k-3}}{k-4}C_2 + \cdots + \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_{k/2-m-1} = \frac{(-1)^{k-2}}{k-2}. \end{cases}$$

Ce système correspond à une matrice de déterminant inversible modulo $p$, donc inversible dans $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ et dans $S_{\mathfrak{O}}$.

Posons :

$$a(\mathfrak{L})=(-1)^{\frac{k}{2}-1}\Big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}\big)\Big). \tag{4}$$

Lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))\in\{-\frac{k}{2}+2,-\frac{k}{2}+3,...,0\}$, on définit deux autres familles d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ : $(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-3}$ et $(C_Z(\mathfrak{L},i),D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2}$.

(iii) On définit la famille $(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-3}$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ de la façon suivante.

• Si $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))=0$ :

$$(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-3}=(C_U(\mathfrak{L},i),D_U(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-3},$$

• si $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))\in\{-k/2+3,...,-1\}$ i.e. $\ell\in\{-k/2+3,...,-1\}$ (et par conséquent $k>6$) :

$$\begin{cases}(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-3}\text{ satisfait (H 4.2.2.1)}\\ C_W(\mathfrak{L},0)=1, C_W(\mathfrak{L},k/2+\ell-1)=\cdots=C_W(\mathfrak{L},k/2-1)=0\\ C_W(\mathfrak{L},k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_W(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p},\dots,C_W(\mathfrak{L},k/2-\ell-1)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_W(\mathfrak{L},k/2-\ell-1)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p}\\ C_W(\mathfrak{L},k/2-\ell)=\cdots=C_W(\mathfrak{L},k-3)=0\\ D_W(\mathfrak{L},k/2-\ell)=\cdots=D_W(\mathfrak{L},k-3)=0\end{cases}$$

où on remarque que $\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p\in\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]^\times$,
• si $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))=-k/2+2$ i.e. $\ell=-k/2+2$ et $k>4$ :

$$\begin{cases}(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-3}\text{ satisfait (H 4.2.2.1)}\\ C_W(\mathfrak{L},0)=1, C_W(\mathfrak{L},1)=\cdots=C_W(\mathfrak{L},k/2-1)=0\\ C_W(\mathfrak{L},k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_W(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p},\dots,C_W(\mathfrak{L},k-3)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_W(\mathfrak{L},k-3)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p}.\end{cases}$$

La famille $(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{1\le i\le k-3}$ est bien définie dans tous les cas. En effet, si $k/2\ge m+3$, l'hypothèse (H 4.2.2.1) implique que les éléments $(C_W(\mathfrak{L},i))_{1\le i\le k/2-m-2}$ satisfont un système qui modulo $p$ est $S_U(\mathfrak{L})$. On remarque que la famille $(C_W(\mathfrak{L},i),D_W(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-3}$ diffère de $(C_U(\mathfrak{L},i),D_U(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-3}$ (lorsque les deux familles sont définies) par le terme $\delta_Z(\mathfrak{L})$ à la place du terme $\delta_V(\mathfrak{L})$.

(iv) On définit la famille $(C_Z(\mathfrak{L},i),D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-2}$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ de la façon suivante.
• Si $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-3/2)=0$ et $k=4$ :

$$\begin{cases}(C_Z(\mathfrak{L},i),D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le 2}\text{ satisfait (H 4.2.2.1)}\\ C_Z(\mathfrak{L},0)=1, C_Z(\mathfrak{L},1)=0\\ C_Z(\mathfrak{L},2)=\frac{pD_Z(\mathfrak{L},2)}{\delta_Z(\mathfrak{L})+(1-p)\mathfrak{L}}\end{cases}$$

où $\delta_Z(\mathfrak{L})+(1-p)\mathfrak{L}\in\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]^\times$ car, par le lemme 4.2.3.6, $\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})=\mathfrak{L}-3/2$ modulo $(\frac{(u-p)^p}{p})$,
• si $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))=0$ et $k>4$ :

$$\begin{cases}(C_Z(\mathfrak{L},i),D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\le i\le k-2}\text{ satisfait (H 4.2.2.1)}\\ C_Z(\mathfrak{L},0)=1, C_Z(\mathfrak{L},k/2-1)=0\\ C_Z(\mathfrak{L},k/2)=\frac{pD_Z(\mathfrak{L},k/2)}{\delta_Z(\mathfrak{L})+(1-p)\mathfrak{L}}, C_Z(\mathfrak{L},k/2+1)=\cdots=C_Z(\mathfrak{L},k-2)=0\\ D_Z(\mathfrak{L},k/2+1)=\cdots=D_Z(\mathfrak{L},k-2)=0\end{cases}$$

où $\delta_Z(\mathfrak{L})+(1-p)\mathfrak{L}\in\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]^\times$ car, par le lemme 4.2.3.6, $\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})=\mathfrak{L}-H_{k/2}-H_{k/2-2}=(-1)^{k/2-1}\frac{2}{k(k/2-1)}a(\mathfrak{L})$ modulo $(\frac{(u-p)^p}{p})$,

• si $\ell \in \{-k/2+3, ..., -1\}$ (et par conséquent $k > 6$) :

$$\begin{cases} (C_Z(\mathfrak{L},i), D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_Z(\mathfrak{L},0)=1, C_Z(\mathfrak{L},k/2+\ell-1)=\cdots=C_Z(\mathfrak{L},k/2-1)=0 \\ C_Z(\mathfrak{L},k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_Z(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p},\ldots,C_Z(\mathfrak{L},k/2-\ell)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_Z(\mathfrak{L},k/2-\ell)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p} \\ C_Z(\mathfrak{L},k/2-\ell+1)=\cdots=C_Z(\mathfrak{L},k-2)=0 \\ D_Z(\mathfrak{L},k/2-\ell+1)=\cdots=D_Z(\mathfrak{L},k-2)=0, \end{cases}$$

• si $\ell = -k/2+2$ et $k > 4$ :

$$\begin{cases} (C_Z(\mathfrak{L},i), D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2} \text{ satisfait (H 4.2.2.1)} \\ C_Z(\mathfrak{L},0)=1, C_Z(\mathfrak{L},1)=\cdots=C_Z(\mathfrak{L},k/2-1)=0 \\ C_Z(\mathfrak{L},k/2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_Z(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p},\ldots,C_Z(\mathfrak{L},k-2)=\frac{p\mathfrak{L}^{-1}D_Z(\mathfrak{L},k-2)}{\mathfrak{L}^{-1}\delta_Z(\mathfrak{L})+1-p}. \end{cases}$$

L'hypothèse (H 4.2.2.1) implique que les éléments $(C_Z(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k/2-m-2}$ satisfont un système qui est modulo $p$ :

$$(S_Z(\mathfrak{L}))\begin{cases} \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m}C_1 & + & \frac{(-1)^{k/2+m}}{k/2+m-1}C_2 & + & \cdots & + & \frac{(-1)^{2m+4}}{2m+3}C_{k/2-m-2} & = & \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m+1} \\ \frac{(-1)^{k/2+m+2}}{k/2+m+1}C_1 & + & \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m}C_2 & + & \cdots & + & \frac{(-1)^{2m+5}}{2m+4}C_{k/2-m-2} & = & \frac{(-1)^{k/2+m+2}}{k/2+m+2} \\ & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ \frac{(-1)^{k-2}}{k-3}C_1 & + & \frac{(-1)^{k-3}}{k-4}C_2 & + & \cdots & + & \frac{(-1)^{k/2+m+1}}{k/2+m}C_{k/2-m-2} & = & \frac{(-1)^{k-2}}{k-2}. \end{cases}$$

Ce système correspond à une matrice de déterminant inversible modulo $p$, donc inversible dans $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ et dans $S_{\mathfrak{O}}$ et les éléments $(C_Z(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-2}$ (et donc aussi les $(D_Z(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-2}$) sont bien tous définis.

**Remarque 4.2.2.2.** Nous nous servirons des familles $(C_W(\mathfrak{L},i), D_W(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-3}$ et $(C_Z(\mathfrak{L},i), D_Z(\mathfrak{L},i))_{0\leq i\leq k-2}$ seulement lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., 0\}$. Cela correspondra aux cas où la représentation $V(\mu,\mathfrak{L})$ est réductible modulo $p$ (cf. th.4.2.4.7).

Les quatre familles $(C_U(\mathfrak{L},i), D_U(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-3}$, $(C_V(\mathfrak{L},i), D_V(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-2}$, $(C_W(\mathfrak{L},i), D_W(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-3}$ et $(C_Z(\mathfrak{L},i), D_Z(\mathfrak{L},i))_{1\leq i\leq k-2}$ introduites ci-dessus permettent de définir des vecteurs dans $\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ (voir propositions 4.2.4.2 à 4.2.4.6). Pour étudier leurs images par le Frobenius sur $\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$, il est utile de définir quatre couples $(c_U(\mathfrak{L}), d_U(\mathfrak{L}))$, $(c_V(\mathfrak{L}), d_V(\mathfrak{L}))$, $(c_W(\mathfrak{L}), d_W(\mathfrak{L}))$ et $(c_Z(\mathfrak{L}), d_Z(\mathfrak{L}))$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{u^p}{p}]] \subset S_{\mathfrak{O}}$ :

$$\begin{array}{rclrcl} c_U(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-3}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(C_U(\mathfrak{L},i)) & d_U(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-3}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(D_U(\mathfrak{L},i)) \\ c_V(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(C_V(\mathfrak{L},i)) & d_V(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(D_V(\mathfrak{L},i)) \\ c_W(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-3}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(C_W(\mathfrak{L},i)) & d_W(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-3}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(D_W(\mathfrak{L},i)) \\ c_Z(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(C_Z(\mathfrak{L},i)) & d_Z(\mathfrak{L}) & = & \sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{u^p-p}{p}\right)^i\varphi(D_Z(\mathfrak{L},i)) \end{array}$$

où $\varphi$ est l'opérateur de Frobenius sur $S_{\mathfrak{O}}$ (cf. §3.2.1).

4.2.3. On conserve les notations du §4.2.2. Nous donnons maintenant quelques lemmes et corollaires combinatoires élémentaires qui explicitent certains des éléments introduits dans le paragraphe précédent. Ces résultats nous serviront dans le paragraphe suivant. Par convention $0! = 1$ et $\binom{i}{j} = 0$ si $i < j$. Dans les lemmes qui suivent, on détermine les images dans $S_{\mathfrak{O}}/pS_{\mathfrak{O}}$ d'éléments de $\mathfrak{O}[[\frac{(u-p)^p}{p}]] \subset S_{\mathfrak{O}}$. Le premier lemme est évident à partir des définitions du §4.2.2 (nous omettons sa preuve).

**Lemme 4.2.3.1.** *Supposons $\ell = val_p(\mathfrak{L}) < -k/2+2$.*
*(i) On a $\delta_V(\mathfrak{L}) = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \big(\frac{(u-p)^p}{p} - 1\big)^i$.*
*(ii) On a modulo $p$ :*

$$\begin{cases} C_V(\mathfrak{L}, 0) = 1, C_V(\mathfrak{L}, i) = 0, \ 1 \leq i \leq k-2 \\ D_V(\mathfrak{L}, 0) = 0, D_V(\mathfrak{L}, i) = \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \ 1 \leq i \leq k-2. \end{cases}$$

*(iii) On a modulo $p$ : $c_V(\mathfrak{L}) = 1$ et $d_V(\mathfrak{L}) = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \big(\frac{u^p-p}{p}\big)^i$.*

Les lemmes et corollaires qui suivent sont tous dans le cas $\ell = \mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) \geq -k/2+2$.

**Lemme 4.2.3.2.** *Supposons $\ell \geq -k/2+2$. On a les égalités modulo $p$ :*
*(i) $C_U(\mathfrak{L}, i) = \binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1} \binom{k-3-i}{k/2-m-2} \binom{k/2-m-2}{i} C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$ où $i \in \{0, ..., k-3\}$ et $C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2) = \frac{(k/2+m-1)!^2}{(k-3)!(2m+1)!}$,*
*(ii) $C_V(\mathfrak{L}, i) = \binom{k/2+m-1}{2m}^{-1} \binom{k-2-i}{k/2-m-1} \binom{k/2-m-1}{i} C_V(\mathfrak{L}, k/2-m-1)$ où $i \in \{0, ..., k-2\}$ et $C_V(\mathfrak{L}, k/2-m-1) = \frac{(k/2+m-1)!^2}{(k-2)!(2m)!}$.*
*Supposons de plus $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., 0\}$ (cf. §4.2.2). On a les égalités modulo $p$ :*
*(iii) $C_W(\mathfrak{L}, i) = C_U(\mathfrak{L}, i)$ où $i \in \{0, ..., k-3\}$,*
*(iv) $C_Z(\mathfrak{L}, i) = \binom{k/2+m}{2m+2}^{-1} \binom{k-2-i}{k/2-m-2} \binom{k/2-m-2}{i} C_Z(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$ où $i \in \{0, ..., k-2\}$ et $C_Z(\mathfrak{L}, k/2-m-2) = \frac{(k/2+m)!^2}{(k-2)!(2m+2)!}$.*

*Démonstration.* On fait la preuve pour $(C_U(\mathfrak{L}, i))_{0 \leq i \leq k-3}$. Les autres cas se traitent de façon analogue. On pose $n = k/2-m-2$ pour alléger les notations. Par définition, modulo $p$, $C_U(\mathfrak{L}, i) = 0$ pour $n+1 \leq i \leq k-3$ et $(C_U(\mathfrak{L}, i))_{1 \leq i \leq n}$ est solution du système $(S_U(\mathfrak{L}))$ :

$$\forall\ 1 \leq i \leq n, \qquad \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{(-1)^{n+2m+i-j}}{n+2m+i-j+1} C_j = \frac{(-1)^{n+2m+i+1}}{n+2m+i+1}.$$

Considérons le produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^{0} x^{2m+1} P(x) Q(x) dx$ défini sur l'espace des polynômes en une variable $x$. On a $(x^{i-1}, x^{n-j}) = \frac{(-1)^{n+2m+i-j}}{n+2m+i-j+1}$. Donc le système précédent s'écrit :

$$\forall\ 1 \leq i \leq n, \qquad (x^{i-1}, x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n) = 0.$$

Autrement dit $P_n = x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n$ est l'unique polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré $n$ orthogonal aux polynômes $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Rappelons que par intégration par parties, on sait former une suite de vecteurs $Q_r$ de degré $r$ orthogonaux aux polynômes de degré $< r$ pour tous les produits scalaires de la forme :

$$\int_a^b (x-a)^\alpha (x-b)^\beta P(x) Q(x) dx$$

où $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ et $\alpha, \beta$ sont des entiers positifs. Cette suite est :

$$Q_r = \frac{1}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta} \frac{d^r}{dx^r} (x-a)^{r+\alpha}(x-b)^{r+\beta}.$$

Donc $P_n$ est le polynôme unitaire associé à :

$$Q_n = \frac{1}{x^{2m+1}} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+2m+1}(1+x)^n = \sum_{0\le i\le n} \binom{n}{i} (2n+2m+1-i)\cdots(n+2m+2-i)x^{n-i}$$

ce qui entraîne $C_i = \binom{n}{i} \frac{(2n+2m+1-i)!(n+2m+1)!}{(n+2m+1-i)!(2n+2m+1)!}$. On en déduit pour tout entier $i$ tel que $0 \le i \le k-3$ les égalités modulo $p$ :

$$C_U(\mathfrak{L}, i) = \binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1} \binom{k-3-i}{k/2-m-2} \binom{k/2-m-2}{i} C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$$

avec $C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2) = \frac{(k/2+m-1)!^2}{(k-3)!(2m+1)!}$. □

Par définition de $\delta_V(\mathfrak{L})$ et $\delta_Z(\mathfrak{L})$ et comme $\frac{(u-p)^p}{p} = \frac{u^p}{p}$ modulo $p$, on obtient :

**Corollaire 4.2.3.3.** *Supposons $\ell \ge -k/2+2$. On a modulo $p$ : $\delta_V(\mathfrak{L}) = d_V(\mathfrak{L})/c_V(\mathfrak{L})$. Supposons de plus $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, \dots, 0\}$, on a modulo $p$ : $\delta_Z(\mathfrak{L}) = d_Z(\mathfrak{L})/c_Z(\mathfrak{L})$.*

Du lemme 4.2.3.2 et de la formule combinatoire $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{q-j}{q-r}\binom{n}{j} = \binom{q-n}{q-r-n}$, on déduit aisément :

**Corollaire 4.2.3.4.** *Supposons $\ell \ge -k/2+2$. On a les égalités modulo $\left(p, \frac{(u-p)^p}{p}\right)$ :*
*(i) $c_U(\mathfrak{L}) = \binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1} C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$,*
*(ii) $c_V(\mathfrak{L}) = \binom{k/2+m-1}{2m}^{-1} C_V(\mathfrak{L}, k/2-m-1)$.*
*Supposons de plus $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, \dots, 0\}$, on a les égalités modulo $\left(p, \frac{(u-p)^p}{p}\right)$ :*
*(iii) $c_W(\mathfrak{L}) = c_U(\mathfrak{L})$,*
*(iv) $c_Z(\mathfrak{L}) = \binom{k/2+m}{2m+2}^{-1} C_Z(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$.*

Rappelons le développement en série entière de $(1+x)^n \ln(1+x)$ valable pour $n$ entier positif ou nul :

$$(5)\ (1+x)^n \ln(1+x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}(H_n - H_{n-i})x^i + \sum_{i\ge n+1} (-1)^{i-n-1} \frac{n!(i-n-1)!}{i!} x^i.$$

**Lemme 4.2.3.5.** *Supposons $\ell \ge -k/2+2$. On a les égalités modulo $p$ :*
*(i) $D_U(\mathfrak{L}, k/2+m-1) = \frac{1}{k/2+m-1} \binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1} \binom{k/2+m-2}{2m}^{-1} C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$,*
*(ii) $D_U(\mathfrak{L}, k/2-1) = \frac{(-1)^m}{k/2-1} \binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1} C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$,*
*(iii) si $\ell < 0$, $D_V(\mathfrak{L}, k/2-[\ell]-1) = \frac{1}{k/2-[\ell]} \binom{k/2-[\ell]-1}{-2[\ell]}^{-2} C_V(\mathfrak{L}, k/2+[\ell]-1)$,*
*(iv) si $\ell \ge 0$, $D_V(\mathfrak{L}, k/2-1) = 2H_{k/2-1} C_V(\mathfrak{L}, k/2-1)$.*
*Supposons de plus $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., 0\}$ (et rappelons que $m \in \{0, ..., k/2-2\}$), on a les égalités modulo $p$ :*

*(v)* $D_Z(\mathfrak{L}, k/2+m) = \frac{-1}{k/2+m}\binom{k/2+m}{2m+2}^{-1}\binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1} C_Z(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$,
*(vi)* $D_Z(\mathfrak{L}, k/2-1) = \frac{(-1)^m}{k/2-1}\binom{k/2+m}{2m+2}^{-1}\binom{k/2-1}{m+1}\binom{k/2-2}{m}^{-1} C_Z(\mathfrak{L}, k/2-m-2)$.

*Démonstration.* (i) D'après le lemme 4.2.3.2, on a modulo $p$ :

$$\binom{k/2+m-1}{2m+1}\frac{D_U(\mathfrak{L},k/2+m-1)}{C_U(\mathfrak{L},k/2-m-2)} = \sum_{i=0}^{k/2-m-2}\frac{(-1)^{k/2+m-i}}{k/2+m-1-i}\binom{k-3-i}{k/2-m-2}\binom{k/2-m-2}{i}.$$

Posons $n = k/2-m-2$ et :

$$f(y) = -\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n+2m+1-i}}{n+2m+1-i}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{k-3-i}\binom{k-3-i}{j}y^j.$$

Ainsi, $\binom{k/2+m-1}{2m+1}\frac{D_U(\mathfrak{L},k/2+m-1)}{C_U(\mathfrak{L},k/2-m-2)}$ est modulo $p$ le coefficient de $y^n$ dans $f(y)$. Par ailleurs :

$$f(y) = \int_{-1}^{0}\sum_{i=0}^{n} x^{n+2m-i}\binom{n}{i}(1+y)^{k-3-i}dx = (1+y)^{k-3}\int_{-1}^{0} x^{2m}\Big(\frac{1}{1+y}+x\Big)^n dx.$$

Pour des entiers $r$, $s$ positifs ou nuls posons $I_{r,s}(y) = \int_{-1}^{0} x^r(\frac{1}{1+y}+x)^s dx$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{r,s}(y) &= \frac{-1}{s+1}\Big(\frac{-y}{1+y}\Big)^{s+1} - \frac{r}{s+1}I_{r-1,s+1}(y) \text{ si } r>0,\\ I_{0,s}(y) &= \frac{1}{s+1}\Big(\Big(\frac{1}{1+y}\Big)^{s+1} - \Big(\frac{-y}{1+y}\Big)^{s+1}\Big). \end{aligned}$$

On en déduit facilement que le terme de degré $n$ de $f(y)$ est $\frac{(2m)!n!}{(n+2m+1)!}$, d'où modulo $p$ :

$$D_U(\mathfrak{L}, k/2+m-1) = \frac{1}{k/2+m-1}\binom{k/2+m-1}{2m+1}^{-1}\binom{k/2+m-2}{2m}^{-1} C_U(\mathfrak{L}, k/2-m-2).$$

Les formules (ii), (iii), (v) et (vi) s'obtiennent de façon analogue. Pour démontrer (iv), posons $n = k/2-1$. D'après le lemme 4.2.3.2, on a modulo $p$ :

$$D_V(\mathfrak{L}, k/2-1) = -\sum_{0\le i<n}\frac{(-1)^{n-i}}{n-i}\binom{2n-i}{n}\binom{n}{i}C_V(\mathfrak{L}, k/2-1).$$

Posons :

$$g(x) = -\int_0^x \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{(1+t)^{n+1}}-1\Big)dt = -\sum_{i\ge 1}(-1)^i\binom{n+i}{i}\frac{x^i}{i}.$$

Modulo $p$, $\frac{D_V(\mathfrak{L},k/2-1)}{C_V(\mathfrak{L},k/2-1)}$ est le coefficient de degré $n$ du développement en série entière de $(1+x)^n g(x)$. Or $-\frac{1}{t}\big(\frac{1}{(1+t)^{n+1}}-1\big) = \sum_{0\le i\le n}(1+t)^{i-n-1}$, donc :

$$(1+x)^n g(x) = (1+x)^n \ln(1+x) - \sum_{0\le i<n}\frac{(1+x)^i-(1+x)^n}{n-i}.$$

D'après le développement en série entière (5), le terme de degré $n$ de $(1+x)^n g(x)$ est $2H_n$. Par conséquent, modulo $p$ : $D_V(\mathfrak{L}, k/2-1) = 2H_{k/2-1}C_V(\mathfrak{L}, k/2-1)$. □

**Lemme 4.2.3.6.** *On a les égalités modulo* $\left(\frac{(u-p)^p}{p}\right)$ *:*
*(i) si* $\ell \geq -k/2+2$*,* $\delta_V(\mathfrak{L}) = -H_{k/2+m-1} - H_{k/2-m-1}$*,*
*(ii) si de plus* $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., 0\}$*,* $\delta_Z(\mathfrak{L}) = -H_{k/2+m} - H_{k/2-m-2}$*.*

*Démonstration.* Par définition de $\delta_V(\mathfrak{L})$, on a l'égalité modulo $\left(\frac{(u-p)^p}{p}\right)$ :

$$\delta_V(\mathfrak{L}) = \sum_{i=1}^{k/2+m-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{\min(i-1,k/2-m-1)} \frac{(-1)^{i-j+1}}{i-j} \binom{k-2-j}{k/2-m-1} \binom{k/2-m-1}{j}.$$

Posons $n = k/2-m-1$, modulo $\left(\frac{(u-p)^p}{p}\right)$ on a :

$$\delta_V(\mathfrak{L}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} \binom{2n+2m-j}{n} \binom{n}{j} \sum_{i=j+1}^{n+2m} \frac{1}{i-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} \binom{2n+2m-j}{n} \binom{n}{j} \left(H_{n-j} + \sum_{i=0}^{2m-1} \frac{1}{n-j+1+i}\right).$$

On en déduit $\delta_V(\mathfrak{L}) = T_n + S_n$ modulo $\left(\frac{(u-p)^p}{p}\right)$ où :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{n-j+1+i} \binom{n}{j} \binom{2n+2m-j}{n} = \sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^{n+1} \frac{n!i!}{(n+i+1)!} \binom{n+2m-i-1}{n} \\ T_n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \binom{2n+2m-j}{n} H_{n-j}. \end{aligned}$$

Pour calculer $T_n$, posons $g(x) = \sum_{i \geq n+1} (-1)^{i-n-1} \frac{n!(i-n-1)!}{i!} x^i$. On a (cf. formule 5) :

$$(1+x)^n \ln(1+x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (H_n - H_{n-i}) x^i + g(x) = (1+x)^n H_n - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H_{n-i} x^i + g(x)$$

d'où $\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{H_n}{1-x} + \frac{g(-x)}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} H_{n-i} x^i$ en divisant par $(1+x)^{n+1}$ et en remplaçant $x$ par $-x$. Par ailleurs, un calcul donne :

$$-\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} H_{n-i} x^i = \sum_{i \geq 0} x^i \sum_{j=0}^{\min(n,i)} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \binom{n+i-j}{n} H_{n-j}.$$

On en déduit que $T_n$ est le coefficient de degré $n+2m$ dans le développement en série entière de $\frac{\ln(1-x)}{1-x} - \frac{H_n}{1-x} - \frac{g(-x)}{(1-x)^{n+1}}$. Or $\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{i \geq 1} H_i x^i$, $-\frac{H_n}{1-x} = -H_n \sum_{i \geq 0} x^i$ et $\frac{-g(-x)}{(1-x)^{n+1}} = (-1)^n \sum_{i \geq n+1} x^i \sum_{j=0}^{i-n-1} \frac{n!j!}{(n+j+1)!} \binom{i-j-1}{n}$, d'où :

$$T_n = -H_{n+2m} - H_n + (-1)^n \sum_{i=0}^{2m-1} \frac{n!i!}{(n+i+1)!} \binom{n+2m-i-1}{n},$$

ce qui entraîne (i). La démonstration de (ii) est analogue. □

**Corollaire 4.2.3.7.** *Supposons* $\ell \geq -k/2+2$*. On a l'égalité modulo* $\left(p, \frac{(u-p)^p}{p}\right)$ *:*
*(i)* $d_U(\mathfrak{L}) - c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}) = \frac{1}{k/2-m-1} \binom{k-3}{k/2-m-2}^{-1}$*.*
*Supposons de plus* $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., 0\}$*, on a l'égalité modulo* $\left(p, \frac{(u-p)^p}{p}\right)$ *:*
*(ii)* $d_W(\mathfrak{L}) - c_W(\mathfrak{L})\delta_Z(\mathfrak{L}) = \frac{1}{k/2+m} \binom{k-3}{k/2-m-2}^{-1}$*.*

*Démonstration.* Toutes les égalités de cette démonstration sont écrites modulo $\left(p, \frac{(u-p)^p}{p}\right)$. Par définition et d'après le lemme 4.2.3.2 et le corollaire 4.2.3.4 :

$$\frac{d_U(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})} = \sum_{i=1}^{k/2+m-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{\min(i-1,k/2-m-2)} \frac{(-1)^{i-j+1}}{i-j} \binom{k-3-j}{k/2-m-2} \binom{k/2-m-2}{j}.$$

On montre comme dans la preuve du lemme 4.2.3.6 que $\frac{d_U(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})} = -H_{k/2+m-1} - H_{k/2-m-2}$. D'après les lemmes 4.2.3.2, 4.2.3.6 et le corollaire 4.2.3.4, on a alors :

$$d_U(\mathfrak{L}) - c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}) = \frac{1}{k/2-m-1} \binom{k-3}{k/2-m-2}^{-1}.$$

Lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., 0\}$, on a $\frac{d_U(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})} = \frac{d_W(\mathfrak{L})}{c_W(\mathfrak{L})}$, donc $d_W(\mathfrak{L}) - c_W(\mathfrak{L})\delta_Z(\mathfrak{L}) = \frac{1}{k/2+m}\binom{k-3}{k/2-m-2}^{-1}$. □

4.2.4. On conserve les notations du §4.2.2 et du §4.2.3 et on utilise les éléments introduits au §4.2.2. Soit $V$ une représentation semi-stable non cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $E$ à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ ($k$ pair, $3 < k < p$). On a vu que $V$ provient par le foncteur (1) (cf. §3.1.1) d'un des modules filtrés $D(\mu, \mathfrak{L})$ du (iv) de l'exemple 3.1.2.2 avec $\mu \in \mathfrak{O}^\times$ et $\mathfrak{L} \in E$. On note $V(\mu, \mathfrak{L}) = V_{st,k}(D(\mu, \mathfrak{L}))$ et $\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}[\frac{1}{p}] \otimes_E D(\mu, \mathfrak{L})$ muni des structures $(Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}), \varphi, N)$ définies au §3.2.3, i.e. $\varphi = \varphi \otimes \varphi$, $N = N \otimes Id + Id \otimes N$ et $Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ est défini par récurrence à partir de $Fil^0\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}) = \mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ et $Fil^{i+1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}) = \{x \in \mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}) \mid N(x) \in Fil^i\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}) \text{ et } f_p(x) \in Fil^{i+1}D(\mu, \mathfrak{L})\}$ où $f_p : \mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}} \otimes_E D(\mu, \mathfrak{L}) \to D(\mu, \mathfrak{L})$, $\sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{u^j}{j!} \otimes x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} r_j \frac{p^j}{j!} x$. Tout élément de $Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ peut s'écrire $y + z$ où $y = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(u-p)^i}{p^i} y_i \in Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ avec $y_i \in D(\mu, \mathfrak{L})$ et $z \in Fil^{k-1}S_{\mathfrak{O}} \otimes D(\mu, \mathfrak{L}) \subset Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$. La proposition suivante décrit les $y$ possibles :

**Proposition 4.2.4.1.** *Soit* $y = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(u-p)^i}{p^i} y_i \in \mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ *avec* $y_0, ..., y_{k-2} \in D(\mu, \mathfrak{L})$ *et soit* $i_0$ *le plus petit entier tel que* $y_{i_0} \neq 0$. *Alors* $y \in Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ *si et seulement s'il existe* $C_0 \in E^\times$ *et* $(C_1, ..., C_{k-i_0-2}) \in E^{k-i_0-2}$ *tels que :*

$$\begin{aligned} y_{i_0} &= C_0(e_1 + \mathfrak{L}e_2), \\ y_i &= C_{i-i_0}(e_1 + \mathfrak{L}e_2) + \sum_{j=0}^{i-i_0-1} \frac{(-1)^{i-i_0-j+1}}{i-i_0-j} C_j e_2 \quad, \ i_0 + 1 \leq i \leq k-2 \end{aligned}$$

*où* $(e_1, e_2)$ *sont les vecteurs de base de* $D(\mu, \mathfrak{L})$ *définis au (iv) de l'exemple 3.1.2.2.*

*Démonstration.* Analogue à [Br2],prop.6.1.2.1. □

Les cinq propositions qui suivent donnent certains des $\mathfrak{O}$-modules fortement divisibles que contiennent les $\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$. Nous ne donnons des preuves complètes que pour deux des huit cas à traiter (prop.4.2.4.2 (i) et prop.4.2.4.5), les autres se montrant de manière analogue. Rappelons que $a(\mathfrak{L}) = (-1)^{\frac{k}{2}-1}\Big(1 + \frac{k}{2}\big(\frac{k}{2} - 1\big)\big(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1}\big)\Big)$ (cf. formule (4)).

**Proposition 4.2.4.2.** *Supposons* $val_p(a(\mathfrak{L})) = 0$.
*(i) Si* $val_p(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1}) < 1$, *alors* $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p} e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1})\frac{e_2}{p} \subset$

$\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ *est stable par* $\varphi$ *et* $N$. *Muni de* $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L}) = \mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$, *c'est un* $\mathfrak{O}$*-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\big) \end{pmatrix}$$

*avec* $*$ *non nul et peu ramifié,*
*(ii) si* $val_p(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1}) \geq 1$, *alors* $\overline{a(\mathfrak{L})} = (-1)^{\frac{k}{2}-1}$ *et* $\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}e_2 \subset \mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ *est stable par* $\varphi$ *et* $N$. *Muni de* $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L}) = \mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$, *c'est un* $\mathfrak{O}$*-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1} \end{pmatrix} \otimes \lambda\big((-1)^{\frac{k}{2}-1}\overline{\mu}^{-1}\big)$$

*avec* $*$ *très ramifié,*
*(iii) pour tout* $\mathfrak{L}$ *tel que* $val_p(a(\mathfrak{L})) = 0$, $\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}e_2$ *est stable par* $\varphi$ *et* $N$. *Muni de* $Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L}) = \mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$, *c'est un* $\mathfrak{O}$*-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\big) \end{pmatrix}$$

*avec* $*$ *non nul.*

*Démonstration.* On pose $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$, $\mathcal{M}_Z = \mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L})$ et $\beta = \mathrm{val}_p(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1})$.
(i) Considérons les deux éléments $(U,V)$ de $\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} U = (u-p)(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1})p^{k/2-2}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_U(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2) + D_U(\mathfrak{L},i)e_2\big) \\ V = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_V(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2) + D_V(\mathfrak{L},i)e_2\big). \end{cases}$$

On vérifie par un changement de base (de la base $(e_1+\mathfrak{L}e_2, e_2)$ à la base du réseau dans l'énoncé) et en utilisant la proposition 4.2.4.1 que $U, V \in \mathcal{M}_V \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L}) = Fil^{k-1}\mathcal{M}_V$. De plus, un calcul donne modulo $(p^k, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(U) = -p^{k-1}\mu\Big(c_U(\mathfrak{L})(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)+(d_U(\mathfrak{L})-c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\frac{e_2}{p}\Big) \\ \varphi(V) = p^{k-1}\mu\Big(c_V(\mathfrak{L})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)+\frac{d_V(\mathfrak{L})-c_V(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big). \end{cases}$$

Par le lemme 4.2.3.2 et les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, $c_V(\mathfrak{L})$ et $d_U(\mathfrak{L}) - c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L})$ sont inversibles dans $S_{\mathfrak{O}}$, ce qui entraîne que $(\varphi(U), \varphi(V))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$. Montrons $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_V) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_V$. On déduit de la proposition 4.2.4.1 et du lemme 4.2.3.6 que tout élément de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V$ s'écrit $y+z$, $z \in Fil^{k-1}S_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_V$ et $y = (u-p)^{i_0}y'$ avec $0 \leq i_0 \leq k-2$ et :

$$y' = \sum_{i=0}^{n}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_i\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + \Big(pD_i + \big(p\mathfrak{L} - (\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1})\big)C_i\Big)\frac{e_2}{p}\Big)$$

où $n = k-2-i_0$, $(C_i, D_i)_{0\leq i\leq n}$ satisfont l'hypothèse (H 4.2.2.1) (cf. §4.2.2), $C_0 \in \mathfrak{O}\setminus\{0\}$, $C_i \in p^i\mathfrak{O}$ $(1 \leq i \leq n)$ et $D_i + \mathfrak{L}C_i \in p^{i+\beta-1}\mathfrak{O}$ $(1 \leq i \leq n)$. Il suffit de voir que $\varphi(y') \in$

$p^{n+1}\mathcal{M}_V$ c'est-à-dire :

$$p^{k/2}\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{u^p-p}{p}\Big)^i\bigg(\varphi(C_i)\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)+\big(\varphi(D_i)-\delta_V(\mathfrak{L})\varphi(C_i)\big)\frac{e_2}{p}\bigg)\in p^{n+1}\mathcal{M}_V.$$

• Si $n\le \frac{k}{2}-2$, il est clair que $\varphi(y')\in p^{n+1}\mathcal{M}_V$.
• Si $\frac{k}{2}-1\le n\le k-4$, $C_i\in p^i\mathfrak{O}$ et $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L})\ge 0$ impliquent $D_i\in p^{i-1}\mathfrak{O}$ pour $0\le i\le n$. Donc $C_i\in p^{n-k/2+2}\mathfrak{O}$ pour $n-k/2+2\le i\le n$ et $D_i\in p^{n-k/2+2}\mathfrak{O}$ pour $n-k/2+3\le i\le n$. Les éléments $(C_i)_{0\le i\le n-k/2+1}$ sont donc solution du système inversible suivant, dit de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{(-1)^{n-k/2+4}}{n-k/2+3}C_0+ & \cdots & +\frac{(-1)^3}{2}C_{n-k/2+1} & \in & p^{n-k/2+2}\mathfrak{O}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \frac{(-1)^{n+1}}{n}C_0+ & \cdots & +\frac{(-1)^{k/2}}{k/2-1}C_{n-k/2+1} & \in & p^{n-k/2+2}\mathfrak{O}\end{array}\right.$$

d'où $C_i\in p^{n-k/2+2}\mathfrak{O}$, $0\le i\le n$. D'après la condition (H 4.2.2.1), on a aussi $D_i\in p^{n-k/2+2}\mathfrak{O}$ pour $0\le i\le n$. Donc, pour $k/2-1\le n\le k-4$, $\varphi(y')\in p^{n+1}(S_{\mathfrak{O}}pe_1\oplus S_{\mathfrak{O}}e_2)\subset p^{n+1}\mathcal{M}_V$.
• Si $n=k-3$, $C_i\in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $k/2-1\le i\le k-3$ et $D_i\in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $k/2\le i\le k-3$. De plus $C_i\in p^{k/2-2}\mathfrak{O}$, $k/2-2\le i\le k-3$ et $D_i\in p^{k/2-2}\mathfrak{O}$, $k/2-1\le i\le k-3$. On en déduit $D_i,C_i\in p^{k/2-2}\mathfrak{O}$, $0\le i\le k-3$ et, modulo $p$, $\big(\frac{C_i}{p^{k/2-2}}\big)_{1\le i\le k/2-2}$ satisfait les mêmes équations que $\big(\frac{C_0}{p^{k/2-2}}C_U(\mathfrak{L},i)\big)_{1\le i\le k/2-2}$. D'où $D_{k/2-1}+\mathfrak{L}C_{k/2-1}=C_0D_U(\mathfrak{L},k/2-1)$ modulo $p^{k/2-1}$. D'après le lemme 4.2.3.5, $D_U(\mathfrak{L},k/2-1)$ est inversible. On en déduit $\mathrm{val}_p(C_0)\ge k/2-2+\beta$, et $\varphi(y')\in p^{k-2}\mathcal{M}_V$.
• Si $n=k-2$, $C_i\in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $k/2-1\le i\le k-2$ et $D_i\in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $k/2\le i\le k-2$. On en déduit $D_i,C_i\in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $0\le i\le k-2$. Donc $y'-\frac{C_0}{p^{k/2-1}}V=\frac{u-p}{p}y''$ avec $\frac{y''}{p}\in Fil^{k-3}\mathcal{M}_V$ et comme $\varphi(V)\in p^{k-1}\mathcal{M}_V$, on est ramené au cas $n=k-3$.
Donc $\mathcal{M}_V$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. Par ailleurs, modulo $(p,Fil^pS_{\mathfrak{O}})$, on vérifie que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U & = & u^{\frac{k}{2}-1}\Big(C_U(\mathfrak{L},k/2-2)(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2-(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\frac{e_2}{p}\big)+uD_U(\mathfrak{L},k/2-1)(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\frac{e_2}{p}\Big)\\ V & = & u^{\frac{k}{2}-1}\Big(C_V(\mathfrak{L},k/2-1)\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big)+\big(D_V(\mathfrak{L},k/2-1)\frac{p}{\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}}-C_V(\mathfrak{L},k/2-1)\big)(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\frac{e_2}{p}\Big).\end{array}\right.$$

Et un calcul montre que $\mathcal{M}_V\otimes\mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V\otimes\mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ (cf. §3.2.1, c'est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$) provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}}\otimes\mathbf{F}$ (et après un changement de base convenable) de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ : $\big(M=\mathbf{F}f_1\oplus\mathbf{F}f_2, Fil^{\frac{k}{2}-1}M=M, Fil^{\frac{k}{2}}M=\mathbf{F}f_1, Fil^{\frac{k}{2}+1}M=0, \varphi_{\frac{k}{2}-1}(f_2)=\overline{\mu}\overline{a(\mathfrak{L})}f_2, \varphi_{\frac{k}{2}}(f_1)=\overline{\mu}\,\overline{(a(\mathfrak{L})}^{-1}f_1+f_2)\big)$ d'où on déduit le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_V)\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbf{F}$ (cf. preuve de la proposition 4.2.1).
(ii) Considérons les deux éléments $(U,V)$ de $\mathcal{M}_V\cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} U=(u-p)p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_U(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2)+D_U(\mathfrak{L},i)e_2\big)\\ V=p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_V(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2)+D_V(\mathfrak{L},i)e_2\big).\end{array}\right.$$

Un calcul donne modulo $(p^k,Fil^pS_{\mathfrak{O}})$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(U) & = & -p^{k-1}\mu(d_U(\mathfrak{L})-c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))e_2\\ \varphi(V) & = & p^{k-1}\mu\Big(c_V(\mathfrak{L})\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big)+\frac{d_V(\mathfrak{L})-c_V(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)\end{array}\right.$$

et modulo $(p, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} U &= u^{k/2}D_U(\mathfrak{L},k/2-1)e_2 \\ V &= u^{k/2-1}\Big(C_V(\mathfrak{L},k/2-1)\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big)+\big(D_V(\mathfrak{L},k/2-1)+(\mathfrak{L}-\frac{\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}}{p})C_V(\mathfrak{L},k/2-1)\big)e_2\Big). \end{cases}$$

En utilisant le lemme 4.2.3.2 et les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, on voit que $(\varphi(U), \varphi(V))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$. Une preuve analogue à (i) donne aussi $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_V) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_V$ de sorte que $\mathcal{M}_V$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. De plus, un calcul montre que $\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ (cf. §3.2.1) provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ (et après un changement de base convenable) de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ et d'un endomorphisme $\mathbf{F}$-linéaire $N$ : $\big(M = \mathbf{F}f_1 \oplus \mathbf{F}f_2, Fil^{\frac{k}{2}-1}M = M, Fil^{\frac{k}{2}}M = \mathbf{F}f_1, Fil^{\frac{k}{2}+1}M = 0, \varphi_{\frac{k}{2}-1}(f_2) = \overline{\mu}(-1)^{\frac{k}{2}-1}f_2, \varphi_{\frac{k}{2}}(f_1) = \overline{\mu}(-1)^{\frac{k}{2}-1}(f_1 + (c + (\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1})/p)f_2), N(f_1) = f_2, N(f_2) = 0\big)$ où $c$ est une constante dans $\mathbf{F}$ indépendante de $\mathfrak{L}$ (que l'on peut calculer explicitement). On en déduit facilement le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_V) \otimes \mathbf{F}$ (cf. preuve de la proposition 4.2.1).
(iii) Considérons les deux éléments $(W, Z)$ de $\mathcal{M}_Z \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} W = (u-p)p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_W(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2)+D_W(\mathfrak{L},i)e_2\big) \\ Z = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_Z(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2)+D_Z(\mathfrak{L},i)e_2\big). \end{cases}$$

Un calcul donne modulo $(p^k, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(W) &= -p^{k-1}\mu(d_W(\mathfrak{L})-c_W(\mathfrak{L})\delta_Z(\mathfrak{L}))e_2 \\ \varphi(Z) &= p^{k-1}\mu\Big(c_Z(\mathfrak{L})\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\big)+\frac{d_Z(\mathfrak{L})-c_Z(\mathfrak{L})\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \end{cases}$$

et modulo $(p, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} W &= u^{k/2-1}\big(-(\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L}))C_W(\mathfrak{L},k/2-1)+uD_W(\mathfrak{L},k/2-1)\big)e_2 \\ Z &= u^{k/2-2}\Big(\big(-(\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L}))C_Z(\mathfrak{L},k/2-2)+uD_Z(\mathfrak{L},k/2-1)\big)e_2+u^2\frac{D_Z(\mathfrak{L},k/2)}{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\big)\Big). \end{cases}$$

En utilisant le lemme 4.2.3.2 et les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, on voit que $(\varphi(W), \varphi(Z))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_Z$. Une preuve analogue à (i) donne aussi $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_Z$ de sorte que $\mathcal{M}_Z$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. De plus, un calcul montre que $\mathcal{M}_Z \otimes \mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ est isomorphe à l'objet suivant de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ (en notant $S_{\mathbf{F}} = S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$) : $\big(\mathcal{M} = S_{\mathbf{F}}f_1 \oplus S_{\mathbf{F}}f_2$, $Fil^{k-1}\mathcal{M} = S_{\mathbf{F}}\big(u^{\frac{k}{2}-2}(u^2f_1+f_2)\big) + S_{\mathbf{F}}u^{\frac{k}{2}-1}f_2 + Fil^pS_{\mathbf{F}}\mathcal{M}$, $\varphi_{k-1}\big(u^{k/2-2}(u^2f_1+f_2)\big) = (-1)^{k/2}\overline{\mu}\overline{a(\mathfrak{L})}f_1$, $\varphi_{k-1}(u^{k/2-1}f_2) = (-1)^{k/2-1}\overline{\mu}\overline{a(\mathfrak{L})}^{-1}f_2$, $N(f_2) = 0$, $N(f_1) = 2\overline{a(\mathfrak{L})}^{-2}f_2\big)$. On en déduit facilement le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_Z) \otimes \mathbf{F}$. □

**Proposition 4.2.4.3.** *Supposons $val_p(a(\mathfrak{L})) > 0$, alors $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}\frac{e_2}{p}$ est stable par $\varphi$ et $N$. Muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$, c'est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p}\omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}}\Big) \otimes \lambda(\overline{\mu}^{-1}).$$

*Démonstration.* On pose $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})$. Considérons les deux éléments $(U, V)$ de $\mathcal{M}_V \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} U = (u-p)p^{k/2-2}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_U(\mathfrak{L}, i)(e_1 + \mathfrak{L}e_2) + D_U(\mathfrak{L}, i)e_2\big) \\ V = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_V(\mathfrak{L}, i)(e_1 + \mathfrak{L}e_2) + D_V(\mathfrak{L}, i)e_2\big). \end{cases}$$

Un calcul donne modulo $(p^k, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(U) & = & -p^{k-1}\mu\Big(c_U(\mathfrak{L})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)+(d_U(\mathfrak{L})-c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))\frac{e_2}{p}\Big) \\ \varphi(V) & = & p^{k-1}\mu\Big(c_V(\mathfrak{L})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)+(d_V(\mathfrak{L})-c_V(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))\frac{e_2}{p}\Big) \end{cases}$$

et modulo $(p, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} U & = & u^{k/2-1}\Big(C_U(\mathfrak{L},k/2-2)\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)+\Big(D_U(\mathfrak{L},k/2-1)u-(\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L}))C_U(\mathfrak{L},k/2-2)\Big)\frac{e_2}{p}\Big) \\ V & = & u^{k/2-1}\Big(C_V(\mathfrak{L},k/2-1)\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)-C_V(\mathfrak{L},k/2-1)(\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L}))\frac{e_2}{p}\Big). \end{cases}$$

En utilisant les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, on voit que $(\varphi(U), \varphi(V))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$. Une preuve analogue à la preuve de proposition 4.2.4.2 (i) donne aussi $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_V) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_V$ de sorte que $\mathcal{M}_V$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. De plus, un calcul montre que $\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ (et après un changement de base convenable) de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ : $\big(M = \mathbf{F}f_1 \oplus \mathbf{F}f_2, Fil^{\frac{k}{2}-1}M = M, Fil^{\frac{k}{2}}M = \mathbf{F}f_1, Fil^{\frac{k}{2}+1}M = 0, \varphi_{\frac{k}{2}-1}(f_2) = -\overline{\mu}f_1, \varphi_{\frac{k}{2}}(f_1) = \overline{\mu}f_2\big)$. On en déduit le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_V) \otimes \mathbf{F}$. □

**Proposition 4.2.4.4.** *Supposons $val_p(a(\mathfrak{L})) < -k/2+2$ i.e. $\ell < -k/2+2$, alors $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}p^{k/2-2}\mathfrak{L}e_2$ est stable par $\varphi$ et $N$. Muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$, c'est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p}\omega_2^{k-1}\Big) \otimes \lambda\big(\overline{\mu}^{-1}\big).$$

*Démonstration.* On pose $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})$. Considérons les deux éléments $(U, V)$ de $\mathcal{M}_V \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} U = (u-p)^{k-1}\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \\ V = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\big(C_V(\mathfrak{L}, i)(e_1 + \mathfrak{L}e_2) + D_V(\mathfrak{L}, i)e_2\big). \end{cases}$$

Un calcul donne modulo $(p^k, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(U) & = & (-p)^{k-1}\mu p^{k/2-2}\mathfrak{L}e_2 \\ \varphi(V) & = & p^{k-1}\mu\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \end{cases}$$

et modulo $(p, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} U & = & u^{k-1}\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \\ V & = & -p^{k/2-2}\mathfrak{L}e_2 + u^{k-2}p^{-k/2+2}\mathfrak{L}^{-1}\frac{D_V(\mathfrak{L},k-2)}{1+\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})}\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big). \end{cases}$$

On voit que $(\varphi(U), \varphi(V))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$. On a encore $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_V) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_V$ de sorte que $\mathcal{M}_V$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. De plus, un calcul montre que $\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$

muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ (et après un changement de base convenable) de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ : $\big(M = \mathbf{F}f_1 \oplus \mathbf{F}f_2, Fil^0 M = M, Fil^{k-1}M = \mathbf{F}f_1, Fil^k M = 0, \varphi_0(f_2) = -\overline{\mu}f_1, \varphi_{k-1}(f_1) = \overline{\mu}f_2\big)$. On en déduit le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_V) \otimes \mathbf{F}$. $\square$

**Proposition 4.2.4.5.** *Supposons $-k/2 + 2 < val_p(a(\mathfrak{L})) < 0$ et $val_p(a(\mathfrak{L})) \notin \mathbf{Z}$ i.e. $-k/2 + 2 < \ell < 0$ et $\ell \notin \mathbf{Z}$, alors $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}\big(p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\frac{e_2}{p}\big)$ est stable par $\varphi$ et $N$. Muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$, c'est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{\frac{k}{2}-[\ell]+p(\frac{k}{2}+[\ell]-1)}\Big) \otimes \lambda\big(\overline{\mu}^{-1}\big).$$

*Démonstration.* On pose $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})$ et $\beta = \ell - [\ell]$. Considérons les deux éléments $(U, V)$ de $\mathcal{M}_V \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} U = (u-p)p^{k/2-2-[\ell]}\mathfrak{L}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_U(\mathfrak{L}, i)(e_1 + \mathfrak{L}e_2) + D_U(\mathfrak{L}, i)e_2\Big) \\ V = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_V(\mathfrak{L}, i)(e_1 + \mathfrak{L}e_2) + D_V(\mathfrak{L}, i)e_2\Big). \end{cases}$$

Un calcul donne modulo $(p^k, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(U) = -p^{k-1}\mu\Big(c_U(\mathfrak{L})p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + (d_U(\mathfrak{L}) - c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\frac{e_2}{p}\Big) \\ \varphi(V) = p^{k-1}\mu\Big(c_V(\mathfrak{L})\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + p^{1+[\ell]}\mathfrak{L}^{-1}\frac{d_V(\mathfrak{L}) - c_V(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L})}{p}p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\frac{e_2}{p}\Big) \end{cases}$$

et modulo $(p, Fil^p S_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} U = u^{k/2+[\ell]-1}\Big(\Big(-p^{-[\ell]}\mathfrak{L}C_U(\mathfrak{L}, k/2+[\ell]-2) + u^{1-[\ell]}D_U(\mathfrak{L}, k/2-1)\Big)p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\frac{e_2}{p} + \\ \qquad u^{1-2[\ell]}\frac{D_U(\mathfrak{L}, k/2-[\ell]-1)}{1+\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L})}\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)\Big) \\ V = u^{k/2+[\ell]-1}\Big(\Big(-(1+\mathfrak{L}^{-1}\delta_V(\mathfrak{L}))C_V(\mathfrak{L}, k/2+[\ell]-1) + u^{-[\ell]}D_V(\mathfrak{L}, k/2-1)p^{1+[\ell]}\mathfrak{L}^{-1}\Big)p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\frac{e_2}{p} + \\ \qquad u^{-2[\ell]}D_V(\mathfrak{L}, k/2-1-[\ell])\frac{p^{1+[\ell]}\mathfrak{L}^{-1}}{1+\delta_V(\mathfrak{L})\mathfrak{L}^{-1}}\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big)\Big). \end{cases}$$

Comme $\ell \notin \mathbf{Z}$, $\mathrm{val}_p(p^{-[\ell]}\mathfrak{L}) > 0$ et $\mathrm{val}_p(p^{1+[\ell]}\mathfrak{L}^{-1}) > 0$. D'après le lemme 4.2.3.2 et les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, $c_V(\mathfrak{L})$ et $d_U(\mathfrak{L}) - c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L})$ sont inversibles dans $S_{\mathfrak{O}}$, ce qui entraîne que $(\varphi(U), \varphi(V))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$. Montrons $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_V) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_V$. On déduit de la proposition 4.2.4.1 et du lemme 4.2.3.6 que tout élément de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V$ s'écrit $y + z$, $z \in Fil^{k-1}S_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_V$ et $y = (u-p)^{i_0}y'$ avec $0 \leq i_0 \leq k-2$ et :

$$y' = \sum_{i=0}^{n}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_i\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + \Big(D_i + \big(\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}\big)C_i\Big)\frac{e_2}{p}\Big)$$

où $n = k-2-i_0$, $(C_i, D_i)_{0 \leq i \leq n}$ satisfont l'hypothèse (H 4.2.2.1), $C_0 \in \mathfrak{O} \setminus \{0\}$, $C_i \in p^i\mathfrak{O}$ $(1 \leq i \leq n)$ et $D_i + p^{\ell-1}\big((p-1)\alpha + \mathfrak{L}^{-1}(H_{k/2+[\ell]-1} + H_{k/2-[\ell]-1})\big)C_i \in p^{i+\beta-1}\mathfrak{O}$ $(0 \leq i \leq n)$. Il suffit de voir que $\varphi(y') \in p^{n+1}\mathcal{M}_V$ c'est-à-dire :

$$p^{k/2}\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{u^p - p}{p}\Big)^i\Big(\varphi(C_i)\Big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + \big(\varphi(D_i) - \delta_V(\mathfrak{L})\varphi(C_i)\big)\frac{e_2}{p}\Big) \in p^{n+1}\mathcal{M}_V.$$

Des conditions sur les $C_i, D_i$, on obtient :

$$C_0 \in p^{-[\ell]}\mathfrak{O}, C_1 \in p^{-\ell+1}\mathfrak{O}, \ldots, C_{-[\ell]} \in p^{-\ell+1}\mathfrak{O},$$

$$C_{-[\ell]+1} \in p^{-[\ell]+1}\mathfrak{O}, \ldots, C_n \in p^n\mathfrak{O}.$$

Puis par récurrence sur $0 \leq r \leq k/2 - 1 + [\ell]$ pour $-2[\ell] + 2r \leq n \leq k-2$ :

$$C_0 \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O}, \ldots, C_r \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O},$$

$$C_{r+1} \in p^{-\ell+r+1}\mathfrak{O}, \ldots, C_{-[\ell]+r} \in p^{-\ell+r+1}\mathfrak{O},$$

$$C_{-[\ell]+r+1} \in p^{-[\ell]+r+1}\mathfrak{O}, \ldots, C_n \in p^n\mathfrak{O}.$$

En effet, supposons le résultat acquis pour $r-1$. Alors $C_i, D_i \in p^{-[\ell]+r-1}\mathfrak{O}$, $0 \leq i \leq n$. D'après les hypothèses sur les coefficients $C_i, D_i$, on a alors $C_i \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O}$, $r \leq i \leq n$ et $D_i \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O}$, $-2[\ell]+1+r \leq i \leq n$. On en déduit (en écrivant un système de Cauchy dont $(C_i)_{0 \leq i \leq r-1}$ modulo $p^{-[\ell]+r}$ est la solution) $C_i, D_i \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O}$, $0 \leq i \leq n$. Ainsi $C_i \in p^{-\ell+r+1}\mathfrak{O} + p^{-[\ell]+i}\mathfrak{O}$ et $C_i \in p^{-\ell+r+1}\mathfrak{O} \cap p^i\mathfrak{O}$ pour $r+1 \leq i \leq n$ d'où la récurrence.
On en déduit :

- Si $0 \leq n \leq -2[\ell]$, alors $n+2 \leq k/2 - [\ell]$ et $C_i, D_i \in p^{-[\ell]}\mathfrak{O}$ donc $\varphi(y') \in p^{n+1}(S_{\mathfrak{O}}p(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2) \oplus S_{\mathfrak{O}}e_2) \subset p^{n+1}\mathcal{M}_V$.
- Si $n = -2[\ell] + 2r + 1$ avec $0 \leq r \leq k/2 + [\ell] - 3$, alors $n + 2 \leq -[\ell] + r + k/2$ et $C_i, D_i \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O}$ donc $\varphi(y') \in p^{n+1}(S_{\mathfrak{O}}p(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2) \oplus S_{\mathfrak{O}}e_2) \subset p^{n+1}\mathcal{M}_V$.
- Si $n = -2[\ell]+2r$ avec $1 \leq r \leq k/2+[\ell]-2$ alors $n+2 \leq -[\ell]+k/2+r$ et $C_i, D_i \in p^{-[\ell]+r}\mathfrak{O}$ donc $\varphi(y) \in p^{n+1}(S_{\mathfrak{O}}p(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2) \oplus S_{\mathfrak{O}}e_2) \subset p^{n+1}\mathcal{M}_V$.
- Si $n = -2[\ell] + 2r + 1 = k - 3$ avec $r = k/2 + [\ell] - 2$, alors $C_i, D_i \in p^{k/2-2}\mathfrak{O}$. De plus $C_i \in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $k/2 - 1 + [\ell] \leq i \leq k-3$ et $D_i \in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$, $k/2 - [\ell] \leq i \leq k-3$. Donc $(\frac{C_i}{p^{k/2-2}})_{1 \leq i \leq k/2-2+[\ell]}$ satisfait les mêmes équations modulo $p$ que $\left(\frac{C_0}{p^{k/2-2}}C_U(\mathfrak{L}, i)\right)_{1 \leq i \leq k/2-2+[\ell]}$ d'où $D_{k/2-1} = C_0 D_U(\mathfrak{L}, k/2-1)$ et $C_{k/2-1} = 0$ modulo $p^{k/2-1}$. D'après le lemme 4.2.3.5 on en déduit $C_0 \in p^{k/2-2+\beta}\mathfrak{O}$ et $\varphi(y') \in p^{k-1}\mathcal{M}_V$.
- Si $n = -2[\ell]+2r = k-2$ avec $r = k/2+[\ell]-1$, alors $C_i, D_i \in p^{k/2-1}\mathfrak{O}$ et $y' - \frac{C_0}{p^{k/2-1}}V = \frac{u-p}{p}y''$ avec $y''/p \in Fil^{k-3}\mathcal{M}$. Donc $\varphi(y') \in p^{k-1}\mathcal{M}_V$.

Donc $\mathcal{M}_V$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. Un calcul montre que $\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ (et après un changement de base convenable) de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ : $\big(M = \mathbf{F}f_1 \oplus \mathbf{F}f_2, Fil^{\frac{k}{2}+[\ell]-1}M = M, Fil^{\frac{k}{2}-[\ell]}M = \mathbf{F}f_1, Fil^{\frac{k}{2}-[\ell]+1}M = 0, \varphi_{\frac{k}{2}+[\ell]-1}(f_2) = -\overline{\mu}f_1, \varphi_{\frac{k}{2}-[\ell]}(f_1) = \overline{\mu}f_2\big)$. On en déduit le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_V) \otimes \mathbf{F}$. $\square$

**Proposition 4.2.4.6.** *Supposons $val_p(a(\mathfrak{L})) \in \{-k/2+2, ..., -1\}$ i.e. $\ell \in \{-k/2+2, ..., -1\}$ et soit $b(\mathfrak{L}) = (-1)^{k/2-\ell-1}(k/2-\ell)\binom{k/2-\ell-1}{-2\ell+1}\alpha \in \mathfrak{O}^\times$ (rappellons que $\mathfrak{L} = \alpha p^\ell$).*
*(i) $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}\frac{e_2}{p}$ est stable par $\varphi$ et $N$. Muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) = \mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu, \mathfrak{L})$, c'est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}-\ell}\lambda\big(\overline{b(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}+\ell-1}\lambda\big(\overline{b(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\big) \end{pmatrix}$$

*avec $*$ non nul,*
*(ii)* $\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L}) = S_{\mathfrak{O}}\big(e_1 + \frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\big) \oplus S_{\mathfrak{O}}e_2$ *est stable par* $\varphi$ *et* $N$*. Muni de* $Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L}) = \mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L}) \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$*, c'est un* $\mathfrak{O}$*-module fortement divisible et :*

$$T_{st,k}(\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbf{F} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}+\ell-1}\lambda\big(\overline{b(\mathfrak{L})}\,\overline{\mu}^{-1}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-\ell}\lambda\big(\overline{b(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\big) \end{pmatrix}$$

*avec $*$ non nul.*

*Démonstration.* On pose $\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$ et $\mathcal{M}_Z = \mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L})$.
(i) Considérons les deux éléments $(U,V)$ de $\mathcal{M}_V \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} U = (u-p)p^{k/2-2}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_U(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2) + D_U(\mathfrak{L},i)e_2\Big) \\ V = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_V(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2) + D_V(\mathfrak{L},i)e_2\Big). \end{cases}$$

Un calcul donne modulo $(p^k, Fil^pS_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(U) = -p^{k-1}\mu\Big(c_U(\mathfrak{L})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + (d_U(\mathfrak{L}) - c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))\frac{e_2}{p}\Big) \\ \varphi(V) = p^{k-1}\mu c_V(\mathfrak{L})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \end{cases}$$

et modulo $(p, Fil^pS_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} U = u^{k/2+\ell-1}\Big(-\alpha C_U(\mathfrak{L},k/2+\ell-2) + u^{1-\ell}D_U(\mathfrak{L},k/2-1)\Big)\frac{e_2}{p} + u^{k/2-\ell}\alpha^{-1}D_U(\mathfrak{L},k/2-\ell-1)\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \\ V = -u^{k/2+\ell-1}\alpha C_V(\mathfrak{L},k/2+\ell-1)\frac{e_2}{p}. \end{cases}$$

En utilisant le lemme 4.2.3.2 et les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, on voit que $(\varphi(U),\varphi(V))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$. Une preuve analogue à la preuve de la proposition 4.2.4.5 donne aussi $\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_V) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_V$ de sorte que $\mathcal{M}_V$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. De plus, un calcul montre que $\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ provient par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$ (et après un changement de base convenable) de l'objet suivant de $\underline{MF}_{tor}^{f,k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ :
$\big(M = \mathbf{F}f_1 \oplus \mathbf{F}f_2, Fil^{\frac{k}{2}+\ell-1}M = M, Fil^{\frac{k}{2}-\ell}M = \mathbf{F}f_1, Fil^{\frac{k}{2}-\ell+1}M = 0, \varphi_{\frac{k}{2}+\ell-1}(f_2) = \overline{\mu}\overline{b(\mathfrak{L})}f_2, \varphi_{\frac{k}{2}-\ell}(f_1) = \overline{\mu}\big(\overline{b(\mathfrak{L})}\big)^{-1}f_1 + f_2\big)$. On en déduit le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_V) \otimes \mathbf{F}$.
(ii) Considérons les deux éléments $(W,Z)$ de $\mathcal{M}_Z \cap Fil^{k-1}\mathcal{D}(\mu,\mathfrak{L})$ suivants :

$$\begin{cases} W = (u-p)p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-3}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_W(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2) + D_W(\mathfrak{L},i)e_2\Big) \\ Z = p^{k/2-1}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{(u-p)^i}{p^i}\Big(C_Z(\mathfrak{L},i)(e_1+\mathfrak{L}e_2) + D_Z(\mathfrak{L},i)e_2\Big). \end{cases}$$

Un calcul donne modulo $(p^k, Fil^pS_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} \varphi(W) = -p^{k-1}\mu(d_W(\mathfrak{L}) - c_W(\mathfrak{L})\delta_Z(\mathfrak{L}))e_2 \\ \varphi(Z) = p^{k-1}\mu\Big(c_Z(\mathfrak{L})\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) + \frac{d_Z(\mathfrak{L}) - c_Z(\mathfrak{L})\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big) \end{cases}$$

et modulo $(p, Fil^pS_{\mathfrak{O}})$ :

$$\begin{cases} W = u^{k/2+\ell-1}\Big(-\alpha C_W(\mathfrak{L},k/2-2+\ell) + u^{1-\ell}D_W(\mathfrak{L},k/2-1)\Big)e_2 \\ Z = u^{k/2+\ell-2}\Big(-\alpha C_Z(\mathfrak{L},k/2-2+\ell) + u^{1-\ell}D_Z(\mathfrak{L},k/2-1)\Big)e_2 + u^{k/2-\ell}\alpha^{-1}D_Z(\mathfrak{L},k/2-\ell)\Big(e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2\Big). \end{cases}$$

En utilisant le lemme 4.2.3.2 et les corollaires 4.2.3.4 et 4.2.3.7, on voit que $(\varphi(W),\varphi(Z))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_Z$. Une preuve analogue à la preuve de la proposition 4.2.4.5 donne aussi

$\varphi(Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z) \subset p^{k-1}\mathcal{M}_Z$ de sorte que $\mathcal{M}_Z$ est un $\mathfrak{O}$-module fortement divisible. De plus, un calcul montre que $\mathcal{M}_Z \otimes \mathbf{F}$ muni de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z \otimes \mathbf{F}$, $\varphi_{k-1}$ et $N$ est isomorphe à l'objet suivant de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ (en notant $S_{\mathbf{F}} = S_{\mathfrak{O}} \otimes \mathbf{F}$) : $\big(\mathcal{M} = S_{\mathbf{F}} f_1 \oplus S_{\mathbf{F}} f_2$, $Fil^{k-1}\mathcal{M} = S_{\mathbf{F}}\big(u^{\frac{k}{2}+\ell-2}(u^{-2\ell+2}f_1+f_2)\big)+S_{\mathbf{F}}u^{\frac{k}{2}+\ell-1}f_2+Fil^pS_{\mathbf{F}}\mathcal{M}$, $\varphi_{k-1}\big(u^{k/2+\ell-2}(u^{-2\ell+2}f_1+f_2)\big) = (-1)^{k/2+\ell}\overline{\mu}\overline{b(\mathfrak{L})}f_1$, $\varphi_{k-1}(u^{k/2+\ell-1}f_2) = (-1)^{k/2+\ell-1}\overline{\mu}\overline{b(\mathfrak{L})}^{-1}f_2$, $N(f_2) = 0$, $N(f_1) = (2-2\ell)\overline{b(\mathfrak{L})}^{-2}f_2\big)$. On en déduit facilement le résultat sur $T_{st,k}(\mathcal{M}_Z) \otimes \mathbf{F}$. $\square$

Le théorème suivant, analogue semi-stable (pour les poids pairs) de la proposition 4.1.1, se déduit facilement des propositions précédentes et résume les résultats du §4.2 :

**Théorème 4.2.4.7.** *Soit $V$ une représentation semi-stable non cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$, i.e. $V \simeq V(\mu,\mathfrak{L})$ avec $\mu \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times$ et $\mathfrak{L} \in \overline{\mathbf{Q}}_p$. On suppose $1<k<p$, $k$ pair, et on note $\ell = val_p(\mathfrak{L})$ et, si $\ell \in \mathbf{Z}$, $\alpha = \mathfrak{L}/p^\ell$. Soit $H_0 = 0$ et, pour $n$ entier positif non nul, $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$. On pose :*

$$a(\mathfrak{L}) = (-1)^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\big(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}\big)\right) \in \overline{\mathbf{Z}}_p$$

*et si $\ell \in \{-\frac{k}{2}+2, -\frac{k}{2}+1, ..., -1\}$ :*

$$b(\mathfrak{L}) = (-1)^{\frac{k}{2}-\ell-1}\left(\frac{k}{2}-\ell\right)\binom{\frac{k}{2}-\ell-1}{-2\ell+1}\alpha \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times.$$

*Soit $T$ un $\overline{\mathbf{Z}}_p$-réseau de $V$ stable par $G_p$ et $\overline{T}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$.*

*(i) Supposons $val_p\big(a(\mathfrak{L})\big) = 0$.*

– *Si $val_p\big(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}\big) < 1$, alors :*

$$\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\big)\end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ peu ramifié}$$

*ou*

$$\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\big)\end{pmatrix} \text{ avec } * = 0 \text{ si } k=2,$$

– *si $val_p\big(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}\big) \geq 1$, alors :*

$$\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix} \otimes \lambda\big((-1)^{\frac{k}{2}-1}\overline{\mu}^{-1}\big) \text{ avec } * \text{ très ramifié}$$

*ou*

$$\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}-1} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\end{pmatrix} \otimes \lambda\big((-1)^{\frac{k}{2}-1}\overline{\mu}^{-1}\big) \text{ avec } * = 0 \text{ si } k=2.$$

*(ii) Supposons $val_p\big(a(\mathfrak{L})\big) > 0$, alors $\overline{T} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p}\omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}}\Big) \otimes \lambda\big(\overline{\mu}^{-1}\big)$ i.e. $\overline{T}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)}\end{pmatrix}$ et $\det(\overline{T}) \simeq \omega^{k-1}\lambda\big(\overline{\mu}^{-2}\big)$.*

*(iii) Supposons $val_p\big(a(\mathfrak{L})\big) < 0$ (i.e. $\ell < 0$ et $k \neq 2$).*

– *Si* $\ell < -\frac{k}{2}+2$, *alors* $\overline{T} \simeq \left(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p}\omega_2^{k-1}\right)\otimes\lambda\left(\overline{\mu}^{-1}\right)$ *i.e.* $\overline{T}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix}\omega_2^{k-1} & 0\\ 0 & \omega_2^{p(k-1)}\end{pmatrix}$ *et* $\det(\overline{T}) \simeq \omega^{k-1}\lambda\left(\overline{\mu}^{-2}\right)$,

– *si* $-\frac{k}{2}+2 \leq \ell$ *et* $\ell \notin \mathbf{Z}$, *alors* $\overline{T} \simeq \left(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p}\omega_2^{\frac{k}{2}-[\ell]+p(\frac{k}{2}+[\ell]-1)}\right)\otimes\lambda\left(\overline{\mu}^{-1}\right)$ *i.e.* $\overline{T}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}-[\ell]+p(\frac{k}{2}+[\ell]-1)} & 0\\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+[\ell]-1+p(\frac{k}{2}-[\ell])}\end{pmatrix}$ *et* $\det(\overline{T}) \simeq \omega^{k-1}\lambda\left(\overline{\mu}^{-2}\right)$,

– *si* $-\frac{k}{2}+2 \leq \ell$ *et* $\ell \in \mathbf{Z}$, *alors :*

$$\begin{aligned}\overline{T} &\simeq \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-\ell}\lambda\left(\overline{b(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\right) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}+\ell-1}\lambda\left(\overline{b(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\right)\end{pmatrix}\\ &\textit{ou}\\ \overline{T} &\simeq \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}+\ell-1}\lambda\left(\overline{b(\mathfrak{L})}\overline{\mu}^{-1}\right) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-\ell}\lambda\left(\overline{b(\mathfrak{L})}^{-1}\overline{\mu}^{-1}\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## 4.3. **Application aux formes modulaires.**

4.3.1. On fixe un plongement $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$. Soient $N$ un entier $\geq 1$, $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \overline{\mathbf{Q}}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ un caractère de Dirichlet et $f$ une forme modulaire parabolique normalisée de niveau $N$, poids $k \geq 2$ et caractère $\chi$. On suppose de plus que $f$ est vecteur propre des opérateurs de Hecke $T_\ell$ pour tout $\ell$ premier et on note $a_\ell \in \overline{\mathbf{Z}}_p$ la valeur propre correspondante. D'après Deligne, il existe une unique représentation semi-simple (en fait irréductible) :

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$$

non ramifiée en dehors de $Np$ et telle que, si $\ell \nmid Np$, $\mathrm{tr}\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell$ et $\det\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell^{k-1}\chi(\ell)$ où $\mathrm{Frob}_\ell$ est un Frobenius arithmétique en $\ell$ (cf. [DS],th.6.1). De plus, il résulte du théorème de comparaison de [Ts] que $\rho_{f,p} = \rho_f|_{G_p}$ est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$. On note $\overline{\rho}_f$ la semi-simplifiée modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$ de $\rho_f$ et $\overline{\rho}_{f,p} = \overline{\rho}_f|_{G_p}$.

4.3.2. Supposons que $N$ est premier à $p$ et soit $f$ une forme modulaire parabolique normalisée de niveau $N$, poids $k \geq 2$, caractère $\chi$ et vecteur propre des $T_\ell$ de valeur propre $a_\ell$. Par [Ts] $\rho_{f,p}$ est cristalline et d'après l'exemple 3.1.2.2, on a alors les cas suivants :
(i) soit $\rho_{f,p}$ est réductible, auquel cas elle est isomorphe à $V(\mu_1,\mu_2) = V_{st,k}(D(\mu_1,\mu_2))$ avec $\mu_1^{-1}\mu_2^{-1} = \chi(p)$ et $\mu_1^{-1} + p^{k-1}\mu_2^{-1} = a_p$ (en particulier, $a_p$ est alors une unité $p$-adique),
(ii) soit $\rho_{f,p}$ est irréductible, auquel cas elle est isomorphe à $V(\mu,\nu) = V_{st,k}(D(\mu,\nu))$ avec $\mu = \chi(p)^{-1}$ et $\nu = a_p\chi(p)^{-1}$ (en particulier $a_p$ est alors de valuation $> 0$).
Cela se déduit comme dans [Sc],§4.2.3 du résultat de Katz-Messing ([KM]).

**Corollaire 4.3.2.1.** *(Deligne, Fontaine, Serre) Soit $f$ une forme parabolique normalisée de niveau $N$, poids $k$ et caractère $\chi$ avec $(p,N) = 1$ et $1 < k < p$. On suppose $T_\ell(f) = a_\ell f$ pour tout premier $\ell$ avec $a_\ell \in \overline{\mathbf{Z}}_p$.*
*(i) Si $val_p(a_p) = 0$, alors* $\overline{\rho}_{f,p} \simeq \begin{pmatrix}\omega^{k-1}\lambda(\overline{\chi(p)}\overline{a}_p^{-1}) & *\\ 0 & \lambda(\overline{a}_p)\end{pmatrix}$ *avec $*$ peu ramifié si $k = 2$.*

*(ii) Si* $val_p(a_p) > 0$*, alors* $\overline{\rho}_{f,p} \simeq \big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p}\omega_2^{k-1}\big)\otimes\lambda\big(\overline{\chi(p)}^{1/2}\big)$ *i.e.* $\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix}\omega_2^{k-1} & 0\\ 0 & \omega_2^{p(k-1)}\end{pmatrix}$ *et* $\det(\overline{\rho}_{f,p}) \simeq \omega^{k-1}\lambda(\overline{\chi(p)})$.

*Démonstration.* On utilise la proposition 4.1.1 et le fait que $\overline{\mu}_1^{-1} = \overline{a}_p$ et $\overline{\mu}_2^{-1} = \overline{\chi(p)}\overline{a}_p^{-1}$. □

**Remarque 4.3.2.2.** Le cas (i) est bien sûr vrai pour tout $k \geq 2$ et le cas (ii) est encore vrai pour $k \in \{p, p+1\}$ (cf. [Ed],§2.4).

4.3.3. Supposons que $N$ est premier à $p$ et soit $f$ une forme modulaire parabolique normalisée de niveau $Np$, poids $k \geq 2$ et caractère $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \overline{\mathbf{Z}}_p$. On suppose que $f$ est nouvelle en $p$ et vecteur propre des $T_\ell$ de valeur propre $a_\ell$. Il résulte de [Sa] que $\rho_{f,p}$ est semi-stable non cristalline et du (iv) de l'exemple 3.1.2.2 que $\rho_{f,p} \simeq V(\mu,\mathfrak{L}) = V_{st,k}(D(\mu,\mathfrak{L}))$ avec $\mu = p^{k/2-1}a_p^{-1}$ et $\mathfrak{L} = -\mathfrak{L}_p(f)$ où $\mathfrak{L}_p(f)$ est l'invariant associé à $f$ défini comme dans [Maz],§9 et §12 (cette dernière égalité est donc ici une tautologie !). En particulier $\mathrm{val}_p(a_p) = k/2-1$. On déduit alors du théorème 4.2.4.7 :

**Corollaire 4.3.3.1.** *Soit* $f$ *une forme parabolique normalisée de niveau* $Np$*, poids* $k$ *et caractère* $\chi$ *avec* $(p,N)=1$*,* $1<k<p$*,* $k$ *pair et* $\chi$ *trivial en* $p$*. On suppose* $f$ *nouvelle en* $p$ *et* $T_\ell(f) = a_\ell f$ *pour tout premier* $\ell$ *avec* $a_\ell \in \overline{\mathbf{Z}}_p$*. On note* $\mathfrak{L}_p(f)$ *l'invariant alors associé à* $f$ *(avec la définition de [Maz]),* $\ell(f) = val_p(\mathfrak{L}_p(f))$ *et, si* $\ell(f)\in\mathbf{Z}$*,* $\alpha(f) = \mathfrak{L}_p(f)/p^{\ell(f)}$*. Soit* $H_0 = 0$ *et, pour* $n$ *entier positif non nul,* $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$*. On pose :*

$$a(f) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Big(-1+\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\big(\mathfrak{L}_p(f)+2H_{k/2-1}\big)\Big) \in \overline{\mathbf{Z}}_p$$

*et si* $\ell(f) \in \{-\frac{k}{2}+2, -\frac{k}{2}+1, ..., -1\}$ *:*

$$b(f) = (-1)^{\frac{k}{2}-\ell(f)}\Big(\frac{k}{2}-\ell(f)\Big)\binom{\frac{k}{2}-1-\ell(f)}{-2\ell(f)+1}\alpha(f) \in \overline{\mathbf{Z}}_p^\times.$$

*(i) Supposons* $val_p\big(a(f)\big) = 0$*.*

– *Si* $val_p\big(\mathfrak{L}_p(f)+2H_{k/2-1}\big) < 1$*, alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(f)}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big)\end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ peu ramifié}$$

*ou*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda\big(\overline{a(f)}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\lambda\big(\overline{a(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big)\end{pmatrix} \text{ avec } * = 0 \text{ si } k=2,$$

– *si* $val_p\big(\mathfrak{L}_p(f)+2H_{k/2-1}\big) \geq 1$*, alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}} & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix}\otimes\lambda\big(\overline{a_p/(-p)^{\frac{k}{2}-1}}\big) \text{ avec } * \text{ très ramifié}$$

*ou*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-1} & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\end{pmatrix}\otimes\lambda\big(\overline{a_p/(-p)^{\frac{k}{2}-1}}\big) \text{ avec } * = 0 \text{ si } k=2.$$

*(ii) Supposons* $val_p\big(a(f)\big) > 0$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}}\Big) \otimes \lambda\big(\overline{a_p/p^{\frac{k}{2}-1}}\big)$$

*i.e.* $\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)} \end{pmatrix}$ *et* $\det(\overline{\rho}_{f,p}) \simeq \omega^{k-1}\lambda\big(\overline{a_p^2/p^{k-2}}\big)$.

*(iii) Supposons* $val_p\big(a(f)\big) < 0$ *(i.e.* $\ell(f) < 0$ *et* $k \neq 2$*).*

– *Si* $\ell(f) < -\frac{k}{2}+2$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{k-1}\Big) \otimes \lambda\big(\overline{a_p/p^{\frac{k}{2}-1}}\big)$$

*i.e.* $\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)} \end{pmatrix}$ *et* $\det(\overline{\rho}_{f,p}) \simeq \omega^{k-1}\lambda\big(\overline{a_p^2/p^{k-2}}\big)$,

– *si* $-\frac{k}{2}+2 \leq \ell(f)$ *et* $\ell(f) \notin \mathbf{Z}$, *alors :*

$$\overline{\rho}_{f,p} \simeq \Big(\mathrm{Ind}_{G_{p^2}}^{G_p} \omega_2^{\frac{k}{2}-[\ell(f)]+p(\frac{k}{2}+[\ell(f)]-1)}\Big) \otimes \lambda\big(\overline{a_p/p^{\frac{k}{2}-1}}\big)$$

*i.e.* $\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{\frac{k}{2}-[\ell(f)]+p(\frac{k}{2}+[\ell(f)]-1)} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+[\ell(f)]-1+p(\frac{k}{2}-[\ell(f)])} \end{pmatrix}$ *et* $\det(\overline{\rho}_{f,p}) \simeq \omega^{k-1}\lambda\big(\overline{a_p^2/p^{k-2}}\big)$,

– *si* $-\frac{k}{2}+2 \leq \ell(f)$ *et* $\ell(f) \in \mathbf{Z}$, *alors :*

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_{f,p} &\simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}-\ell(f)}\lambda\big(\overline{b(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}+\ell(f)-1}\lambda\big(\overline{b(f)}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) \end{pmatrix} \\ &\textit{ou} \\ \overline{\rho}_{f,p} &\simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}+\ell(f)-1}\lambda\big(\overline{b(f)}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-\ell(f)}\lambda\big(\overline{b(f)}^{-1}\overline{(a_p/p^{\frac{k}{2}-1})}\big) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque 4.3.3.2.** On note que les cas (ii) et (iii) dans le théorème 4.2.4.7 et son corollaire 4.3.3.1 ne peuvent arriver si $k=2$. Par ailleurs, la précision “avec la définition de [Maz]” dans l'énoncé de 4.3.3.1 vient du fait qu'on dispose de deux autres définitions de $\mathfrak{L}_p(f)$ ([Co], [Te]). Cependant, il résulte des travaux de Stevens et de Kato-Kurihara-Tsuji que, lorsque $k$ est pair (ce qui est notre cas), les définitions de [Co] et [Maz] donnent le même élément de $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Des travaux à venir de Coleman et Iovita devraient montrer que la définition de [Te] donne également le même élément. Enfin, on savait déjà par ([Kh], corollary 9) que, pour $f$ comme ci-dessus, on a :

$$(\overline{\rho}_{f,p}|_{I_p})^{ss} \in \left\{\omega^{k-1-i}\oplus\omega^i,\ \omega_2^{k-1-i+pi}\oplus\omega_2^{i+p(k-1-i)},\ 0\leq i\leq \frac{k}{2}-1\right\}$$

(privé de $\{\omega^{k-1}\oplus 1\}$ si $k>2$).

## 5. Déformations semi-stables et multiplicités

Dans toute cette section, $\mathfrak{O}$ désigne l'anneau des entiers d'une extension finie $E$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, $\mathbf{F}$ son corps résiduel et $\pi$ une uniformisante de $\mathfrak{O}$. On fixe un entier $k$ tel que $1 < k < p$.

5.1. **Algèbre commutative.** Si $R$ est une $\mathfrak{O}$-algèbre locale complète (pour la topologie de son idéal maximal), on note $R(\overline{\mathbf{Z}}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}}(R, \overline{\mathbf{Z}}_p)$ les homomorphismes de $\mathfrak{O}$-algèbres continus pour la topologie des idéaux maximaux.

**Lemme 5.1.1.** *Soit $R$ une $\mathfrak{O}$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel $\mathbf{F}$, alors $R(\overline{\mathbf{Z}}_p) = \emptyset$ si et seulement si $R[\frac{1}{\pi}] = 0$.*

*Démonstration.* Si $R\big[\frac{1}{\pi}\big] = 0$, il est clair que $R(\overline{\mathbf{Z}}_p) = \emptyset$. Montrons que $R\big[\frac{1}{\pi}\big] \neq 0$ entraîne $R(\overline{\mathbf{Z}}_p) \neq \emptyset$. Quitte à quotienter $R$ par sa $p^n$-torsion pour tout $n$, on peut le supposer (fidèlement) plat sur $\mathfrak{O}$. Soient $\mathfrak{q}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_r$ une suite maximale d'idéaux premiers de $R\big[\frac{1}{\pi}\big]$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_r \cap R$. Comme $(R/\mathfrak{p})\big[\frac{1}{\pi}\big] = R\big[\frac{1}{\pi}\big]/\mathfrak{q}_r$ est un corps, sa dimension de Krull est nulle et comme $R$ est fidèlement plat sur $\mathfrak{O}$, $\dim\big((R/\mathfrak{p})[\frac{1}{\pi}]\big) = \dim\big(R/(\pi,\mathfrak{p})\big) = 0$ (cf. par exemple [Mat],th.15.2 et th.15.3). Donc $R/(\pi,\mathfrak{p})$ est une $\mathbf{F}$-algèbre artinienne locale non nulle de corps résiduel $\mathbf{F}$. On en déduit facilement que $R/\mathfrak{p}$ est fini sur $\mathfrak{O}$, donc est contenu dans l'anneau des entiers d'une extension finie de $E$ $(= (R/\mathfrak{p})[\frac{1}{\pi}])$. Il est clair qu'alors $\emptyset \neq (R/\mathfrak{p})(\overline{\mathbf{Z}}_p) \subset R(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ ce qui achève la preuve. $\square$

**Lemme 5.1.2.** *Soient $R$, $R_1, ..., R_r$ des $\mathfrak{O}$-algèbres locales plates noethériennes complètes de corps résiduel $\mathbf{F}$ ($r$ entier positif non nul). On suppose qu'il existe une injection de $\mathfrak{O}$-algèbres $R \hookrightarrow R_1 \times ... \times R_r$ qui, composée avec les projections, induit des surjections (continues) $R \twoheadrightarrow R_i$. Alors :*

$$\coprod_{i=1}^{r} R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p) \xrightarrow{\sim} R(\overline{\mathbf{Z}}_p) \text{ si et seulement si } R\Big[\frac{1}{\pi}\Big] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} R_i\Big[\frac{1}{\pi}\Big].$$

*Démonstration.* Notons $I_i = \mathrm{Ker}(R \to R_i)$. Supposons $R[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r R_i[\frac{1}{\pi}]$. Tout élément $f$ de $R(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ donne un morphisme de $R[\frac{1}{\pi}]$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ qui se factorise par un unique $R_i[\frac{1}{\pi}]$. Cela entraîne donc $f(I_i) = 0$ et $f$ se factorise par $R_i$ i.e. provient de $R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ d'où la surjectivité. Puisque $R \to R_i$ est surjectif, on a $R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p) \hookrightarrow R(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ et il est clair que deux éléments de $R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ et $R_j(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ pour $i \neq j$ ne peuvent donner le même élément de $R(\overline{\mathbf{Z}}_p)$, d'où l'injectivité. Réciproquement, supposons $\coprod_{i=1}^r R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p) \xrightarrow{\sim} R(\overline{\mathbf{Z}}_p)$. Comme $\cap_i I_i = \cap_i I_i[\frac{1}{\pi}] = 0$, $R[\frac{1}{\pi}] \simeq R[\frac{1}{\pi}]/(\cap_i I_i[\frac{1}{\pi}])$ et par le “lemme chinois” (cf. par exemple [Mat],th.1.3 et th.1.4), il suffit de montrer $I_i[\frac{1}{\pi}] + I_j[\frac{1}{\pi}] = R[\frac{1}{\pi}]$ pour $i \neq j$. Mais puisque l'application $R \to R/I_i \times R/I_j$ induit une injection $(R/I_i)(\overline{\mathbf{Z}}_p) \coprod (R/I_j)(\overline{\mathbf{Z}}_p) \hookrightarrow R(\overline{\mathbf{Z}}_p)$, on a $(R/(I_i + I_j))(\overline{\mathbf{Z}}_p) = \emptyset$ d'où $(I_i + I_j)[\frac{1}{\pi}] = R[\frac{1}{\pi}]$ par le lemme 5.1.1. $\square$

Il est commode d'introduire la définition suivante :

**Définition 5.1.3.** *Soient $R, R_1, ..., R_r$ des $\mathfrak{O}$-algèbres locales plates noethériennes complètes ($r$ entier positif non nul). On note :*

$$R \sim \prod_{i=1}^{r} R_i$$

*s'il existe un morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R \to \prod_{i=1}^{r} R_i$ tel que :*
*(i) en composant avec les projections, ce morphisme induit des surjections (continues) $R \twoheadrightarrow R_i$ pour tout $i$,*
*(ii) ce morphisme induit un isomorphisme* $R\Big[\dfrac{1}{\pi}\Big] \xrightarrow{\sim} \displaystyle\prod_{i=1}^{r} R_i\Big[\dfrac{1}{\pi}\Big]$.

La condition (ii) entraîne en particulier que la flèche $R \to \prod_{i=1}^{r} R_i$ est injective. Si $r = 1$, $R \sim R_1$ est équivalent à $R \simeq R_1$.

**Exemple 5.1.4.** Soient $n \in \mathbf{N}$ et $R = \mathfrak{O}[[X]] \times_{\mathfrak{O}/\pi^n} \mathfrak{O}[[X]]$ où la flèche $\mathfrak{O}[[X]] \to \mathfrak{O}/\pi^n$ est la surjection canonique sur $\mathfrak{O}$ et envoie $X$ sur 0. On vérifie que $R \sim \mathfrak{O}[[X]] \times \mathfrak{O}[[X]]$.

**Remarque 5.1.5.** Si $R \sim \prod R_i$ et si de plus les $R_i$ sont intègres, alors les $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ker}(R \to R_i)$ sont exactement les idéaux premiers minimaux de $R$.

Si $A$ est un anneau local noethérien, on note, comme au §2.2.2, $e_{max}(A)$ la multiplicité de Samuel de $A$.

**Lemme 5.1.6.** *Soient $R, R_1, ..., R_r$ des $\mathfrak{O}$-algèbres locales plates noethériennes complètes ($r$ entier positif non nul) telles que les $R_i$ ont même dimension et telles que $R \sim \prod_{i=1}^{r} R_i$. Alors :*

$$e_{max}\big(R/(\pi)\big) = \sum_{i=1}^{r} e_{max}\big(R_i/(\pi)\big).$$

*Démonstration.* De l'isomorphisme $R[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} R_i[\frac{1}{\pi}]$ et des platitudes fidèles sur $\mathfrak{O}$, on déduit $\dim(R) = \dim(R[\frac{1}{\pi}]) + 1 = \dim(R_i[\frac{1}{\pi}]) + 1 = \dim(R_i)$ et $\dim(R/(\pi^n)) = \dim(R) - 1 = \dim(R_i) - 1 = \dim(R_i/(\pi^n))$ pour tout $i$ et tout entier $n$. On pose $d = \dim(R) - 1$. Rappelons que si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local noethérien de dimension $d$ et $M$ un $A$-module de type fini, la fonction $\mathrm{long}_A(M/\mathfrak{m}^{n+1}M)$ est un polynôme en $n$ pour $n \gg 0$ de la forme $\frac{e_d(M)}{d!}n^d$+termes de degré plus petit où $e_d(M) \in \mathbf{Z}$ ([Mat],p.107, $e_d(M)$ peut être nul). En particulier, $e_{max}(R/(\pi^n)) = e_d(R/(\pi^n))$ et $e_{max}(R_i/(\pi^n)) = e_d(R_i/(\pi^n))$ pour tout $i$ et $n$. Démontrons le résultat du lemme par récurrence sur $r$. Si $r = 1$, c'est trivial. Si $r = 2$, on a une suite exacte courte de $R$-modules de type fini :

$$0 \to R \to R_1 \times R_2 \to R_1 \otimes_R R_2 \to 0$$

où la surjection est $(r_1, r_2) \mapsto r_1 \otimes 1 - 1 \otimes r_2$ et où $R_1 \otimes_R R_2$ est annulé par une puissance de $\pi$ puisque $R[\frac{1}{\pi}] \simeq R_1[\frac{1}{\pi}] \times R_2[\frac{1}{\pi}]$. Pour $n \gg 0$, on a donc, par le diagramme du serpent associé à la multiplication par $\pi^n$ sur la suite exacte précédente, une suite exacte de $R/(\pi^n)$-modules de type fini :

$$0 \to R_1 \otimes_R R_2 \to R/(\pi^n) \to R_1/(\pi^n) \times R_2/(\pi^n) \to R_1 \otimes_R R_2 \to 0$$

d'où on déduit par [Mat],th.14.6 :

$$e_d(R_1 \otimes_R R_2) - e_d(R/(\pi^n)) + e_d(R_1/(\pi^n) \times R_2/(\pi^n)) - e_d(R_1 \otimes_R R_2) = 0$$

i.e. $e_d(R/(\pi^n)) = e_d(R_1/(\pi^n)) + e_d(R_2/(\pi^n))$. Mais par platitude, on a aussi $e_d(R/(\pi^n)) = ne_d(R/(\pi))$ (resp. avec $R_1$ et $R_2$) d'où $e_d(R/(\pi)) = e_d(R_1/(\pi)) + e_d(R_2/(\pi))$ ce qui achève le cas $r = 2$. Pour $r$ plus grand, remarquons que $R' = R/(\cap_{i=1}^{r-1} I_i)$ vérifie les hypothèses de l'énoncé au cran $r-1$ où $I_i = \mathrm{Ker}(R \to R_i)$. Par récurrence, on a donc $e_d(R'/(\pi)) = \sum_{i=1}^{r-1} e_d(R_i/(\pi))$. Mais le même raisonnement qu'au cran 2 avec $R_1 = R'$ et $R_2 = R_r$ donne $e_d(R/(\pi)) = e_d(R'/(\pi)) + e_d(R_r/(\pi))$ d'où le résultat au cran $r$. □

**Remarque 5.1.7.** En reprenant l'exemple 5.1.4, on voit que $e_{max}\big(R/(\pi)\big) = 2$ mais que $R$ est (topologiquement) engendré sur $\mathfrak{O}$ par 3 générateurs.

**Lemme 5.1.8.** *Soit $R$ une $\mathfrak{O}$-algèbre locale plate noethérienne complète équidimensionnelle de dimension 2 et de corps résiduel* $\mathbf{F}$. *Supposons $R[\frac{1}{\pi}]$ régulier et $e_{max}\big(R/(\pi)\big) = 1$, alors $R \simeq \mathfrak{O}[[X]]$.*

*Démonstration.* Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R[\frac{1}{\pi}]$, le localisé $R[\frac{1}{\pi}]_\mathfrak{p}$ est un anneau local et régulier, donc intègre et intégralement clos (EGA $0_{\mathrm{IV}}$,cor.17.1.3). Donc $R[\frac{1}{\pi}]$ est normal, et si on note $(\mathfrak{p}_i)_{1\leq i\leq r}$ les idéaux premiers minimaux de $R$, on a $R[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r (R/\mathfrak{p}_i)[\frac{1}{\pi}]$ (EGA II,cor.6.3.8). Par ailleurs, les $R_i = R/\mathfrak{p}_i$ sont plats sur $\mathfrak{O}$. En effet, $\mathfrak{p}_i$ est l'annulateur d'un élément de $R$ par [Mat],th.6.5 (iii), donc $\pi \notin \mathfrak{p}_i$ puisque par platitude $\pi$ n'est pas un diviseur de zéro dans $R$ et comme $R_i$ est intègre, il s'ensuit que $R_i$ est sans $\pi$-torsion. On a donc $R \sim \prod_{i=1}^r R_i$ et le lemme 5.1.6 donne $1 = e_{max}(R/(\pi)) = \sum_{i=1}^r e_{max}(R/(\mathfrak{p}_i + (\pi)))$ ce qui oblige $r = 1$ et $R$ intègre. Puisque $\dim(R/(\pi)) = 1$, $e_{max}(R/(\pi)) = 1$ et $R/\mathfrak{m} = \mathbf{F}$, il existe $X \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ tel que, pour $n \gg 0$, $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}\cdot \overline{X}^n$ où $\overline{X}$ est l'image de $X$ dans $R/(\pi)$. Comme $\overline{X}$ n'est pas nilpotent dans $R/(\pi)$, on a $\mathbf{F}[[\overline{X}]] \hookrightarrow R/(\pi)$ d'où $\mathfrak{O}[[X]] \hookrightarrow R$ puisque $R$ est sans $\pi$-torsion. Soit $M$ le $\mathfrak{O}$-module $R/\mathfrak{O}[[X]]$. En utilisant $\cap_n \pi^n M = \{0\}$ et le fait que $M/(\pi)$ est un $\mathbf{F}$-espace vectoriel de dimension finie (car $R/(\mathfrak{m}^n + (\pi))$ se surjecte sur $M/(\pi)$ pour $n \gg 0$), on obtient que $M$ est de type fini (en fait, il est aussi libre car sans $\pi$-torsion). Soit $x \in R$. L'image dans $M$ du sous-$\mathfrak{O}$-module de $R$ engendré par les $(x^n)_{n\geq 0}$ est *a fortiori* de type fini. Donc il existe $n \gg 0$ tel que $x^n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{O}x^i + \mathfrak{O}[[X]]$, ce qui entraîne $x$ entier sur $\mathfrak{O}[[X]]$. L'image dans $M$ du sous-$\mathfrak{O}$-module de $R$ engendré par les $(X^n x)_{n\geq 0}$ est aussi de type fini, donc il existe $n \gg 0$ et $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathfrak{O}$ tels que $X^n x - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^i x \in \mathfrak{O}[[X]]$ i.e. $(X^n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^i)x \in \mathfrak{O}[[X]]$ i.e. $x \in \mathrm{Frac}(\mathfrak{O}[[X]]) \cap R \subset \mathrm{Frac}(R)$ (rappelons que $R$ est intègre). Comme $x$ est entier sur $\mathfrak{O}[[X]]$ et $\mathfrak{O}[[X]]$ intégralement clos, on a finalement $x \in \mathfrak{O}[[X]]$ d'où $\mathfrak{O}[[X]] \xrightarrow{\sim} R$ (et $M = 0$). □

## 5.2. **Familles explicites de déformations semi-stables.**

5.2.1. On suppose ici $k = 2$ et on définit plusieurs $S_{\mathfrak{O}[[X]]}$-modules munis de structures $(\varphi, N, Fil^1)$ (on verra au §5.2.4 que ces modules sont fortement divisibles).

(i) Fixons $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta) \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ peu ramifié non nul et $\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$, $\alpha \neq \beta$. Posons $\mathcal{M}(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1 \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_2$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^1$ définis par $\varphi(e_1) =$

$p\big(([\beta]^{-1}+X)e_1+e_2\big)$, $\varphi(e_2)=\frac{[\alpha\beta]^{-1}}{[\beta]^{-1}+X}e_2$, $N(e_1)=N(e_2)=0$, $Fil^1\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1+Fil^1S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}(\overline{\rho})$.

(ii) Fixons $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \lambda(\alpha)\end{pmatrix}\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ peu ramifié et non nul et $\alpha\in\mathbf{F}^\times$. Posons $\mathcal{M}_{cris}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_2$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^1$ définis par $\varphi(e_1)=p\big(([\alpha]^{-1}+X)e_1+e_2\big)$, $\varphi(e_2)=\frac{[\alpha]^{-2}}{[\alpha]^{-1}+X}e_2$, $N(e_1)=N(e_2)=0$, $Fil^1\mathcal{M}_{cris}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1+Fil^1S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}_{cris}(\overline{\rho})$. Posons également $\mathcal{M}_{st}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}(pe_1)\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}(\mathfrak{L}e_2)$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^1$ définis par $\varphi(pe_1)=p[\alpha]^{-1}(pe_1)$, $\varphi(\mathfrak{L}e_2)=[\alpha]^{-1}\mathfrak{L}e_2$, $N(pe_1)=X(\mathfrak{L}e_2)$, $N(\mathfrak{L}e_2)=0$, $Fil^1\mathcal{M}_{st}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}(pe_1+p\mathfrak{L}e_2)+Fil^1S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}_{st}(\overline{\rho})$ (correspond au cas $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L})<1$, cf. preuve de la proposition 4.2.1).

(iii) Fixons $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \lambda(\alpha)\end{pmatrix}\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ très ramifié et $\alpha\in\mathbf{F}^\times$. Il existe un et un seul $\beta\in\mathbf{F}$ tel que $T_{st,k}(\overline{\mathcal{M}})\simeq\overline{\rho}$ où $\overline{\mathcal{M}}$ est l'objet de $\underline{\mathcal{M}}^1$ provenant par extension des scalaires de $\mathbf{F}$ à $S_{\mathfrak{O}}\otimes\mathbf{F}$ de l'objet suivant de $\underline{MF}^{f,1}_{tor}$ muni d'une action de $\mathbf{F}$ et d'un endomorphisme $\mathbf{F}$-linéaire $N$ : $\big(M=\mathbf{F}f_1\oplus\mathbf{F}f_2, Fil^0M=M, Fil^1M=\mathbf{F}f_1, Fil^2M=0, \varphi_1(f_1)=\alpha^{-1}(f_1+\beta f_2), \varphi_0(f_2)=\alpha^{-1}f_2, N(f_1)=f_2, N(f_2)=0\big)$. Posons $\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_2$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^1$ définis par $\varphi(e_1)=p[\alpha]^{-1}e_1$, $\varphi(e_2)=[\alpha]^{-1}e_2$, $N(e_1)=e_2$, $N(e_2)=0$, $Fil^1\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}\big(e_1+p([\beta]+X)e_2\big)+Fil^1S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}(\overline{\rho})$ (correspond au cas $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L})\geq 1$, cf. preuve de la proposition 4.2.1).

(iv) Fixons $\overline{\rho}$ telle que $\overline{\rho}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2 & 0\\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}$ et $\det(\overline{\rho})\simeq\omega\lambda(\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbf{F}^\times$ et posons $\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_2$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^1$ définis par $\varphi(e_1)=p[\alpha]^{-1}e_2$, $\varphi(e_2)=-e_1+Xe_2$, $N(e_1)=N(e_2)=0$, $Fil^1\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1+Fil^1S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}(\overline{\rho})$.

5.2.2. On suppose maintenant $3<k<p$ et $k$ pair. On pose $v=u-p$. Si $R$ est une $\mathfrak{O}$-algèbre plate locale noethérienne complète et si $x=\sum_{i=0}^{\infty}r_i\frac{v^i}{i!}\in S_R$, on note $[x]=\sum_{i=0}^{p-1}r_i\frac{v^i}{i!}\in R[[v]]=R[[u]]\subset S_R$. Pour chacun des $\mathfrak{O}$-modules $\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$ du §4.2.4, on pose $F_V=e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_V(\mathfrak{L})}{p}e_2$ et $G_V=*\frac{e_2}{p}$ où $*\in\{\mathfrak{L}-2H_{k/2-1},p,1,p^{k/2-2}\mathfrak{L},p^{-[\ell]}\mathfrak{L}\}$ suivant le cas. Pour chacun des $\mathfrak{O}$-modules $\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L})$ du §4.2.4, on pose $F_Z=e_1+\frac{\mathfrak{L}+\delta_Z(\mathfrak{L})}{p}e_2$ et $G_Z=e_2$. Pour $x=\lambda F_V+\mu G_V\in\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$ (resp. $x=\lambda F_Z+\mu G_Z\in\mathcal{M}_Z(\mu,\mathfrak{L})$) avec $\lambda,\mu\in S_{\mathfrak{O}}$, on note $[x]=[\lambda]F_V+[\mu]G_V$ (resp. avec $Z$). On note également $\mathcal{N}_V(\mu,\mathfrak{L})=\mathfrak{O}[[v]]F_V\oplus\mathfrak{O}[[v]]G_V=\mathfrak{O}[[u]]F_V\oplus\mathfrak{O}[[u]]G_V\subset\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$ et $Fil^{k-1}\mathcal{N}_V=Fil^{k-1}\mathcal{M}_V\cap\mathcal{N}_V$ (resp. avec $Z$). Dans la suite, on pose pour alléger $\mathcal{M}_V=\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$ et $\mathcal{N}_V=\mathcal{N}_V(\mu,\mathfrak{L})$ (resp. avec $Z$).

**Lemme 5.2.2.1.** *On a :*

$$\begin{array}{rcl} Fil^{k-1}\mathcal{M}_V &=& \mathfrak{O}[[v]][U]\oplus\mathfrak{O}[[v]][V]+Fil^pS_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_V,\\ Fil^{k-1}\mathcal{N}_V &=& \mathfrak{O}[[v]][U]\oplus\mathfrak{O}[[v]][V],\\ [U]\wedge[V] &=& \alpha_Vv^{k-1}F_V\wedge G_V \end{array}$$

*où $U$ et $V$ sont les éléments de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V$ qui apparaissent dans les preuves du §4.2.4 et $\alpha_V \in \mathfrak{O}[[v]]^\times$. De même, on a :*

$$\begin{array}{rcl} Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z & = & \mathfrak{O}[[v]][W] \oplus \mathfrak{O}[[v]][Z] + Fil^p S_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_Z, \\ Fil^{k-1}\mathcal{N}_Z & = & \mathfrak{O}[[v]][W] \oplus \mathfrak{O}[[v]][Z], \\ [W] \wedge [Z] & = & \alpha_Z v^{k-1} F_Z \wedge G_Z \end{array}$$

*où $W$ et $Z$ sont les éléments de $Fil^{k-1}\mathcal{M}_Z$ qui apparaissent dans les preuves du §4.2.4 et $\alpha_Z \in \mathfrak{O}[[v]]^\times$.*

*Démonstration.* La preuve est formelle, on la donne pour $V$, le cas $Z$ étant analogue. Un examen de la preuve du lemme 3.2.3.2 de [Br4] montre qu'il existe deux éléments $U', V'$ dans $\mathcal{N}_V$ tels que $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V = \mathfrak{O}[[v]]U' \oplus \mathfrak{O}[[v]]V' + Fil^p S_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_V$. En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [U] & = & \lambda_U U' + \mu_U V' + z_U \\ [V] & = & \lambda_V U' + \mu_V V' + z_V \end{array} \right.$$

avec $\lambda_U, \mu_U, \lambda_V, \mu_V \in \mathfrak{O}[[v]]$ et $z_U, z_V \in Fil^p S_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_V$. Comme $(\varphi(U'), \varphi(V'))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$ par forte divisibilité, de même que $(\varphi([U]), \varphi([V]))$, la matrice $\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_U) & \varphi(\mu_U) \\ \varphi(\lambda_V) & \varphi(\mu_V) \end{pmatrix}$ est inversible dans $S_{\mathfrak{O}}$ donc dans $\mathfrak{O}[[v]]$. On en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_U & \mu_U \\ \lambda_V & \mu_V \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathfrak{O}[[v]]$, ce qui donne l'assertion sur $Fil^{k-1}\mathcal{M}_V$. Comme $Fil^p S_{\mathfrak{O}}\mathcal{M}_V \cap \mathcal{N}_V = v^p\mathcal{N}_V$, cela entraîne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v^{k-1}F_V & \in & \mathfrak{O}[[v]][U] + \mathfrak{O}[[v]][V] + v^p\mathcal{N}_V \\ v^{k-1}G_V & \in & \mathfrak{O}[[v]][U] + \mathfrak{O}[[v]][V] + v^p\mathcal{N}_V \end{array} \right.$$

d'où $v^{k-1}\mathcal{N}_V \subset \mathfrak{O}[[v]][U] \oplus \mathfrak{O}[[v]][V] + v^p\mathcal{N}_V$ qui entraîne $v^{k-1}\mathcal{N}_V \subset \mathfrak{O}[[v]][U] \oplus \mathfrak{O}[[v]][V]$ puisque $k-1 < p$. Soit $\alpha \in \mathfrak{O}[[v]]$ tel que $[U] \wedge [V] = \alpha F_V \wedge G_V$. Comme $v^{k-1}F_V, v^{k-1}G_V \in \mathfrak{O}[[v]][U] \oplus \mathfrak{O}[[v]][V]$, on a facilement que $\alpha$ divise $v^{2k-2}$ dans $\mathfrak{O}[[v]]$ i.e. $\alpha = v^r\beta$ où $r \in \{0, ..., 2k-2\}$ et $\beta \in \mathfrak{O}[[v]]^\times$. Comme $(\varphi([U]), \varphi([V]))$ engendrent $p^{k-1}\mathcal{M}_V$, $\varphi([U] \wedge [V])$ engendre $S_{\mathfrak{O}}p^{2k-2}F_V \wedge G_V$ i.e. $\varphi(\alpha)\varphi(F_V \wedge G_V) = p^{2k-2}\gamma F_V \wedge G_V$ avec $\gamma \in S_{\mathfrak{O}}^\times$. Un calcul facile (en revenant à la définition de $F_V$ et $G_V$) donne $\varphi(F_V \wedge G_V) = p^{k-1}\mu^2 F_V \wedge G_V$ d'où $p^{k-1}\varphi(\alpha)\mu^2 = p^{2k-2}\gamma$ i.e. $\varphi(\alpha) = p^{k-1}\delta$ où $\delta \in S_{\mathfrak{O}}^\times$. On en déduit $r = k-1$, ce qui achève la preuve. □

5.2.3. On suppose toujours $3 < k < p$ avec $k$ pair et on rappelle que les éléments $\delta_V(\mathfrak{L}), \delta_Z(\mathfrak{L}) \in \mathbf{Z}_p[[\frac{(u-p)^p}{p}]]$ ne dépendent de $\mathfrak{L}$ que via $m \in \mathbf{N}$, cf. §4.2.2.

(i) Fixons $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta) \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ peu ramifié et non nul et $\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$, $\alpha \neq \beta$. On pose $\overline{\mu}_\pm = \pm(\alpha\beta)^{-1/2} \in \mathbf{F}$, quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie, et :

$$\overline{\mathfrak{L}}_\pm = 2H_{k/2-1} - \frac{1}{k/2(k/2-1)} + \frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}\beta\overline{\mu}_\pm \in \mathbf{F}.$$

Posons $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_V \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_V$ qu'on munit des opérateurs $\mathfrak{O}[[X]]$-linéaires $\varphi$ et $N$ obtenus en remplaçant formellement $\mathfrak{L}$ par $[\overline{\mathfrak{L}}_\pm] + X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$

et $N$ dans la base $(F_V,G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_\pm],\mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))=0$ et $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})=0$ ($[\cdot]$ désigne ici le représentant de Teichmüller dans $\mathfrak{O}$). Par exemple, on obtient :

$$\varphi(F_V)=\mu\Big(p^{k/2}F_V+p^{k/2-1}\Big(\frac{(1-p)([\overline{\mathfrak{L}}_\pm]+X)+\varphi(\delta_V(\mathfrak{L}))-p\delta_V(\mathfrak{L})}{[\overline{\mathfrak{L}}_\pm]+X-2H_{k/2-1}}\Big)G_V\Big).$$

On définit de même $\hat{U},\hat{V}\in\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho})$ comme les éléments obtenus en remplaçant formellement $\mathfrak{L}$ par $[\overline{\mathfrak{L}}_\pm]+X$ dans l'expression de $[U]$ et $[V]$ dans la base $F_V,G_V$ (cf. preuve de prop.4.2.4.2 (i) pour $U,V$ et le §5.2.2 pour $[U],[V]$) et on note $Fil^{k-1}\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho})$ le sous-$S_{\mathfrak{O}[[X]]}$-module de $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho})$ engendré par $\hat{U}$, $\hat{V}$ et $Fil^{k-1}S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho})$.

(ii) Fixons $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha)\end{pmatrix}\subset\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ peu ramifié et non nul et $\alpha\in\mathbf{F}^\times$. On pose (dans $\mathbf{F}$) $\overline{\mu}_+=(-1)^{k/2}\alpha^{-1}$, $\overline{\mu}_-=-(-1)^{k/2}\alpha^{-1}$ et $\overline{\mathfrak{L}}_+=2H_{k/2-1}-\frac{2}{k/2(k/2-1)}$. Posons $\mathcal{M}_+(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_V\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus de même que précédemment en remplaçant formellement $\mathfrak{L}$ par $[\overline{\mathfrak{L}}_+]+X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V,G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_+],\mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))=0$ et $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})=0$. Lorsque $0<\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})<1$, les coefficients des coordonnées des opérateurs $\mu^{-1}\varphi$, $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ de $\mathcal{M}_V(\mu,\mathfrak{L})$ dans la base $(F_V,G_V)$ sont dans $\mathbf{Z}_p\big[\big[\mathfrak{L}-2H_{\frac{k}{2}-1},\frac{p}{\mathfrak{L}-2H_{\frac{k}{2}-1}}\big]\big]$. Posons $R=\mathfrak{O}[[X,Y]]/(XY-p)$ et $\mathcal{M}_-(\overline{\rho})=S_RF_V\oplus S_RG_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}$ par $X$ et $\frac{p}{\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}}$ par $Y$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V,G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_-],\mathfrak{L})$ lorsque $0<\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})<1$. Par exemple $N(F_V)=\big(1+N(\delta_V(\mathfrak{L}))/p\big)YG_V$.

(iii) Fixons $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha)\end{pmatrix}\subset\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ très ramifié et $\alpha\in\mathbf{F}^\times$. On pose $\overline{\mu}=(-1)^{k/2-1}\alpha^{-1}\in\mathbf{F}$ et on note qu'il existe un et un seul élément $\beta\in\mathbf{F}$ tel que, pour tout $\mathfrak{L}$ tel que $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\geq 1$ et $\overline{\frac{\mathfrak{L}-2H_{k/2-1}}{p}}=\beta$, $T_{st,k}\big(\mathcal{M}_V([\overline{\mu}],\mathfrak{L})\otimes\overline{\mathbf{F}}_p\big)\simeq\overline{\rho}\otimes\overline{\mathbf{F}}_p$ (cf. la fin de la preuve de prop.4.2.4.2 (ii)). Posons $\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_V\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})/p$ par $[\beta]+X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V,G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}],\mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\geq 1$.

(iv) Fixons $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha)\end{pmatrix}\subset\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ non nul et $\alpha,\beta\in\mathbf{F}^\times$. On définit $\overline{\mu}_\pm$ et $\overline{\mathfrak{L}}_\pm$ comme dans le cas (i) (quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie) et on pose $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_Z\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_Z$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $\mathfrak{L}$ par $[\overline{\mathfrak{L}}_\pm]+X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[W],[Z]$ dans la base $(F_Z,G_Z)$ de $\mathcal{M}_Z([\overline{\mu}_\pm],\mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L}))=0$.

(v) Fixons $\overline{\rho}$ telle que $\overline{\rho}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}} & 0\\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)}\end{pmatrix}$ et $\det(\overline{\rho})\simeq\omega^{k-1}\lambda(\alpha)$ avec $\alpha\in\mathbf{F}^\times$.

On pose $\overline{\mu}_\pm = \pm\alpha^{-1/2} \in \mathbf{F}$ (quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie) et $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_V \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1} + \frac{1}{k/2(k/2-1)}$ par $X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V, G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_\pm], \mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L})) > 0$.

(vi) Fixons $\overline{\rho}$ telle que $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)} \end{pmatrix}$ et $\det(\overline{\rho}) \simeq \omega^{k-1}\lambda(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbf{F}^\times$. Lorsque $\mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L})) < -\frac{k}{2}+2$ i.e. $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) < -\frac{k}{2}+2$, les coefficients des coordonnées des opérateurs $\mu^{-1}\varphi$, $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ de $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})$ dans la base $(F_V, G_V)$ sont dans $\mathbf{Z}_p[[p^{-k/2+2}\mathfrak{L}^{-1}]]$. On pose $\overline{\mu}_\pm = \pm\alpha^{-1/2} \in \mathbf{F}$ (quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie) et $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_V \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $p^{-k/2+2}\mathfrak{L}^{-1}$ par $X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V, G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_\pm], \mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) < -\frac{k}{2}+2$. On pose également $\mathcal{M}(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1 \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_2$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ définis par $\varphi(e_1) = p^{k-1}[\alpha]^{-1}e_2$, $\varphi(e_2) = -e_1 + Xe_2$, $N(e_1) = N(e_2) = 0$, $Fil^{k-1}\mathcal{M}(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1 + Fil^{k-1}S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}(\overline{\rho})$.

(vii) Fixons $\overline{\rho}$ telle que $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}$ avec $1 \le i \le \frac{k}{2}-2$ et $\det(\overline{\rho}) \simeq \omega^{k-1}\lambda(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbf{F}^\times$ (ce cas n'arrive donc que pour $k > 4$). Lorsque $i - \frac{k}{2} + 1 < \mathrm{val}_p(a(\mathfrak{L})) < i - \frac{k}{2} + 2$ i.e. $i - \frac{k}{2} + 1 < \mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) < i - \frac{k}{2} + 2$, les coefficients des coordonnées des opérateurs $\mu^{-1}\varphi$, $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ de $\mathcal{M}_V(\mu, \mathfrak{L})$ dans la base $(F_V, G_V)$ sont dans $\mathbf{Z}_p[[p^{-i-1+k/2}\mathfrak{L}, p^{i-k/2+2}\mathfrak{L}^{-1}]]$. Soit $R = \mathfrak{O}[[X,Y]]/(XY-p)$. On pose $\overline{\mu}_\pm = \pm(\alpha^{-1/2}) \in \mathbf{F}$ (quitte à agrandir $\mathbf{F}$) et $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho}) = S_R F_V \oplus S_R G_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $p^{-i-1+k/2}\mathfrak{L}$ par $X$ et $p^{i-k/2+2}\mathfrak{L}^{-1}$ par $Y$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V, G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_\pm], \mathfrak{L})$ lorsque $i - \frac{k}{2} + 1 < \mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) < i - \frac{k}{2} + 2$. Par exemple $N(F_V) = \big(1 + N(\delta_V(\mathfrak{L}))/p\big)YG_V$.

(viii) Fixons $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}+i}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1-i}\lambda(\beta) \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $1 \le i \le \frac{k}{2}-2$, $*$ non nul et $\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$ (ce cas n'arrive donc que pour $k > 4$). On pose $\overline{\mu}_\pm = \pm(\alpha\beta)^{-1/2} \in \mathbf{F}$ (quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie) et :

$$\overline{\alpha}_\pm = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}+i-1}}{k/2+i}\binom{k/2+i-1}{2i+1}^{-1}\beta\overline{\mu}_\pm \in \mathbf{F}.$$

On pose $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_V \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_V$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $p^i\mathfrak{L}$ par $[\overline{\alpha}_\pm] + X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[U],[V]$ dans la base $(F_V, G_V)$ de $\mathcal{M}_V([\overline{\mu}_\pm], \mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L}) = -i$.

(ix) Fixons $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}-1-i}\lambda(\beta) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}+i}\lambda(\alpha) \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $1 \le i \le \frac{k}{2}-2$, $*$ non nul et $\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$ (ce cas n'arrive donc que pour $k > 4$). On pose $\overline{\mu}_\pm$ et $\overline{\alpha}_\pm$ comme au (viii) (quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie), et $\mathcal{M}_\pm(\overline{\rho}) = S_{\mathfrak{O}[[X]]}F_Z \oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}G_Z$ qu'on munit des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ obtenus en remplaçant formellement $p^i\mathfrak{L}$ par $[\overline{\alpha}_\pm] + X$ dans l'expression des opérateurs $\varphi$ et $N$ et des vecteurs $[W],[Z]$ dans la base $(F_Z, G_Z)$ de

$\mathcal{M}_Z([\overline{\mu}_\pm],\mathfrak{L})$ lorsque $\mathrm{val}_p(\mathfrak{L})=-i$.

(x) Fixons $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{k-1}\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \lambda(\beta)\end{pmatrix}\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ avec $*$ non nul et $\alpha,\beta\in\mathbf{F}^\times$ et posons $\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1\oplus S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_2$ muni des $\varphi$, $N$ et $Fil^{k-1}$ définis par $\varphi(e_1)=p^{k-1}\big(([\beta]^{-1}+X)e_1+e_2\big)$, $\varphi(e_2)=\frac{[\alpha\beta]^{-1}}{[\beta]^{-1}+X}e_2$, $N(e_1)=N(e_2)=0$, $Fil^{k-1}\mathcal{M}(\overline{\rho})=S_{\mathfrak{O}[[X]]}e_1+Fil^{k-1}S_{\mathfrak{O}[[X]]}\mathcal{M}(\overline{\rho})$.

5.2.4. On suppose ici $k$ pair et $1<k<p$.

**Proposition 5.2.4.1.** *Soient $\overline{\rho}:G_p\to\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho})=\mathbf{F}$ et $\mathcal{M}(\overline{\rho})$ l'un des $S_R$-modules muni des structures $(\varphi,N,Fil^{k-1})$ définis aux §5.2.1 et §5.2.3 (avec $R=\mathfrak{O}[[X]]$ ou $\mathfrak{O}[[X,Y]]/(XY-p)$ suivant le cas et quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie ne dépendant que de $\overline{\rho}$). Alors $\mathcal{M}(\overline{\rho})$ est un $R$-module fortement divisible et $T_{st,k}(\mathcal{M}(\overline{\rho}))$ est une déformation de $\overline{\rho}$ à $R$ (au sens de [CDT],appendice A).*

*Démonstration.* C'est facile pour les déformations cristallines et lorsque $k=2$. Posons $v=u-p$ et $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\overline{\rho})$. Vu les propositions 4.2.4.2 à 4.2.4.6, les seuls points non évidents de la définition 3.2.1.1 sont (ii) et (vii), i.e. $Fil^{k-1}\mathcal{M}\cap I\mathcal{M}=IFil^{k-1}\mathcal{M}$ pour tout idéal $I$ de $R$ et $vN(Fil^{k-1}\mathcal{M})\subset Fil^{k-1}\mathcal{M}$. Nous montrons (ii) qui est le plus délicat, laissant (vii) au lecteur. Il suffit de montrer $Fil^{k-1}\mathcal{M}\cap I\mathcal{M}\subset IFil^{k-1}\mathcal{M}$, l'autre inclusion étant claire. Posons $F=F_V$ ou $F_Z$ et $G=G_V$ ou $G_Z$ suivant le cas, $\mathcal{N}=R[[v]]F\oplus R[[v]]G\subset\mathcal{M}$, $Fil^{k-1}\mathcal{N}=Fil^{k-1}\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ et notons $(H,J)$ les générateurs de $Fil^{k-1}\mathcal{M}$ obtenus formellement par la procédure précédente à partir des vecteurs $([U],[V])$ ou $([W],[Z])$ suivant le cas. Du lemme 5.2.2.1, on déduit aisément $H\wedge J=\alpha v^{k-1}F\wedge G$ avec $\alpha\in R[[v]]^\times$, d'où $v^{k-1}\mathcal{N}\subset R[[v]]H+R[[v]]J$. Comme $Fil^{k-1}\mathcal{N}=R[[v]]H+R[[v]]J+v^p\mathcal{N}$, on obtient en fait $Fil^{k-1}\mathcal{N}=R[[v]]H+R[[v]]J$. Soit $x\in Fil^{k-1}\mathcal{M}\cap I\mathcal{M}$, on peut écrire $x=y+z$ avec $y\in Fil^{k-1}\mathcal{N}\cap I\mathcal{N}$ et $z\in IFil^pS_R\mathcal{M}$ et il suffit de montrer $y\in IFil^{k-1}\mathcal{N}$. On a $y=\lambda H+\mu J$ avec $\lambda,\mu\in R[[v]]$ et $y\wedge J=\lambda H\wedge J\in I[[v]]F\wedge G$, d'où $\lambda v^{k-1}\in I[[v]]$ ce qui entraîne $\lambda\in I[[v]]$. On montre de même $\mu\in I[[v]]$, d'où $y\in IFil^{k-1}\mathcal{N}$. La fin de l'énoncé se déduit facilement des propositions du §4.2.4 et du corollaire 3.2.2.3. □

**Corollaire 5.2.4.2.** *Soit $\overline{\rho}:G_p\to\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho})=\mathbf{F}$. Toute déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k,triv)$ (cf. §2.2.2) est isomorphe (sur $\overline{\mathbf{Z}}_p$) à $T_{st,k}(\mathcal{M}(\overline{\rho}))\otimes_R\overline{\mathbf{Z}}_p$ pour un unique $R$-module fortement divisible $\mathcal{M}(\overline{\rho})$ parmi ceux définis aux §5.2.1 et §5.2.3 et un unique morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R\to\overline{\mathbf{Z}}_p$.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord qu'il n'y a de telles déformations que si $\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & *\\ 0 & \omega^i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega_2^{k-1-i+pi} & 0\\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)}\end{pmatrix},\ 0\leq i\leq k-2\right\}$ (cf. théorème 4.2.4.7). Si $\rho$ est une déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k,triv)$, $\rho$ est en particulier un réseau stable par $G_p$ dans une des représentations $V(\mu_1,\mu_2),V(\mu,\nu)$ ou $V(\mu,\mathfrak{L})$ de l'exemple 3.1.2.2 (pour des valeurs convenables des paramètres). Ces représentations sont mutuellement non isomorphes et comme les valeurs des paramètres sont fixées par $\mathcal{M}(\overline{\rho})$ et par le morphisme $R\to\overline{\mathbf{Z}}_p$ (cf. les constructions de ce paragraphe), on voit facilement qu'il y a au plus un seul choix de chaque tel que $\rho\otimes\overline{\mathbf{Z}}_p\simeq T_{st,k}(\mathcal{M}(\overline{\rho}))\otimes_R\overline{\mathbf{Z}}_p$. Le fait que toute déformation de $\overline{\rho}$ de type $(k,triv)$ est de la forme $T_{st,k}(\mathcal{M}(\overline{\rho}))\otimes_R\overline{\mathbf{Z}}_p$ résulte de $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho})=\mathbf{F}$, des résultats du §4.1 et du §4.2, de la proposition 5.2.4.1 et du corollaire 3.2.2.3. $\square$

## 5.3. **Anneaux de déformations semi-stables.**

**Théorème 5.3.1.** *Soient $k$ un entier pair tel que $1<k<p$ et $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)\to\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho})=\mathbf{F}$. Quitte à remplacer $\mathbf{F}$ par une extension finie ne dépendant que de $\overline{\rho}$, on a les résultats suivants :*
*(i) Supposons $k=2$, alors :*

– $R(2,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}=0$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\notin\left\{\begin{pmatrix}\omega & *\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\omega_2 & 0\\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}\right\}$,

– $R(2,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\simeq\mathfrak{O}[[X]]$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ avec } *\text{ très ramifié},\ \begin{pmatrix}\omega_2 & 0\\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}\right\}$ *ou si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \lambda(\beta)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha,\beta\in\mathbf{F}^\times$ *et* $\alpha\neq\beta$,

– $R(2,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\sim\mathfrak{O}[[X]]\times\mathfrak{O}[[X]]$ *si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \lambda(\alpha)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha\in\mathbf{F}^\times$ *et* $*$ *peu ramifié.*

*(ii) Supposons $k\geq 4$, alors :*

– $R(k,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}=0$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p}\notin\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & *\\ 0 & \omega^i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\omega_2^{k-1-i+pi} & 0\\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)}\end{pmatrix},\ 0\leq i\leq k-2\right\},$$

– $R(k,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\simeq\mathfrak{O}[[X]]$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}} & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix}\text{ avec } *\text{ très ramifié},\ \begin{pmatrix}\omega^{k-1} & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},$$

– $R(k,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\sim\mathfrak{O}[[X]]\times\mathfrak{O}[[X]]$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & *\\ 0 & \omega^i\end{pmatrix}\text{ avec } 1\leq i\leq k-2\text{ et } i\neq\tfrac{k}{2}-1,\ \begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)} & 0\\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

*ou si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha,\beta\in\mathbf{F}^\times$ *et* $\alpha\neq\beta$,

– $R(k,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\sim\mathfrak{O}[[X]]\times\mathfrak{O}[[X]]\times\mathfrak{O}[[X]]$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{k-1} & 0\\ 0 & \omega_2^{p(k-1)}\end{pmatrix}$,

– $R(k,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\sim\mathfrak{O}[[X]]\times\dfrac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(XY-p)}$ *si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & *\\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha\in\mathbf{F}^\times$ *et* $*$ *peu ramifié,*

– $R(k,triv,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}\sim\dfrac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(XY-p)}\times\dfrac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(XY-p)}$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\simeq\begin{pmatrix}\omega_2^{k-1-i+pi} & 0\\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)}\end{pmatrix}$ *avec* $1\leq i\leq\frac{k}{2}-2$ *(ce dernier cas n'arrive donc que pour* $k>4$*).*

*Démonstration.* Les cas $R(k, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} = 0$ découlent directement de la proposition 4.1.1 et du théorème 4.2.4.7. On note pour alléger $R^u$ l'anneau des déformations universel de $\overline{\rho}$ (noté $R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ au §2.2.2) et $R = R(k, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ supposé non nul. Il s'agit de montrer $R \sim \prod_{i=1}^{r} R_i$ où $r$ est un entier entre 1 et 3 et $R_i$ $(1 \leq i \leq r)$ l'un des anneaux $\mathfrak{O}[[X]]$, $\frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(XY-p)}$ suivant le cas (cf. les constructions des §5.2.1 et §5.2.3). On procède en trois temps : (i) on montre l'existence d'une injection de $\mathfrak{O}$-algèbres $R \hookrightarrow \prod_{i=1}^{r} R_i$, (ii) on montre que les flèches $R \to R_i$ qu'on en déduit sont surjectives, (iii) on montre que la flèche $R\big[\frac{1}{\pi}\big] \to \prod_{i=1}^{r} R_i\big[\frac{1}{\pi}\big]$ qu'on en déduit est surjective. Seule la démonstration du (ii) n'est pas formel, i.e. repose sur quelques calculs, que nous donnons (brièvement) seulement dans les cas où $R_i = \mathfrak{O}[[X,Y]]/(XY-p)$ (ceux où $R_i = \mathfrak{O}[[X]]$, plus simples, seront laissés au lecteur).

(i) Par la proposition 5.2.4.1 (et la propriété universelle de $R^u$), on a pour chaque $i$ un morphisme continu de $\mathfrak{O}$-algèbres locales complètes $R^u \to R_i$, d'où un homomorphisme $f : R^u \to \prod_{i=1}^{r} R_i$. Soit $x \in R^u$, montrons que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in \cap_{(k,triv)}\mathfrak{p}$, l'intersection étant prise sur les idéaux premiers de $R^u$ de type $(k, triv)$ (cf. §2.2.2). Soit $\mathfrak{p}$ un tel idéal premier, il lui correspond une déformation $\rho : G_p \to \mathrm{GL}_2(R^u/\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ de $\overline{\rho}$ de type $(k, triv)$ et par le corollaire 5.2.4.2, il existe un $i$ et un homomorphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R_i \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ (uniques) tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} R^u & \to & R_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^u/\mathfrak{p} & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{Z}}_p. \end{array}$$

Réciproquement, tout morphisme $R_i \to \overline{\mathbf{Z}}_p$ correspond à un idéal premier $\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}\big(R^u \to R_i \to \overline{\mathbf{Z}}_p\big)$ de type $(k, triv)$. Soient $x \in R^u$ et $x_i$ son image dans $R_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Si $x \in \cap_{(k,triv)}\mathfrak{p}$, alors pour tout morphisme de $\mathfrak{O}$-algèbres $R_i \to \overline{\mathbf{Z}}_p$, $x_i$ s'envoie sur 0, ce qui entraîne aisément $x_i = 0$, donc $f(x) = 0$ puisque c'est vrai pour tout $i$. Réciproquement, si $x_i = 0$ pour tout $i$, alors pour tout $\mathfrak{p}$ de type $(k, triv)$ l'image de $x$ dans $R^u/\mathfrak{p}$ est nulle, donc $x \in \cap_{(k,triv)}\mathfrak{p}$. Par passage au quotient sur la flèche $R^u \to \prod R_i$, on obtient bien une injection $R \hookrightarrow \prod R_i$.

(ii) Il suffit de montrer que $R^u \to R_i/(\pi, \mathfrak{m}_i^2)$ est surjectif où $\mathfrak{m}_i$ est l'idéal maximal de $R_i$. Considérons le cas $R_i \simeq \mathfrak{O}[[X,Y]]/(XY-p)$ qui n'arrive (cf. §5.2.3) que pour $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié non nul (1$^{\text{er}}$ cas) ou $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}$ avec $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 2$ (2$^{\text{ième}}$ cas). On a $\frac{R_i}{(\pi,\mathfrak{m}_i^2)} \simeq \frac{\mathbf{F}[X,Y]}{(X^2,XY,Y^2)}$ et il suffit de montrer que la représentation galoisienne :

$$T_{st,k}\big(\mathcal{M}_{R_i}(\overline{\rho})\big) \otimes_{R_i} \frac{R_i}{(\pi, \mathfrak{m}_i^2)} \simeq T_{st,k}\Big(\mathcal{M}_{R_i}(\overline{\rho}) \otimes_{R_i} \frac{R_i}{(\pi, \mathfrak{m}_i^2)}\Big)$$

ne peut être définie sur une sous-$\mathbf{F}$-algèbre stricte de $\frac{R_i}{(\pi,\mathfrak{m}_i^2)}$. Par la pleine fidélité du foncteur $T_{st,k}$ (cf. §3.2.2), il est équivalent de montrer que $\mathcal{M}_{R_i}(\overline{\rho}) \otimes_{R_i} \frac{R_i}{(\pi,\mathfrak{m}_i^2)}$ ne provient pas par extension des scalaires d'un sous-objet dans $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ muni d'une action d'une telle sous-$\mathbf{F}$-algèbre (noter qu'une sous-$\mathbf{F}$-algèbre de $\frac{\mathbf{F}[X,Y]}{(X^2,XY,Y^2)}$ en est aussi un quotient).

1$^{\text{er}}$ cas : On a $N(F_V) = (1 + N(\delta_V(\mathfrak{L}))/p)YG_V$ (cf. §5.2.3,(ii)) d'où on déduit que $Y$ est dans l'image d'une telle sous-algèbre. Par ailleurs, un calcul (cf. preuve de prop.4.2.4.2

(i)) montre que $Fil^{k-1}\mathcal{M}_{R_i}(\overline{\rho}) \otimes \frac{R_i}{(\pi,Y,X^2)}$ est engendré par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{U} & = & u^{\frac{k}{2}-1}\Big(C_U(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-2)X(\overline{F}_V-\overline{G}_V)+uD_U(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)\overline{G}_V\Big) \\ \overline{V} & = & u^{\frac{k}{2}-1}C_V(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)(\overline{F}_V-\overline{G}_V) \end{array}\right.$$

avec modulo $Fil^pS_{R_i} \otimes \frac{R_i}{(\pi,Y,X^2)}$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_{k-1}(\overline{U}) & = & -\overline{\mu}\Big(c_U(\mathfrak{L})X\overline{F}_V+(d_U(\mathfrak{L})-c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))\overline{G}_V\Big) \\ \varphi_{k-1}(\overline{V}) & = & \overline{\mu}c_V(\mathfrak{L})\overline{F}_V \end{array}\right.$$

ce qui revient à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_{k-1}(u^{\frac{k}{2}-1}(\overline{F}_V-\overline{G}_V)) & = & \frac{\overline{\mu}c_V(\mathfrak{L})}{C_V(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)}\overline{F}_V \\ \varphi_{k-1}(u^{\frac{k}{2}}\overline{G}_V) & = & \frac{-\overline{\mu}c_U(\mathfrak{L})}{D_U(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)}\Big[\Big(1+\frac{C_U(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-2)}{C_V(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)}\frac{c_V(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})}\Big)X\overline{F}_V+\Big(\frac{d_U(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})}-\delta_V(\mathfrak{L})\Big)\overline{G}_V\Big]. \end{array}\right.$$

Mais le corollaire 4.2.3.4 nous dit que modulo $(p, \frac{u^p}{p})$ :

$$1+\frac{C_U(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-2)}{C_V(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)}\frac{c_V(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})}=\frac{k}{2}\neq 0$$

et il est clair qu'une telle sous-algèbre contient aussi $X$, c'est-à-dire est égale à $\frac{R_i}{(\pi,\mathfrak{m}_i^2)}$.
$2^{\text{ième}}$ cas : On a $N(F_V) = (1+N(\delta_V(\mathfrak{L}))/p)YG_V$ (cf. §5.2.3,(vii)) d'où on déduit que $Y$ est dans l'image d'une telle sous-algèbre. Par ailleurs, un calcul (cf. preuve de 4.2.4.5) montre que $Fil^{k-1}\mathcal{M}_{R_i}(\overline{\rho}) \otimes \frac{R_i}{(\pi,Y,X^2)}$ est engendré par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{U} & = & u^i\Big(-C_U(\mathfrak{L},i-1)X\overline{G}_V+u^{\frac{k}{2}-i}D_U(\mathfrak{L},\frac{k}{2}-1)\overline{G}_V+u^{k-1-2i}D_U(\mathfrak{L},k-2-i)\overline{F}_V\Big) \\ \overline{V} & = & -u^iC_V(\mathfrak{L},i)\overline{G}_V \end{array}\right.$$

avec modulo $Fil^pS_{R_i} \otimes \frac{R_i}{(\pi,Y,X^2)}$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_{k-1}(\overline{U}) & = & -\overline{\mu}\Big(c_U(\mathfrak{L})X\overline{F}_V+(d_U(\mathfrak{L})-c_U(\mathfrak{L})\delta_V(\mathfrak{L}))\overline{G}_V\Big) \\ \varphi_{k-1}(\overline{V}) & = & \overline{\mu}c_V(\mathfrak{L})\overline{F}_V \end{array}\right.$$

ce qui revient à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_{k-1}(u^i\overline{G}_V) & = & \frac{-\overline{\mu}c_V(\mathfrak{L})}{C_V(\mathfrak{L},i)}\overline{F}_V \\ \varphi_{k-1}(u^{k-1-i}\overline{F}_V) & = & \frac{-\overline{\mu}c_U(\mathfrak{L})}{D_U(\mathfrak{L},k-2-i)}\Big[\Big(1+\frac{C_U(\mathfrak{L},i-1)}{C_V(\mathfrak{L},i)}\frac{c_V(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})}\Big)X\overline{F}_V+\Big(\frac{d_U(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})}-\delta_V(\mathfrak{L})\Big)\overline{G}_V\Big]. \end{array}\right.$$

Mais le corollaire 4.2.3.4 nous dit que modulo $(p, \frac{u^p}{p})$ :

$$1+\frac{C_U(\mathfrak{L},i-1)}{C_V(\mathfrak{L},i)}\frac{c_V(\mathfrak{L})}{c_U(\mathfrak{L})}=\frac{k-i-1}{k-2i-1}\neq 0$$

et il est clair qu'une telle sous-algèbre contient aussi $X$, c'est-à-dire est égale à $\frac{R_i}{(\pi,\mathfrak{m}_i^2)}$.
Les cas $R_i \simeq \mathfrak{O}[[X]]$ procèdent de manière similaire.
(iii) Pour tout couple d'entiers $(a,b)$ positifs ou nuls tels que $a \le b$ et $a+b = k-1$, on définit les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $R^u$ de type $(a,b,triv)$ en remplaçant "à poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$" par "à poids de Hodge-Tate $(a,b)$" dans la définition des idéaux premiers de type $(k,triv)$ au début du §2.2.2. Notons que par l'isomorphisme $R^u = R(\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \xrightarrow{\sim} R(\overline{\rho}\otimes\omega^{-a})_{\mathfrak{O}}$ un idéal premier de type $(a,b,triv)$ devient un idéal premier de type $(b-a+1,triv) = (k-2a,triv)$. Par le même raisonnement qu'au (i) on construit une injection de $\mathfrak{O}$-algèbres $R^u/\cap\,\mathfrak{p} \hookrightarrow \prod R_i$ où l'intersection à gauche est prise sur les idéaux premiers de type

$(a, b, triv)$ pour tous les couples $(a, b)$ possibles et où le produit à droite est pris sur les familles explicites de déformations de type $(b-a+1, triv)$ de $\overline{\rho} \otimes \omega^{-a}$ construites aux §5.2.1 et §5.2.3 pour tous les couples $(a, b)$ possibles. De plus, par (ii) la projection sur chaque $R_i$ est surjective et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^u/\cap\mathfrak{p} & \hookrightarrow & \prod R_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \hookrightarrow & \prod_{i=1}^r R_i. \end{array}$$

où l'application de gauche est la surjection canonique et celle de droite la projection sur les composantes de type $(k, triv)$ (rappelons que $R = R^u/\cap\mathfrak{p}$ mais l'intersection n'étant prise que sur les idéaux premiers de type $(k, triv) = (0, k-1, triv)$). Il suffit donc de montrer $(R^u/\cap\mathfrak{p})\left[\frac{1}{\pi}\right] \xrightarrow{\sim} \prod R_i\left[\frac{1}{\pi}\right]$ pour la première ligne, c'est-à-dire, par le lemme 5.1.2, $\coprod R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p) \xrightarrow{\sim} (R^u/\cap\mathfrak{p})(\overline{\mathbf{Z}}_p)$. L'injection découle de l'unicité dans le corollaire 5.2.4.2. La surjection est plus délicate. Considérons les déformations $\rho$ de $\overline{\rho}$ aux $\mathfrak{O}$-algèbres locales noethériennes complètes $(A, \mathfrak{m})$ satisfaisant les deux conditions suivantes :
(i) pour tout entier positif $n$, $\rho \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{m}^n}$ est l'image, par le foncteur $T_{st,k}$ du §3.2.2, d'un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$,
(ii) $\det(\rho) = \varepsilon^{k-1}\left[\omega^{-k+1}\det(\overline{\rho})\right]$ où $[\cdot]$ désigne le représentant de Teichmüller dans $\mathfrak{O}$.
Comme l'image essentielle de $\underline{\mathcal{M}}^{k-1}$ est stable par sous-objet, somme directe et quotient, c'est un exercice de voir que ces déformations satisfont les conditions de [CDT],A.2 et le sous-foncteur des déformations correspondant est donc représenté par un quotient $R^u/I$ de $R^u$. On a $I \subset \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $R^u$ de type $(a, b, triv)$ puisque la déformation $G_p \to \mathrm{GL}_2(R^u/\mathfrak{p})$ correspondante satisfait alors les deux conditions ci-dessus (le (i) découle de la proposition 3.2.3.2 et du corollaire 3.2.2.3 et le (ii) de la condition sur le déterminant au §2.2.2). La surjection $R^u \to R^u/\cap\mathfrak{p}$ se factorise donc par $R^u/I$ et tout élément de $(R^u/\cap\mathfrak{p})(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ donne un élément de $(R^u/I)(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ c'est-à-dire, vu la définition de $R^u/I$ et le §3.2.3, la torsion par $\varepsilon^a$ d'une déformation de $\overline{\rho} \otimes \omega^{-a}$ de type $(k-2a, triv)$ pour un certain entier $a \in \{0, \frac{k}{2}-1\}$, c'est-à-dire un élément de $R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ pour un certain entier $i$. Ceci donne la surjectivité voulue et achève la preuve de (iii). $\square$

**Corollaire 5.3.2.** *Soient $k$ un entier pair tel que $1 < k < p$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$. Alors la conjecture 2.2.2.4 est vraie pour $R(k, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$.*

*Démonstration.* On peut supposer $\mathfrak{O}$ arbitrairement grand d'après le lemme 2.2.2.5. Le (ii) de la conjecture 2.2.2.4 est alors clair par le théorème 5.3.1, et aussi le (i) en remarquant que les composantes irréductibles de $R(k, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ sont $\mathfrak{O}[[X]]$ ou $\mathfrak{O}[[X, Y]]/(XY-p)$ (cf. la remarque 5.1.5). D'après le lemme 5.1.2 (et le théorème 5.3.1), on a $\coprod_{i=1}^r R_i(\overline{\mathbf{Z}}_p) \simeq R(k, triv, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}}(\overline{\mathbf{Z}}_p)$ pour $r \in \{1, 2, 3\}$ et $R_i \in \{\mathfrak{O}[[X, Y]]/(XY-p), \mathfrak{O}[[X]]\}$, les $R_i$ paramétrant toutes les déformations de $\overline{\rho}$ de type $(k, triv)$. On en déduit aisément le (iii). $\square$

Du théorème 5.3.1 et des lemmes 5.1.6 et 2.2.2.6, on déduit :

**Corollaire 5.3.3.** *Soient $k$ un entier pair tel que $1 < k < p$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbf{F}}_p$.*
*(i) Supposons $k = 2$, alors :*

– $\mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho}) = 0$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix} \right\}$,

– $\mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho}) = 1$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ très ramifié, } \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix} \right\}$ *ou si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ *et* $\alpha \neq \beta$,

– $\mu_{gal}(2, triv, \overline{\rho}) = 2$ *si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ *et* $*$ *peu ramifié.*

*(ii) Supposons* $k \geq 4$*, alors :*

– $\mu_{gal}(k, triv, \overline{\rho}) = 0$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}, \ 0 \leq i \leq k-2 \right\},$$

– $\mu_{gal}(k, triv, \overline{\rho}) = 1$ *si :*

$$\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1} \end{pmatrix} \text{ avec } * \text{ très ramifié, } \begin{pmatrix} \omega^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

– $\mu_{gal}(k, triv, \overline{\rho}) = 2$ *si :*

$\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i \end{pmatrix} \text{ avec } 1 \leq i \leq k-2 \text{ et } i \neq \frac{k}{2}-1, \begin{pmatrix} \omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}} \end{pmatrix} \right\}$

*ou si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ *et* $\alpha \neq \beta$,

– $\mu_{gal}(k, triv, \overline{\rho}) = 3$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)} \end{pmatrix}$ *ou si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ *et* $*$ *peu ramifié,*

– $\mu_{gal}(k, triv, \overline{\rho}) = 4$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}$ *avec* $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 2$ *(ce dernier cas n'arrive donc que pour* $k > 4$*).*

5.4. **Comparaison des multiplicités.** Pour tout entier $k > 1$, on rappelle que :

$$\sigma(k, triv) = St \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_p} \mathrm{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbf{Q}}_p^2)$$

et que $\overline{\sigma(k, triv)}^{ss}$ désigne la semi-simplifiée modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$ de $\sigma(k, triv)$ (cf. §2.1.2).

**Lemme 5.4.1.** *Soit* $k$ *un entier pair tel que* $1 < k < p$.
*(i) Si* $k = 2$*, alors* $\overline{\sigma(2, triv)}^{ss} = \sigma_{p-1,0}$.
*(ii) Si* $k \geq 4$*, alors :*

$$\overline{\sigma(k, triv)}^{ss} = \left( \bigoplus_{i=1}^{\frac{k}{2}-2} \sigma_{k-2-2i,i} \right)^2 \bigoplus \left( \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} \sigma_{p+1-k+2i,k-2-i} \right)^2 \oplus \sigma_{k-2,0} \oplus \sigma_{0,\frac{k}{2}-1} \oplus \sigma_{p-1,\frac{k}{2}-1}$$

*où la première somme directe disparaît si* $k = 4$.

*Démonstration.* Le (i) est laissé au lecteur. Pour le (ii), il s'agit donc de décomposer $\sigma_{p-1,0}\otimes_{\overline{\mathbf{F}}_p}\sigma_{k-2,0}$. On peut procéder comme suit. Soit $U_0(p)=\begin{pmatrix} * & * \\ p* & * \end{pmatrix}\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, on remarque que $\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_{k-2,0}|_{U_0(p)})\simeq \sigma_{k-2,0}\oplus\sigma_{p-1,0}\otimes\sigma_{k-2,0}$ puisque $\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\overline{1}\simeq\sigma_{0,0}\oplus\sigma_{p-1,0}$. On est donc ramené à la décomposition de $\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_{k-2,0}|_{U_0(p)})$ en représentations irréductibles. Pour $(i,j)\in\{0,...,p-2\}^2$, notons $\sigma'_{i,j}$ le caractère de $U_0(p)$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ donné par $\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}\mapsto \overline{a}^i\overline{d}^j$. Un calcul facile donne $(\sigma_{k-2,0}|_{U_0(p)})^{ss}\simeq\oplus_{i=0}^{k-2}\sigma'_{i,k-2-i}$ de sorte que :

$$\left(\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_{k-2,0}|_{U_0(p)})\right)^{ss}\simeq\bigoplus_{i=0}^{k-2}\left(\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\sigma'_{i,k-2-i}\right)^{ss}.$$

On est donc ramené à la décomposition des $\mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\sigma'_{i,j}$ en représentations irréductibles qui est faite dans le lemme 3.1.1 de [CDT]. Le résultat final s'en déduit facilement. $\square$

A partir de la règle du §2.1.2, on obtient facilement :

**Corollaire 5.4.2.** *Soient $k$ un entier pair tel que $1<k<p$ et $\overline{\rho}:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)\rightarrow\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho})=\overline{\mathbf{F}}_p$.*
*(i) Supposons $k=2$, alors :*

- $\mu_{aut}(2,triv,\overline{\rho})=0$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\notin\left\{\begin{pmatrix}\omega & * \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}\right\}$,
- $\mu_{aut}(2,triv,\overline{\rho})=1$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ avec } *\text{ très ramifié},\ \begin{pmatrix}\omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p\end{pmatrix}\right\}$ *ou si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{F}}_p^{\times}$ *et* $\alpha\neq\beta$,
- $\mu_{aut}(2,triv,\overline{\rho})=2$ *si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha\in\overline{\mathbf{F}}_p^{\times}$ *et* $*$ *peu ramifié.*

*(ii) Supposons $k\geq 4$, alors :*

- $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=0$ *si :*
$$\overline{\rho}|_{I_p}\notin\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)}\end{pmatrix},\ 0\leq i\leq k-2\right\},$$
- $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=1$ *si :*
$$\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}} & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\end{pmatrix}\text{ avec } *\text{ très ramifié},\ \begin{pmatrix}\omega^{k-1} & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},$$
- $\mu_{aut}(k,triv,\overline{\rho})=2$ *si :*
$$\overline{\rho}|_{I_p}\in\left\{\begin{pmatrix}\omega^{k-1-i} & * \\ 0 & \omega^i\end{pmatrix}\text{ avec } 1\leq i\leq k-2 \text{ et } i\neq\tfrac{k}{2}-1,\ \begin{pmatrix}\omega_2^{\frac{k}{2}+p(\frac{k}{2}-1)} & 0 \\ 0 & \omega_2^{\frac{k}{2}-1+p\frac{k}{2}}\end{pmatrix}\right\}$$
*ou si* $\overline{\rho}\simeq\begin{pmatrix}\omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\beta)\end{pmatrix}$ *avec* $\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{F}}_p^{\times}$ *et* $\alpha\neq\beta$,

– $\mu_{aut}(k, triv, \overline{\rho}) = 3$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(k-1)} \end{pmatrix}$ *ou si* $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{\frac{k}{2}}\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega^{\frac{k}{2}-1}\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p^{\times}$ *et* $*$ *peu ramifié,*

– $\mu_{aut}(k, triv, \overline{\rho}) = 4$ *si* $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1-i+pi} & 0 \\ 0 & \omega_2^{i+p(k-1-i)} \end{pmatrix}$ *avec* $1 \leq i \leq \frac{k}{2} - 2$ *(ce dernier cas n'arrive donc que pour* $k > 4$*).*

En vertu des corollaires 5.3.2, 5.3.3, 5.4.2 et des résultats du §2.3.2, on a finalement :

**Théorème 5.4.3.** *Soient* $k$ *un entier pair tel que* $1 < k < p$*,* $\tau$ *un type galoisien de degré 2 scalaire et* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ *une représentation finie telle que* $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbf{F}}_p$*. Alors* $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) = \#\mathrm{det}(\tau)(I_p^{sauv}) \cdot \mu_{aut}(k, \tau, \overline{\rho})$*. En particulier si* $\tau$ *est modéré* $\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) = \mu_{aut}(k, \tau, \overline{\rho})$*.*

## 6. Exemples potentiellement cristallins en bref

Rappelons déjà que le cas semi-stable avec $1 < k < p$ et $k$ *impair* reste à traiter. Les calculs seront probablement du même ordre de difficulté que pour le cas pair, bien que différents. Nous examinons ci-dessous, sans donner les détails des calculs (lorsque nous les avons faits !), certains cas de la conjecture 2.3.1.1 quand le type galoisien $\tau$ est non scalaire.

6.1. **Exemples de type "série principale".** Le cas le plus simple après $\tau$ scalaire est $\tau \simeq \tilde{\omega}^i \chi|_{I_p} \oplus \chi|_{I_p}$ où $1 \leq i \leq p-2$, $\chi$ est un caractère fini de $I_p$ qui s'étend à $G_p$ et $\tilde{\omega}$ est le relevé de Teichmüller du caractère $\omega$. Quitte à twister par $\chi$ (cf. proposition 2.3.2.2), on peut supposer $\tau \simeq \tilde{\omega}^i \oplus 1$. Les représentations potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ ($k$ entier $\geq 2$) et à représentation de Weil-Deligne isomorphe à $\tau$ après restriction à $I_p$ sont cristallines sur $F = \mathbf{Q}_p(\sqrt[p]{1})$. Soit $\tilde{\pi}$ une uniformisante de $F$ telle que $\tilde{\pi}^{p-1} + p = 0$, ces représentations sont les $V_{st,k}(D)$ où $D = \overline{\mathbf{Q}}_p e_1 \oplus \overline{\mathbf{Q}}_p e_2$ est un module faiblement admissible avec $N = 0$ de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi(e_1) = \xi e_1, \ \varphi(e_2) = \frac{p^{k-1}}{\xi} \mu e_2 \\ Fil^{k-1}(F \otimes_{\mathbf{Q}_p} D) = (F \otimes_{\mathbf{Q}_p} \overline{\mathbf{Q}}_p) \cdot (\tilde{\pi}^i \otimes e_1 + e_2) \\ \mu \in \overline{\mathbf{Z}}_p^{\times}, \ \xi \in \overline{\mathbf{Z}}_p, \ 0 \leq \mathrm{val}_p(\xi) \leq k-1 \end{array} \right.$$

et muni d'une action linéaire de $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ donnée par ($g \in \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g(e_1) & = & e_1 \\ g(e_2) & = & \tilde{\omega}(g)^i e_2. \end{array} \right.$$

(On voit facilement que $D$ est faiblement admissible en utilisant la proposition 3.1.1.5 par exemple et on note que l'action de $G_p$ sur $V_{st,k}(D) \subset B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D$ tient compte ici de l'action de $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ sur $D$.) On pose $D = D(\mu, \xi)$ et $V(\mu, \xi) = V_{st,k}\big(D(\mu, \xi)\big)$. Lorsque $k = 2$, en utilisant la description des groupes $p$-divisibles sur $\mathcal{O}_F$, i.e. des réseaux galoisiens dans les représentations cristallines sur $F$ à poids de Hodge-Tate $\in \{0, 1\}$, donnée dans [Br5], des techniques similaires aux précédentes fournissent les deux propositions :

**Proposition 6.1.1.** *Soient $V$ une représentation potentiellement cristalline de $G_p$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ à poids de Hodge-Tate $(0,1)$ et telle que $WD(V)|_{I_p} \simeq \tilde{\omega}^i|_{I_p} \oplus 1$ où $1 \leq i \leq p-2$, i.e. $V \simeq V(\mu,\xi)$ avec $\mu \in \overline{\mathbf{Z}}_p^{\times}$ et $\xi \in \overline{\mathbf{Z}}_p$, $0 \leq \mathrm{val}_p(\xi) \leq 1$, $T$ un $\overline{\mathbf{Z}}_p$-réseau de $V$ stable par $G_p$ et $\overline{T}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_p}$.*
*(i) Si $val_p(\xi) = 0$ alors $\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\overline{\xi}^{-1}) & * \\ 0 & \omega^i\lambda(\overline{\xi}\overline{\mu}^{-1}) \end{pmatrix}$.*
*(ii) Si $0 < val_p(\xi) < 1$ alors $\overline{T}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{1+i} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(1+i)} \end{pmatrix}$ et $\det(\overline{T}) \simeq \omega^{1+i}\lambda(\overline{\mu}^{-1})$.*
*(iii) Si $val_p(\xi) = 1$ alors $\overline{T} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{1+i}\lambda(\overline{\frac{\xi}{p}}\overline{\mu}^{-1}) & * \\ 0 & \lambda(\overline{\frac{p}{\xi}}) \end{pmatrix}$.*

On fixe $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathbf{F}$ son corps résiduel.

**Proposition 6.1.2.** *Soient $1 \leq i \leq p-2$, $\tau \simeq \tilde{\omega}^i|_{I_p} \oplus 1$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$. On a les résultats suivants :*
*(i) $R(2,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} = 0$ si $\overline{\rho}|_{I_p} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & \omega^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_2^{1+i} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(1+i)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^{1+i} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,*
*(ii) $R(2,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \simeq \mathfrak{O}[[X]]$ si $\overline{\rho}|_{I_p} \in \left\{ \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & \omega^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^{1+i} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,*
*(iii) $R(2,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \simeq \dfrac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(XY-p)}$ si $\overline{\rho}|_{I_p} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{1+i} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(1+i)} \end{pmatrix}$.*

(Noter que ce résultat était conjecturé dans [CDT],conjecture 1.2.2. Pour $\overline{\rho}$ réductible, l'existence d'une surjection $\mathfrak{O}[[X]] \twoheadrightarrow R(2,\tau,\overline{\rho})_{\mathfrak{O}}$ était connue, cf. [CDT],cor.2.1.3.). En remarquant que pour $\tau \simeq \tilde{\omega}^i|_{I_p} \oplus 1$, on a $\sigma(2,\tau) = \mathrm{Ind}_{U_0(p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \tilde{\omega}^i$ (où $\tilde{\omega}^i \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} = [\overline{a}]^i$) et $\overline{\sigma(2,\tau)}^{ss} \simeq \sigma_{i,0} \oplus \sigma_{p-1-i,i}$, on déduit de la règle d'admission et de la proposition 6.1.2 :

**Corollaire 6.1.3.** *Soient $1 \leq i \leq p-2$, $\chi$ un caractère fini de $G_p$, $\tau \simeq \tilde{\omega}^i\chi|_{I_p} \oplus \chi|_{I_p}$ et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{F}}_p[G_p]}(\overline{\rho}) = \overline{\mathbf{F}}_p$. Alors $\mu_{gal}(2,\tau,\overline{\rho}) = \#\chi(I_p^{sauv}) \cdot \mu_{aut}(2,\tau,\overline{\rho})$. En particulier si $\chi$ est modéré $\mu_{gal}(2,\tau,\overline{\rho}) = \mu_{aut}(2,\tau,\overline{\rho})$.*

Lorsque $k > 2$ (et $k < p$), on a seulement une description *conjecturale* des réseaux stables par Galois dans les représentations cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ à poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$ (par des modules fortement divisibles généralisant ceux du §3.2). Cela dit, en utilisant cette description, on peut quand même par des calculs tester la conjecture 2.3.1.1. Par exemple lorsque $k = 3$ et $i = 1$ (et modulo la description conjecturale des réseaux galoisiens), on peut vérifier que ça marche encore...

6.2. **Un exemple de type "supercuspidal".** Dans cette section, on suppose $p = 3$ et on décrit ce que *pourrait* être la situation (nous n'avons pas mené les calculs jusqu'au bout) dans le cas $\tau \simeq (\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_3}\chi)|_{I_3}$ où $K = \mathbf{Q}_3(\sqrt{-3})$ et $\chi : W_K^{ab} = K^\times \to \overline{\mathbf{Z}}_3^\times$ est un caractère donné sur $\mathcal{O}_K^\times$ par :

$$\begin{array}{rclcrcl} \chi(-1) & = & -1, & & \chi(1+\sqrt{-3}) & = & 1 \\ \chi(1+3) & = & 1, & & \chi(1+3\sqrt{-3}) & = & \zeta \end{array}$$

où $\zeta \neq 1$ et $\zeta^3 = 1$ dans $\overline{\mathbf{Z}}_3^\times$. Noter que ce type est un de ceux qui apparaît sur la représentation de Weil-Deligne associée au module de Tate 3-adique d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}_3$ de conducteur 243 (cf. [BCDT]). Les représentations potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ ($k$ entier $\geq 2$) et à représentation de Weil-Deligne isomorphe à $\tau$ après restriction à $I_3$ sont cristallines sur $F = \mathbf{Q}_3(\sqrt[12]{-3})$. Soit $\tilde{\pi} = \sqrt[12]{-3}$, on peut voir que ces représentations sont les $V_{st,k}(D)$ où $D = \overline{\mathbf{Q}}_3 e_1 \oplus \overline{\mathbf{Q}}_3 e_2$ est un module faiblement admissible avec $N = 0$ de la forme suivante (où on fixe $\pi \in \overline{\mathbf{Z}}_3$ tel que $\pi^2 = 3$) :

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi(e_1) = \pi^k \mu e_2,\ \varphi(e_2) = -\pi^{k-2}\mu e_1 \\ Fil^{k-1}(F \otimes_{\mathbf{Q}_3} D) = (F \otimes_{\mathbf{Q}_3} \overline{\mathbf{Q}}_3) \cdot \big((\tilde{\pi}^4 \otimes a + 1 \otimes b)e_1 + \tilde{\pi}^6 \otimes 1(\tilde{\pi}^4 \otimes a - 1 \otimes b)e_2\big) \\ \mu \in \overline{\mathbf{Z}}_3^\times,\ (a,b) \in \overline{\mathbf{Q}}_3^2 \setminus \{(0,0)\} \end{array}\right.$$

avec $\mathbf{Q}_9 \otimes_{\mathbf{Q}_3} D$ muni d'une action $\mathbf{Q}_9$-semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_9[\tilde{\pi}]/\mathbf{Q}_3)$ donnée par :

$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_2(e_1) & = & e_1 \\ \gamma_2(e_2) & = & e_2 \end{array}\right.$ où $\gamma_2 \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_9[\tilde{\pi}]/\mathbf{Q}_3)$, $\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_2(\sqrt{-1}) & = & -\sqrt{-1} \\ \gamma_2(\tilde{\pi}) & = & \tilde{\pi} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_3(e_1) & = & -\frac{1}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 \\ \gamma_3(e_2) & = & \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \end{array}\right.$ où $\gamma_3 \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_9[\tilde{\pi}]/\mathbf{Q}_3)$, $\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_3(\sqrt{-1}) & = & \sqrt{-1} \\ \gamma_3(\tilde{\pi}) & = & -\frac{\tilde{\pi}^6}{2}(1-\tilde{\pi}^6) \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_4(e_1) & = & \sqrt{-1} \otimes e_1 \\ \gamma_4(e_2) & = & -\sqrt{-1} \otimes e_2 \end{array}\right.$ où $\gamma_4 \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_9[\tilde{\pi}]/\mathbf{Q}_3)$, $\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_4(\sqrt{-1}) & = & \sqrt{-1} \\ \gamma_4(\tilde{\pi}) & = & -\sqrt{-1}\tilde{\pi}. \end{array}\right.$

(On voit facilement que $D$ est faiblement admissible en utilisant la proposition 3.1.1.5 par exemple et on note que l'action de $G_3$ sur $V_{st,k}(D) \subset B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_3} D$ tient compte ici de l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_9[\tilde{\pi}]/\mathbf{Q}_3)$ sur $D$.) On pose $c = \frac{b}{a} \in \overline{\mathbf{Q}}_3 \cup \{\infty\}$, $D = D(\mu, c)$ et $V(\mu, c) = V_{st,k}\big(D(\mu, c)\big)$. On convient que $\mathrm{val}_3(c) = +\infty$ si $b = 0$ et $\mathrm{val}_3(c) = -\infty$ si $a = 0$. Supposons $k = 2$ et soient $T$ un $\overline{\mathbf{Z}}_3$-réseau de $V(\mu, c)$ stable par $G_3$ et $\overline{T}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbf{Z}}_3}$. Les calculs partiels que nous avons obtenus (via la description des réseaux dans les représentations cristallines sur $F$ à poids de Hodge-Tate $\in \{0, 1\}$ donnée dans [Br5]) suggèrent la description suivante des $\overline{T}$ possibles (noter qu'ici $\omega^2 = 1$) :

(i) Supposons $\mathrm{val}_3\big(\frac{c^3-3}{c^3+3}\big) > 0$, alors $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$ ou bien $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \otimes \omega$ (et $\det(\overline{T}) = \omega\lambda(\overline{\mu}^{-2})$).

(ii) Supposons $\mathrm{val}_3\big(\frac{c^3-3}{c^3+3}\big) < 0$, alors $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \otimes \omega$ ou bien $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$ (l'autre cas de (i)).

(iii) Supposons $\mathrm{val}_3\big(\frac{c^3-3}{c^3+3}\big) = 0$.

- Si $\mathrm{val}_3(c) \leq 0$, alors $\overline{T}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié ou $\overline{T}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié,
- si $0 < \mathrm{val}_3(c) < \frac{1}{3}$, alors $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié et mêmes caractères diagonaux

non ramifiés (pour $\overline{T}$) ou $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié et mêmes caractères diagonaux non ramifiés (pour $\overline{T}$),

• si $\mathrm{val}_3(c) = \frac{1}{3}$, alors $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié et caractères diagonaux non ramifiés différents (pour $\overline{T}$) ou $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié et caractères diagonaux non ramifiés différents (pour $\overline{T}$),

• si $\frac{1}{3} <\mathrm{val}_3(c) < \frac{1}{2}$, alors $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié et mêmes caractères diagonaux non ramifiés (pour $\overline{T}$) ou $\overline{T}|_{I_3} \overset{?}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié et mêmes caractères diagonaux non ramifiés (pour $\overline{T}$),

• si $\mathrm{val}_3(c) \geq \frac{1}{2}$, alors $\overline{T}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié ou $\overline{T}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié.

(L'absence de ? au dessus d'un $\simeq$ signifie que l'on a complètement vérifié l'assertion.)
Les calculs suggèrent que les modules fortement divisibles correspondant aux réseaux galoisiens dépendent de $\mu$ et des quantités suivantes (suivant les cas précédents) : (i) $X = c$ et $Y = \frac{c^3}{3} - 1$, (ii) $X = c$ et $Y = \frac{c^3}{3} + 1$, (iii) $X = c^{-1} - [\overline{c^{-1}}]$ si $\mathrm{val}_3(c) \leq 0$, $X = c$ et $Y = \frac{3}{c^3}$ si $0 <\mathrm{val}_3(c) < \frac{1}{3}$, $X = c$ et $Y = \frac{c^3}{3} - \left[\overline{\frac{c^3}{3}}\right]$ si $\mathrm{val}_3(c) = \frac{1}{3}$, $X = \frac{3}{c^2}$ et $Y = \frac{c^3}{3}$ si $\frac{1}{3} <\mathrm{val}_3(c) < \frac{1}{2}$ et $X = c$, $Y = \frac{c^2}{3} - \left[\overline{\frac{c^2}{3}}\right]$ si $\mathrm{val}_3(c) \geq \frac{1}{2}$.
Fixons $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, $\mathbf{F}$ son corps résiduel et $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ une représentation finie telle que $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_p]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$. Par analogie avec la situation semi-stable, quitte à agrandir $\mathbf{F}$ il semble alors raisonnable d'attendre les anneaux de déformations suivants (cf. définition 5.1.3 pour le symbole $\sim$) :

(i) $R(2, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \overset{?}{\sim} \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3-3(Y+1))} \times \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3-3(Y+1))}$, donc $\mu_{gal}(2, \tau, \overline{\rho}) \overset{?}{=} 3 + 3 = 6$, si $\overline{\rho}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$ ou $\overline{\rho}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \otimes \omega$,

(ii) $R(2, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \overset{?}{\sim} \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3-3(Y-1))} \times \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3-3(Y-1))}$, donc $\mu_{gal}(2, \tau, \overline{\rho}) \overset{?}{=} 3 + 3 = 6$, si $\overline{\rho}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \otimes \omega$ ou $\overline{\rho}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$ (l'autre cas de (i)),

(iii) $R(2, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \overset{?}{\sim} \mathfrak{O}[[X]] \times \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^2-3(Y+\lambda))}$ (pour un $\lambda \in W(\mathbf{F})^\times \subset \mathfrak{O}^\times$ dépendant de $\overline{\rho}$), donc $\mu_{gal}(2, \tau, \overline{\rho}) \overset{?}{=} 1 + 2 = 3$, si $\overline{\rho}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié ou $\overline{\rho}|_{I_3} \simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ avec $*$ très ramifié,

(iv) $R(2, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \overset{?}{\sim} \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3Y-3)} \times \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3Y^2-3)}$, donc $\mu_{gal}(2, \tau, \overline{\rho}) \overset{?}{=} 4+5 = 9$, si $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié ou $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega\lambda(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié ($\alpha \in \mathbf{F}^\times$),

(v) $R(2, \tau, \overline{\rho})_{\mathfrak{O}} \overset{?}{\sim} \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3-3(Y+\lambda_1))} \times \frac{\mathfrak{O}[[X,Y]]}{(X^3-3(Y+\lambda_2))}$ (pour des $\lambda_i \in W(\mathbf{F})^\times \subset \mathfrak{O}^\times$ dépendant

de $\overline{\rho}$), donc $\mu_{gal}(2,\tau,\overline{\rho}) \overset{?}{=} 3+3=6$, si $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega\lambda(\alpha) & * \\ 0 & \lambda(\beta) \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié ou $\overline{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \lambda(\alpha) & * \\ 0 & \omega\lambda(\beta) \end{pmatrix}$ avec $*$ peu ramifié ($\alpha, \beta \in \mathbf{F}^\times$, $\alpha \neq \beta$).
Signalons au passage qu'une bonne partie de [BCDT] consistait à “isoler” les familles en $\mathfrak{O}[[X]]$ ci-dessus (qui n'apparaissent que dans le cas très ramifié). Côté Langlands local, on a par le (iii) du théorème 2.1.1.4 :

$$\sigma(\tau) \simeq \left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{O}_K^\times(1+3\mathfrak{O}_K s)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)} \chi\chi''\right)$$

(c'est-à-dire $a=4$ et on peut choisir $\chi'=1$). En prenant $(\sqrt{-3},1)$ comme $\mathbf{Z}_3$-base de $\mathfrak{O}_K$, on vérifie que :

$$\mathfrak{O}_K^\times(1+3\mathfrak{O}_K s) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} \in U_0(3) \;\mid\; a \equiv d\ (3),\ b \equiv -c\ (3)\right\} = U.$$

Posons $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} \in U_0(3) \;\mid\; a \equiv d\ (3)\right\}$, on a les extensions de groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & U & \to & V & \to & \mathbf{F}_3 & \to & 0 \\ 1 & \to & V & \to & U_0(3) & \to & \mathbf{F}_3^\times & \to & 1 \end{array}$$

où $V \to \mathbf{F}_3$ est donné par $\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} \mapsto \overline{a}^{-1}(\overline{b}+\overline{c})$ et $U_0(3) \to \mathbf{F}_3^\times$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} \mapsto \overline{a}^{-1}\overline{d}$.
On en déduit (en remarquant que $\overline{\chi\chi''} = \overline{1}$ puisque $\chi\chi''$ est d'ordre 3) :

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma(2,\tau)}^{ss} &= \overline{\sigma(\tau)}^{ss} = \left(\mathrm{Ind}_U^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)} \overline{1}\right)^{ss} \\
&= \left(\mathrm{Ind}_{U_0(3)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)}\left(\mathrm{Ind}_V^{U_0(3)}\left(\mathrm{Ind}_U^V \overline{1}\right)\right)\right)^{ss} \\
&= \left(\mathrm{Ind}_{U_0(3)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)}\left(\mathrm{Ind}_V^{U_0(3)}(\overline{1}\oplus\overline{1}\oplus\overline{1})\right)\right)^{ss} \\
&= \left(\mathrm{Ind}_{U_0(3)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)}\left({\sigma'_{0,0}}^3 \oplus {\sigma'_{1,1}}^3\right)\right)^{ss} \\
&= \sigma_{0,0}^3 \oplus \sigma_{2,0}^3 \oplus \sigma_{0,1}^3 \oplus \sigma_{2,1}^3
\end{aligned}$$

où $\sigma'_{i,j}\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} = \overline{a}^i\overline{d}^j$ si $i,j \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (cf. aussi [BCDT],§3.4). C'est alors un exercice de vérifier que la règle d'admission du §2.1.2 redonne bien les mêmes multiplicités que précédemment (notons que dans ce cas $\det(\tau)=1$).

## Références


[BL1] Barthel L., Livné R., *Modular representations of* $\mathrm{GL}_2$ *of a local field : the ordinary, unramified case*, J. of Number Theory 55, 1995, 1-27.

[BL2] Barthel L., Livné R., *Irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2$ *of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261-292.

[Br1] Breuil C., *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen 307, 1997, 191-224.

[Br2] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. E.N.S. 31, 1998, 281-327.

[Br3] Breuil C., *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke Math. J. 95, 1998, 523-620.

[Br4] Breuil C., *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles*, Inv. Math. 136, 1999, 89-122.

[Br5] Breuil C., *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. 152, 2000, 489-549.

[Br6] Breuil C., *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. Soc. Math. France 127, 1999, 459-472.

[BCDT] Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R., *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbf{Q}$ *: wild 3-adic exercices*, J. Amer. Math. Soc. 14, 2001, 843-939.

[CF] Colmez P., Fontaine J.-M., *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inv. Math. 140, 2000, 1-43.

[CDT] Conrad B., Diamond F., Taylor R., *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate* Gal*ois representations*, J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, 521-567.

[Co] Coleman R., *A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 21-51.

[De] Deligne P., *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Lecture Notes in Math. 349, Springer, 1973, 501-595.

[DS] Deligne P., Serre J.-P., *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Scient. E.N.S. 7, 1974, 507-530.

[Ed] Edixhoven B., *The weight in Serre's conjectures on modular forms*, Inv. Math. 109, 1992, 563-594.

[Fo1] Fontaine J.-M., *Représentations* $\ell$*-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 321-347.

[Fo2] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.

[Fo3] Fontaine J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 59-101.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[FM] Fontaine J.-M., Mazur B., *Geometric* Gal*ois representations*, Elliptic curves, Modular Forms and Fermat's Last Theorem (Hong-Kong 1993), International Press, 1995, 41-78.

[Ge] Gérardin P., *Facteurs locaux des algèbres simples de rang 4 I*, Groupes réductifs et formes automorphes I, Université Paris VII, 1978, 37-77.

[JL] Jacquet H., Langlands R., *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Math. 114, Springer Verlag, 1971.

[KM] Katz N., Messing W., *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Inv. Math. 23, 1974, 73-77.

[Kh] Khare C., *A local analysis of congruences in the* $(p,p)$ *case : Part II*, to appear in Inv. Math.

[Ku] Kutzko P., *The local Langlands conjecture for* GL(2) *of a local field*, Ann. of Math. 112, 1980, 381-412.

[Mat] Matsumura H., *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press, 1986.

[Maz] Mazur B., *On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 1-20.

[Sa] Saito T., *Modular forms and p-adic Hodge theory*, Inv. Math. 129, 1997, 607-620.

[Sc] Scholl T., *Motives for modular forms*, Inv. Math. 100, 1990, 419-430.

[ST] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory with applications to* $\mathrm{GL}_2$, prépublication, Münster, décembre 1999.

[Se1] Serre J.-P., *Sur les représentations modulaires de degré 2 de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. 54, 1987, 179-230.

[Se2] Serre J.-P., *Abelian $\ell$-adic representations and elliptic curves*, W. A. Benjamin, Inc., New-York, 1968.

[TW] Taylor R., Wiles A., *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. 141, 1995, 553-572.

[Te] Teitelbaum J., *Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel*, Inv. Math. 101, 1990, 395-410.

[Ts] Tsuji T., *P-adic-étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inv. Math. 137, 1999, 233-411.

[Wa] Wach N., *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. 108, 1997, 185-240.

[Wi] Wiles A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math. 141, 1995, 443-551.

Adresse : Christophe Breuil et Ariane Mézard, Département de Mathématiques et UMR 8628 du CNRS, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, FRANCE.
Courriel : Christophe.Breuil@math.u-psud.fr, Ariane.Mezard@math.u-psud.fr

## Annexe A. Sur l'unicité des types pour $\mathrm{GL}_2$ (par Guy Henniart)

### A.1. **Introduction.**

A.1.1. Soit $F$ un corps commutatif localement compact non archimédien. Fixons une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de $F$ et notons $W_F$ le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur $F$. Normalisons l'application de réciprocité $\tau_F : W_F \to F^\times$ de façon que les substitutions de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes de $F$. Comme $\tau_F$ induit un isomorphisme entre $W_F^{ab}$ et $F^\times$, on obtient une bijection canonique entre les quasicaractères de $W_F$ et ceux de $F^\times$[1]. Plus généralement, Langlands a conjecturé l'existence, pour chaque entier $n \geq 1$, d'une bijection canonique $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de l'ensemble $\mathcal{G}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations $\Phi$-semisimples de dimension $n$ du groupe de Weil-Deligne de $F$ ([Ta],§3) sur l'ensemble $\mathcal{A}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$. Pour $n = 1$, $\mathcal{G}_F(1)$ s'identifie à l'ensemble des quasicaractères de $W_F$, $\mathcal{A}_F(1)$ à l'ensemble des quasicaractères de $F^\times$ et l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F(1)$ dans $\mathcal{A}_F(1)$ est l'application réciproque de la bijection $\chi \mapsto \chi \circ \tau_F$ de $\mathcal{A}_F(1)$ sur $\mathcal{G}_F(1)$.
Dans la suite, nous nous intéressons uniquement au cas où $n = 2$ et nous posons $G = \mathrm{GL}_2(F)$. H. Jacquet et R.P. Langlands ([JL]) ont construit $\pi(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(2)$ réductible, ou quand la caractéristique résiduelle de $F$ est impaire. Ph. Kutzko ([Ku2]) a ensuite construit $\pi(\sigma)$ dans tous les autres cas, obtenant alors la bijection voulue.

**Remarque A.1.1.1.** Les correspondances de Langlands mentionnées ci-dessus ont été établies en 1999 pour tout entier $n \geq 2$ par M. Harris et R. Taylor ([HT], voir aussi [He]).

A.1.2. Si $\sigma \in \mathcal{G}_F(2)$ est irréductible, alors $\pi(\sigma) \in \mathcal{A}_F(2)$ est supercuspidale, et réciproquement. Si $\sigma \in \mathcal{G}_F(2)$ est réductible, nous allons décrire $\pi(\sigma)$. Deux cas sont en fait possibles. Dans le premier, il existe des quasicaractères $\chi_1$, $\chi_2$ de $F^\times$ tels que $\sigma = \chi_1 \circ \tau_F \oplus \chi_2 \circ \tau_F$ ; alors $\pi(\sigma)$ est la série principale $\pi(\chi_1, \chi_2)$ ([JL],§3). Dans le second cas, $\sigma$ est indécomposable ; notant $|\ |$ le quasicaractère norme de $F^\times$, il existe un quasicaractère $\chi$ de $F^\times$ tel que la représentation de $W_F$ sous-jacente à $\sigma$ soit isomorphe à $\chi|\ |^{-1/2} \circ \tau_F \oplus \chi|\ |^{1/2} \circ \tau_F$, et $\pi(\sigma)$ n'est autre que la représentation spéciale $(\chi \circ \det) \otimes St_G$ où $St_G$ est la représentation de Steinberg de $G$ (notée $\sigma(|\ |^{-1/2}, |\ |^{1/2})$ dans *loc.cit.*).

**Remarque A.1.2.1.** La représentation $\pi(\chi|\ |^{-1/2}, \chi|\ |^{1/2})$ n'est autre que le quasicaractère $\chi \circ \det$ de $G$. Les éléments de $\mathcal{A}_F(2)$ qui ne sont pas de cette forme $\chi \circ \det$ sont de dimension infinie.

**Remarque A.1.2.2.** La correspondance $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F(2)$ sur $\mathcal{A}_F(2)$ est compatible à la torsion par les quasicaractères de $F^\times$ au sens où pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F(2)$ et tout quasicaractère $\chi$ de $F^\times$, on a $\pi((\chi \circ \tau_F) \otimes \sigma) = (\chi \circ \det) \otimes \pi(\sigma)$.

A.1.3. Nous allons introduire une partition de $\mathcal{A}_F(2)$ en composantes.

**Définition A.1.3.1.** *Deux éléments $\pi$ et $\pi'$ de $\mathcal{A}_F(2)$ sont dans la même composante si les éléments $\sigma$ et $\sigma'$ de $\mathcal{G}_F(2)$ auxquels $\pi$ et $\pi'$ correspondent ont même restriction au groupe d'inertie $I_F$ de $W_F$ (à isomorphisme près).*

[1] Pour nous, un quasicaractère d'un groupe topologique $G$ est un homomorphisme continu de $G$ dans $\mathbf{C}^\times$. C'est un caractère si en outre ses valeurs sont des nombres complexes de module 1.

Rappelons que J. Bernstein ([De]) a donné une décomposition de la catégorie des représentations lisses de $G$ en produit de sous-catégories indécomposables. Il découle immédiatement des définitions de [De] et du §A.1.2 que, pour que deux éléments de $\mathcal{A}_F(2)$ soient dans la même composante, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à la même sous-catégorie dans la décomposition de Bernstein.
En fait, les composantes se décrivent aisément d'après le §A.1.2 précédent. Il y a d'abord les composantes supercuspidales : si $\pi \in \mathcal{A}_F(2)$ est supercuspidale, la composante de $\pi$ est formée des $(\eta \circ \det) \otimes \pi$ où $\eta$ parcourt les quasicaractères non ramifiés de $F^\times$. Puis il y a les composantes spéciales : si $\chi$ est un quasicaractère de $F^\times$, la composante de $(\chi \circ \det) \otimes St_G$ est formée des $((\eta\chi) \circ \det) \otimes St_G$ et des représentations $\pi(\eta_1\chi|\ |^{-1/2}, \eta_2\chi|\ |^{1/2})$ où $\eta, \eta_1, \eta_2$ parcourent les quasicaractères non ramifiés de $F^\times$. Un cas particulier est la composante triviale $s_0$, qui est celle de $St_G$ (ou du quasicaractère trivial de $G$, si l'on veut). Enfin, il y a les composantes principales : si $\chi_1$ et $\chi_2$ sont des quasicaractères de $F^\times$ tels que $\chi_1\chi_2^{-1}$ est ramifié, alors la composante de $\pi(\chi_1, \chi_2)$ est formée des $\pi(\eta_1\chi_1, \eta_2\chi_2)$, où $\eta_1$ et $\eta_2$ parcourent à nouveau les quasicaractères non ramifiés de $F^\times$.

**Remarque A.1.3.2.** Soient $\pi \in \mathcal{A}_F(2)$ et $\chi$ un quasicaractère de $F^\times$. Alors l'application $\pi' \mapsto (\chi \circ \det) \otimes \pi'$ induit une bijection de la composante de $\pi$ sur celle de $(\chi \circ \det) \otimes \pi$. Cela découle aussitôt de la remarque A.1.2.2.

A.1.4. Posons $K = \mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_F)$, où $\mathfrak{O}_F$ est l'anneau des entiers de $F$.

**Définition A.1.4.1.** *Soient $\lambda$ une représentation lisse irréductible de $K$ et $s$ une composante de $\mathcal{A}_F(2)$.*
*(i) On dit que $\lambda$ est typique pour $s$ si les seuls éléments $\pi$ de $\mathcal{A}_F(2)$ où $\lambda$ intervienne (au sens où $\lambda$ est un constituant de $\pi|_K$) sont dans la composante $s$ et si $\lambda$ intervient dans au moins un élément de cette composante.*
*(ii) On dit que $\lambda$ est un type pour $s$ si $\lambda$ est typique pour $s$ et si $\lambda$ intervient dans tous les éléments de la composante $s$.*

On voit immédiatement que dire que $\lambda$ est un type pour $s$ signifie précisément que $\lambda$ est un type au sens de Bushnell-Kutzko ([BK2],§4) pour le facteur correspondant à $s$ dans la décomposition de Bernstein.
Pour chaque composante $s$ de $\mathcal{A}_F(2)$, nous allons déterminer (à isomorphisme près) toutes les représentations lisses irréductibles typiques de $K$.

**Remarque A.1.4.2.** Pour énoncer nos résultats de façon simple, il est commode de remarquer que si $s$ est la composante de $\pi \in \mathcal{A}_F(2)$ et $\chi$ un quasicaractère de $F^\times$, alors $\lambda$ est typique pour $s$ (resp. est un type pour $s$) si et seulement si $(\chi \circ \det) \otimes \lambda$ est typique (resp. est un type) pour la composante de $(\chi \circ \det) \otimes \pi$ : en effet la multiplicité de $(\chi \circ \det) \otimes \lambda$ dans $(\chi \circ \det) \otimes \rho|_K$ est égale à celle de $\lambda$ dans $\rho|_K$ pour tout $\rho \in \mathcal{A}_F(2)$, et on applique la remarque A.1.3.2.

A.1.5. Voici les résultats que nous démontrons dans les deux chapitres suivants.

1) Si $s$ est une composante supercuspidale, alors il existe une représentation lisse irréductible de $K$ typique pour $s$, unique à isomorphisme près. C'est un type pour $s$, et elle intervient avec multiplicité 1 dans tout élément de $s$.

2) Si $s$ est la composante triviale $s_0$ de $St_G$, alors il y a, à isomorphisme près, exactement deux représentations lisses irréductibles de $K$ typiques pour $s_0$. La première est la représentation triviale de $K$, qui intervient avec multiplicité 1 dans toutes les représentations de $s_0$ dans la série principale, mais pas dans les représentations spéciales. La seconde est la représentation de $K$ qui provient, par inflation, de la représentation de Steinberg du quotient $\mathrm{GL}_2(k_F)$ de $K$ (où $k_F$ désigne le corps résiduel de $F$). Elle intervient avec multiplicité 1 dans les représentations spéciales de $s_0$ et dans les représentations de $s_0$ qui sont de la série principale et de dimension infinie, et elle n'intervient bien sûr pas dans les quasicaractères de $G$. Aucune de ces deux représentations typiques pour $s_0$ n'est donc un type pour $s_0$.

3) Si enfin $s$ est une composante principale de $\mathcal{A}_F(2)$, il y a à isomorphisme près, exactement une représentation lisse irréductible de $K$ typique pour $s$, **sauf** si le cardinal de $k_F$ est 2, auquel cas il y a, à isomorphisme près, exactement deux représentations lisses irréductibles de $K$ typiques pour $s$. Toute représentation lisse irréductible de $K$ typique pour $s$ est un type pour $s$ et intervient avec multiplicité 1 dans les éléments de $s$.

**Remarque A.1.5.1.** Les seules composantes qui n'apparaissent pas dans 1), 2) et 3) sont celles des représentations de la forme $(\chi \circ \det) \otimes St_G$ où $\chi$ est un quasicaractère *ramifié* de $F^\times$. Mais on obtient les représentations typiques de ces composantes à partir du cas 2) par torsion par $\chi \circ \det$, cf. la remarque A.1.4.2.

A.1.6. Les représentations typiques seront décrites au cours de la démonstration. La méthode utilisée consiste simplement à identifier la restriction à $K$ (ou une grande partie de cette restriction) de chaque élément de $\mathcal{A}_F(2)$ en suivant les renseignements donnés par Casselman ([Ca]) pour les séries principales et spéciales et par Kutzko ([Ku1]) pour les représentations supercuspidales. Les deux chapitres A.2 et A.3 correspondent à ces deux cas traités successivement.
Il est vraisemblable que ces résultats s'étendent à $\mathrm{GL}_n$ pour $n \geq 3$. L'extension à $\mathrm{GL}_n$ pour les représentations supercuspidales devrait être facile en utilisant [BK1], mais le cas général demanderait à examiner beaucoup plus en détail les constructions difficiles de types dans [BK3].

## A.2. **Les séries principales et spéciales.**

A.2.1. Dans la suite, nous notons $\mathfrak{O}_F$ l'anneau des entiers de $F$, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal, $k_F = \mathfrak{O}_F/\mathfrak{p}_F$ son corps résiduel et $q = q_F$ le cardinal de $k_F$. Nous notons aussi $U_F$ le groupe des unités de $\mathfrak{O}_F$, qui est filtré par ses sous-groupes $U_F^i = 1+\mathfrak{p}_F^i$ pour $i$ entier $\geq 1$. Nous fixons également une uniformisante $\varpi_F$ de $F$ et un caractère additif $\psi$ de $F$ trivial sur $\mathfrak{p}_F$ mais non sur $\mathfrak{O}_F$ ($\varpi_F$ et $\psi$ ne serviront qu'au chapitre A.3).
Pour chaque caractère $\varepsilon_0$ de $U_F$, nous notons $s(\varepsilon_0)$ la composante de $\mathcal{A}_F(2)$ qui contient $\pi(\tilde{\varepsilon}_0, 1)$ pour tout quasicaractère $\tilde{\varepsilon}_0$ de $F^\times$ dont la restriction à $U_F$ est $\varepsilon_0$. Si $\varepsilon_0$ est le caractère trivial de $U_F$, on a $s(\varepsilon_0) = s_0$. Toute composante spéciale ou principale de $\mathcal{A}_F(2)$ s'obtient, par torsion par un quasicaractère de $F^\times$, à partir d'une composante de la forme $s(\varepsilon_0)$ (cf. la remarque A.1.4.2). Nous pouvons donc nous contenter de déterminer les représentations typiques pour ces composantes $s(\varepsilon_0)$.

A.2.2. Fixons donc un caractère $\varepsilon_0$ de $U_F$ et notons $\mathfrak{p}_F^{N_0}$ son conducteur d'Artin ; l'entier $N_0$ est alors appelé l'exposant de $\varepsilon_0$. Si $\chi_1, \chi_2$ sont deux quasicaractères de $F^\times$ tels que $\chi_1|_{U_F} = \varepsilon_0$ et $\chi_2|_{U_F} = 1$, la restriction à $K$ de l'induite parabolique (normalisée ou non) de $\chi_1 \otimes \chi_2$ ne dépend que de $\varepsilon_0$ et se décrit, d'après ([Ca],p.311), de la façon suivante. Pour chaque entier $N \geq 1$, on note $K(N)$ le groupe $1 + M_2(\mathfrak{p}_F^N)$ et on pose $K(0) = K$. Pour chaque entier $N \geq 0$, on note $K_0(N)$ le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $K$ telles que $c$ appartienne à $\mathfrak{p}_F^N$. On a $K_0(0) = K(0) = K$. Pour $N$ entier $\geq N_0$, on pose $\mathrm{Ind}_N(\varepsilon_0) = \mathrm{Ind}_{K_0(N)}^K(\varepsilon)$, où $\varepsilon$ est le caractère de $K_0(N)$ défini par $\varepsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varepsilon_0(a)$, et on note $u_N(\varepsilon_0)$ le complément de $\mathrm{Ind}_{N-1}(\varepsilon_0)$ dans $\mathrm{Ind}_N(\varepsilon_0)$. D'après ([Ca],prop.1), $u_N(\varepsilon_0)$ est irréductible pour tout entier $N \geq N_0$ : c'est l'unique représentation irréductible de $K$, à isomorphisme près, qui soit triviale sur $K(N)$ mais non sur $K(N-1)$ et contienne un vecteur non nul qui se transforme suivant le caractère $\varepsilon$ de $K_0(N)$ (*loc.cit.*,p.312).
Si $\chi_1, \chi_2$ sont deux quasicaractères de $F^\times$ comme précédemment, la restriction à $K$ de l'induite parabolique de $\chi_1 \otimes \chi_2$ est la somme directe des représentations irréductibles $u_N(\varepsilon_0)$ pour $N \geq N_0$ (ces représentations sont inéquivalentes). De plus, $u_{N_0}(\varepsilon_0)$ n'apparaît dans aucune représentation lisse supercuspidale de $G$ (*loc.cit.*,prop.2).

A.2.3. Examinons d'abord le cas où $\varepsilon_0 = 1$ i.e. $s(\varepsilon_0) = s_0$. Alors $u_0(1)$ est la représentation triviale de $K$ et $u_1(1)$ s'obtient par inflation à partir de la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(k_F) \simeq K/K(1)$. Comme $u_0(1)$ et $u_1(1)$ sont les deux composantes irréductibles de l'induite à $K$ de la représentation triviale du sous-groupe d'Iwahori $K_0(1)$ de $G$ et que cette dernière est un type pour $s_0$ ([BK2],§9.2), on voit que $u_0(1)$ et $u_1(1)$ sont typiques pour $s_0$. Les multiplicités annoncées au §A.1.5 sont immédiates.

A.2.4. Pour $\varepsilon_0 \neq 1$, il est bien connu que $u_{N_0}(\varepsilon_0)$ est typique pour $s(\varepsilon_0)$, c'est même un type pour $s(\varepsilon_0)$ : il s'agit là du cas le plus élémentaire de type semi-simple au sens de Bushnell-Kutzko, cf. [BK3]. Par le §A.2.2 elle intervient avec multiplicité 1 dans tout $\pi \in s(\varepsilon_0)$. Il s'agit maintenant d'examiner si $u_N(1)$ pour $N \geq 2$ et $u_N(\varepsilon_0)$ pour $\varepsilon_0 \neq 1$ et $N \geq N_0 + 1$ sont typiques ou non. Rappelons pour cela le théorème 1 de [Ca] :

**Théorème A.2.4.1.** *Soient $\pi$ une représentation lisse irréductible de $G$ de conducteur $\mathfrak{p}_F^{c(\pi)}$ avec $c(\pi) \geq 1$, $\omega_\pi$ le caractère central de $\pi$ et $\eta_0 = \omega_\pi|_{U_F}$. Alors le complément dans $\pi|_K$ de l'espace des points fixes par $K(c(\pi)-1)$ est la représentation $\sum_{N \geq c(\pi)} u_N(\eta_0)$.*

Notons que pour $c(\pi) = 0$, $\pi$ est non ramifiée et sa restriction à $K$ est connue, cf. §A.2.2. Pour $\varepsilon_0 = 1$, prenons pour $\pi$ une représentation lisse irréductible supercuspidale de niveau 0 (i.e. ayant un vecteur non nul fixe par $K(1)$) et telle que $\omega_\pi|_{U_F} = \varepsilon_0 = 1$ (on vérifie aisément, par exemple à l'aide de A.3.2 ci-dessous, qu'il en existe, même pour $q = 2$). Alors $c(\pi) = 2$ et, comme par le théorème ci-dessus $u_N(1)$ intervient dans $\pi$ pour $N \geq 2$, on voit que $u_N(1)$ n'est pas typique pour $N \geq 2$. Pour $\varepsilon_0 \neq 1$ et $N_0 = 1$ (ce cas n'existe pas pour $q = 2$), on prend pour $\pi$ une représentation lisse irréductible supercuspidale de niveau 0 telle que $\omega_\pi|_{U_F} = \varepsilon_0$. Pour la même raison, $u_N(\varepsilon_0)$ n'est pas typique pour $N \geq 2$.

A.2.5. Pour $\varepsilon_0 \neq 1$ et $N_0 \geq 2$, il faut distinguer suivant que $q$ vaut 2 ou non. Supposons d'abord $q \geq 3$. Soient $\eta$ un caractère modéré non trivial de $U_F$ et $\chi_1, \chi_2$ deux quasicaractères de $F^\times$ tels que $\chi_1|_{U_F} = \eta\varepsilon_0$ et $\chi_2|_{U_F} = \eta^{-1}$ ; alors la série principale $\pi(\chi_1, \chi_2)$ n'appartient pas à la composante $s(\varepsilon_0)$ et son conducteur est $\mathfrak{p}_F^{N_0+1}$. On voit donc par le théorème A.2.4.1 que pour $N \geq N_0+1$, $u_N(\varepsilon_0)$ intervient dans $\pi(\chi_1, \chi_2)|_K$ et n'est pas typique pour $s(\varepsilon_0)$. Cela prouve que pour $\varepsilon_0 \neq 1$ et $q \geq 3$, $u_{N_0}(\varepsilon_0)$ est la seule représentation typique pour $s(\varepsilon_0)$.

A.2.6. On suppose maintenant $\varepsilon_0 \neq 1$ et $q = 2$ (donc $N_0 \geq 2$). Il s'agit de déterminer si $u_N(\varepsilon_0)$ est typique ou non pour $N \geq N_0 + 1$. Si $N_0$ vaut au moins 3, choisissons un caractère $\eta$ de $U_F$ de conducteur $\mathfrak{p}_F^2$ et construisons $\pi = \pi(\chi_1, \chi_2)$ de conducteur $\mathfrak{p}_F^{N_0+2}$ comme au paragraphe précédent. Alors $u_N(\varepsilon_0)$ intervient dans $\pi|_K$ pour $N \geq N_0 + 2$ et comme $\pi$ n'est pas dans la composante $s(\varepsilon_0)$, $u_N(\varepsilon_0)$ n'est pas typique pour $N \geq N_0 + 2$. Pour $N_0 = 2$, c'est $\varepsilon_0$ lui-même qui est l'unique caractère de $U_F$ de conducteur $\mathfrak{p}_F^2$ et on ne peut utiliser le même raisonnement. Si $E$ est une extension quadratique non ramifiée de $F$, on peut trouver un caractère $\theta$ de $E^\times$ de conducteur $\mathfrak{p}_E^2$, non stable par l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$, et dont la restriction à $U_F$ est $\varepsilon_0$. La représentation $\pi(\theta)$ associée à $\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\theta)$ par la correspondance locale est alors supercuspidale et de conducteur $\mathfrak{p}_F^4$. Par le théorème ci-dessus $u_N(\varepsilon_0)$ intervient dans $\pi(\theta)$ pour $N \geq 4$ et n'est donc pas typique.
Nous allons montrer que pour $q = 2$, $\varepsilon_0 \neq 1$ (et $N_0 \geq 2$), $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ est aussi typique pour $s(\varepsilon_0)$. Par le §A.2.2 elle intervient avec multiplicité 1 dans tous les éléments de $s(\varepsilon_0)$ ; c'est donc un type pour $s(\varepsilon_0)$.

A.2.7. On suppose donc $q = 2$, $\varepsilon_0 \neq 1$ et on veut montrer que $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ n'intervient ni dans les séries principales de composante différente de $s(\varepsilon_0)$, ni dans les représentations supercuspidales ou spéciales. Soit $\pi$ une représentation lisse irréductible de $G$ où $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ intervient ; alors $\pi$ est générique puisqu'elle ne peut être de dimension 1. Comme $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ a un vecteur fixe non nul sous le groupe $\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}_F^{N_0} & \mathfrak{O}_F \\ \mathfrak{p}_F^{N_0+1} & U_F \end{pmatrix}$ qui contient un conjugué de $\begin{pmatrix} U_F & \mathfrak{O}_F \\ \mathfrak{p}_F^{N_0+1} & 1+\mathfrak{p}_F^{N_0+1} \end{pmatrix}$, l'exposant de $\pi$ est au plus $N_0 + 1$. Si $\pi$ est une série principale $\pi(\chi_1, \chi_2)$, la somme des exposants de $\chi_1$ et $\chi_2$ est donc au plus $N_0 + 1$. Mais on a aussi $\chi_1\chi_2|_{U_F} = \varepsilon_0$ ce qui implique que $\chi_1$ ou $\chi_2$ est d'exposant au moins $N_0$, donc que $\chi_1$ ou $\chi_2$ est d'exposant 0 ou 1. Comme $q = 2$, l'exposant 1 ne peut intervenir ce qui entraîne que $\pi(\chi_1, \chi_2)$ appartient à la composante $s(\varepsilon_0)$. Le même raisonnement montre que $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ n'intervient pas dans les représentations spéciales. Si maintenant $\pi$ est supercuspidale, on a $\omega_\pi|_{U_F} = \varepsilon_0$, d'où $c(\pi) \geq 2N_0 > N_0 + 1$, de sorte que par le théorème A.2.4.1 $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ intervient dans le sous-espace de l'espace de $\pi$ formé des points fixes par $K(c(\pi)-1)$. Mais d'après ([Ca],thm.2) cet espace ne contient aucun vecteur non nul fixe par $\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il ne peut donc contenir $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$.
En conclusion, pour $q = 2$, $\varepsilon_0 \neq 1$ (et donc $N_0 \geq 2$), on a deux types pour $s(\varepsilon_0)$, à savoir $u_{N_0}(\varepsilon_0)$ et $u_{N_0+1}(\varepsilon_0)$ qui tous deux interviennent avec multiplicité 1 dans les éléments de $s(\varepsilon_0)$.

## A.3. **Les représentations supercuspidales.**

A.3.1. Il reste à examiner les composantes supercuspidales de $\mathcal{A}_F(2)$. Nous utiliserons les constructions des éléments supercuspidaux de $\mathcal{A}_F(2)$ dues à P. Kutzko ([Ku1], voir aussi [Ku2]). Notre description est proche de celle de [GK].
L'existence d'un type pour une composante supercuspidale $s$ donnée de $\mathcal{A}_F(2)$ ne pose pas de problème. En effet, d'après les références ci-dessus, pour chaque $\pi \in s$ il existe un couple, formé d'un sous-groupe ouvert $J$ de $G$ compact modulo le centre de $G$ et d'une représentation lisse irréductible $\lambda$ de $J$, tel que $\pi$ soit l'induite compacte de $\lambda$, de $J$ à $G$ ; un autre élément de $s$ est de la forme $(\eta \circ \det) \otimes \pi$ (où $\eta$ est un quasicaractère non ramifié de $F^\times$) qui est induite compacte de la représentation $(\eta \circ \det) \otimes \lambda$ de $J$. La restriction $\lambda^0$ de $\lambda$ au sous-groupe compact maximal $J^0$ de $J$ est un type pour $s$ au sens de [BK2],§5 et intervient avec multiplicité 1 dans tous les éléments de $s$. On peut conjuguer à loisir la paire $(J, \lambda)$ dans $G$ sans changer le résultat, et on peut donc prendre $J^0$ inclus dans $K$. Alors l'induite $\rho$ de $\lambda^0$ de $J^0$ à $K$ est une représentation lisse irréductible de $K$ : en effet, dans les constructions de *loc.cit.*, l'entrelacement de $\lambda^0$ dans $G$ est réduit à $J$, donc l'entrelacement de $\lambda^0$ dans $K$ est $J \cap K = J^0$, ce qui entraîne l'irréductibilité de $\rho$. Il s'ensuit que la représentation $\rho$ est un type pour $s$ au sens de la définition A.1.4.1 et qu'elle intervient avec multiplicité 1 dans chaque élément de $s$.
Dans la suite, nous prouvons qu'il existe une unique représentation typique pour $s$, à isomorphisme près. D'après la remarque A.1.4.2, nous pouvons nous limiter au cas où $s$ est formée de représentations minimales, au sens où l'on ne peut abaisser l'exposant de leur conducteur par torsion par un quasicaractère de $F^\times$. Dans ces cas, nous décrivons ci-dessous la construction de la paire $(J, \lambda)$.

A.3.2. Considérons d'abord le cas où $s$ est la composante d'une représentation lisse irréductible supercuspidale $\pi$ de niveau 0 ; elle est formée de représentations minimales d'exposant 2. Le groupe $J = F^\times K$ agit sur le sous-espace de l'espace de $\pi$ formé des vecteurs fixes par $K(1)$ par une représentation lisse irréductible $\lambda$, et $\pi$ est l'induite compacte de $\lambda$. On a $J^0 = K$, et $\rho = \lambda^0$ provient par inflation d'une représentation irréductible cuspidale du groupe fini $K/K(1) \simeq \mathrm{GL}_2(k_F)$. D'après le théorème A.2.4.1 le complément de $\rho$ dans $\pi'|_K$ pour $\pi' \in s$ est la somme directe des $u_N(\varepsilon_0)$ pour $N \geq 2$, où $\varepsilon_0$ est la restriction à $U_F$ du quasicaractère central de $\pi$ : on voit donc que $\rho$ est la seule représentation typique pour $s$, à isomorphisme près.
Les représentations lisses irréductibles supercuspidales minimales de $G$ qui ne sont pas de niveau 0 sont d'exposant supérieur à 3. Il va falloir en rappeler la construction précise.

A.3.3. Dans un premier temps, nous donnons la construction de toutes les représentations lisses irréductibles supercuspidales minimales $\pi$ de $G$ dont l'exposant est pair et supérieur à 4. Pour cela, on choisit une extension quadratique non ramifiée $E$ de $F$, un plongement de $E$ dans $M_2(F)$ tel que l'image de $U_E = \mathfrak{O}_E^\times$ soit contenue dans $K$, un élément $b \in E^\times$ de la forme $\varpi_F^{-n} u$ où $n$ est un entier strictement positif et $u$ un élément de $U_E$ dont la classe dans le corps résiduel $k_E$ engendre l'extension $k_E/k_F$, et enfin un quasicaractère $\theta$ de $E^\times$ tel que $\theta(1+x) = \psi \circ tr_{E/F}(bx)$ pour $x \in \mathfrak{p}_E^{\frac{n+1}{2}}$ (où $\mathfrak{p}_E$ est l'idéal maximal de $\mathfrak{O}_E$).

A.3.4. Si $n$ est impair, on pose $H = J = E^\times K(\frac{n+1}{2})$ et on définit un quasicaractère $\lambda$ de $H = J$ par les formules :

$$\begin{array}{rcll} \lambda(y) & = & \theta(y) & \text{pour} \quad y \in E^\times \\ \lambda(1+x) & = & \psi \circ tr(bx) & \text{pour} \quad 1+x \in K(\frac{n+1}{2}). \end{array}$$

Alors l'induite compacte $\pi = c - \mathrm{Ind}_J^G(\lambda)$ est une représentation lisse irréductible supercuspidale minimale de $G$ d'exposant $2(n+1)$. Par le §A.3.1, la représentation $\rho = \mathrm{Ind}_{J\cap K}^K(\lambda|_{J\cap K})$ de $K$ est irréductible, intervient avec multiplicité 1 dans tous les éléments de la composante de $\pi$ et est un type pour cette composante. Toutes les représentations lisses irréductibles supercuspidales minimales de $G$ d'exposant multiple de 4 sont obtenues par la construction précédente.

A.3.5. Si $n$ est pair, on pose $H = E^\times K(\frac{n}{2}+1)$, $J = E^\times K(\frac{n}{2})$ et $J^1 = U_E^1 K(\frac{n}{2})$ où $U_E^1 = 1 + \mathfrak{p}_E \subset U_E$. On a $H \subset J$ et $J^1 \subset J$. On définit un quasicaractère $\eta$ de $H$ par les formules :

$$\begin{array}{rcll} \eta(y) & = & \theta(y) & \text{pour} \quad y \in E^\times \\ \eta(1+x) & = & \psi \circ tr(bx) & \text{pour} \quad 1+x \in K(\frac{n}{2}+1). \end{array}$$

L'induite de $H$ à $J$ se décompose en représentations irréductibles dont la restriction à $J^1$ est l'unique classe de représentations irréductibles de $J^1$ dont la restriction à $H \cap J^1$ contienne $\eta|_{H\cap J^1}$. Ces composants irréductibles apparaissent tous avec la même multiplicité sauf l'un d'entre eux, que l'on note $\lambda$. Dans ce cas encore l'induite compacte $\pi = c - \mathrm{Ind}_J^G(\lambda)$ est une représentation lisse irréductible supercuspidale minimale de $G$ d'exposant $2n+2$, et par le §A.3.1 la représentation $\rho = \mathrm{Ind}_{J\cap K}^K(\lambda|_{J\cap K})$ de $K$ est irréductible, intervient avec multiplicité 1 dans tous les éléments de la composante de $\pi$, et est un type pour cette composante. Toutes les représentations lisses irréductibles supercuspidales minimales de $G$ d'exposant supérieur à 4 et congru à 2 modulo 4 sont obtenues par la construction précédente.

A.3.6. Dans la situation des deux paragraphes qui précèdent, il s'agit de voir que la représentation irréductible $\rho$ de $K$ est le seul constituant de $\pi|_K$ qui soit typique pour la composante $s$ de $\pi$. Autrement dit, il s'agit d'examiner $\pi|_K$ et de montrer que ses constituants autres que $\rho$ interviennent aussi pour d'autres composantes que celle de $\pi$. Pour étudier $\pi|_K$, on décompose $G$ en union disjointe de doubles classes $E^\times KgK$ avec $g \in \left\{\begin{pmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{N}\right\}$. Alors $\pi|_K = \oplus_g \mathrm{Ind}_{K\cap gKg^{-1}}^K(\rho^g)$ où $\rho^g(x) = \rho(g^{-1}xg)$ pour $x \in K \cap gKg^{-1}$. Soit $\mu$ un quasicaractère de $E^\times$ trivial sur $F^\times$ et d'exposant 1. Il en existe puisque $\frac{q^2-1}{q-1} = q+1 \geq 3$. On peut dans les constructions des paragraphes A.3.4 et A.3.5 remplacer $\theta$ par $\theta' = \theta\mu$, ce qui donne une représentation irréductible $\lambda'$ de $J$, puis, par induction de $J$ à $G$, $\pi'$ et, par induction de $J \cap K$ à $K$, un type $\rho'$ pour $\pi'$. Comme $\mu$ est (modérément) ramifié, $\pi'$ n'est pas tordue de $\pi$ par un caractère non ramifié, et appartient donc à une composante autre que celle de $\pi$. Nous allons montrer que pour $g = \begin{pmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \geq 1$, les représentations $\rho^g$ et $\rho'^g$ sont équivalentes. Cela prouvera bien que $\rho$ est la seule représentation typique pour la composante de $\pi$.

A.3.7. Prenons donc $g = \begin{pmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \geq 1$. Il s'agit d'identifier :

$$\rho^g = \mathrm{Res}^{gKg^{-1}}_{K\cap gKg^{-1}}\Big(\mathrm{Ind}^{gKg^{-1}}_{g(J\cap K)g^{-1}}(\lambda^g)\Big) \text{ et } \rho'^g = \mathrm{Res}^{gKg^{-1}}_{K\cap gKg^{-1}}\Big(\mathrm{Ind}^{gKg^{-1}}_{g(J\cap K)g^{-1}}(\lambda'^g)\Big)$$

ou, ce qui revient au même, $\mathrm{Res}^K_{g^{-1}Kg\cap K}\big(\mathrm{Ind}^K_{J\cap K}(\lambda)\big)$ et $\mathrm{Res}^K_{g^{-1}Kg\cap K}\big(\mathrm{Ind}^K_{J\cap K}(\lambda')\big)$. On écrit $K$ comme union disjointe de doubles classes $(g^{-1}Kg\cap K)h(J\cap K)$ et on désire identifier, à $h$ fixé, les représentations $\lambda^h$ et $\lambda'^h$ de $g^{-1}Kg\cap K\cap h(J\cap K)h^{-1}$. Mais pour $a \geq 1$, $g^{-1}Kg\cap K$ est formé de matrices triangulaires modulo $\mathfrak{p}_F$ et ne peut contenir une matrice dont la réduction modulo $\mathfrak{p}_F$ ait un polynôme caractéristique irréductible sur $k_F$. Il s'ensuit que $g^{-1}Kg\cap K\cap h(J\cap K)h^{-1}$ est inclus dans $hU_FJ^1h^{-1}$. Mais, par choix de $\mu$, $\lambda^h$ et $\lambda'^h$ ont même restriction à ce groupe, d'où le résultat. Notons que tout cela est valable pour toute valeur de $q$.

A.3.8. Il faut passer à l'étude des représentations lisses irréductibles supercuspidales de $G$ dont l'exposant est impair. Elles sont automatiquement minimales.
Notons $I$ le groupe d'Iwahori $K_0(1)$ et $K'$ son normalisateur dans $G$. Le groupe $I$ possède une filtration naturelle par les sous-groupes $I(j) = 1 + P_I^j$ pour $j$ entier $\geq 1$ où $P_I$ est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathfrak{O}_F)$ avec $a, c, d$ dans $\mathfrak{p}_F$. Les sous-groupes $I(j)$ sont distingués dans $K'$. On choisit une extension quadratique ramifiée $E$ de $F$ (si $q$ est impair, il n'y en a que deux à isomorphisme près) et un plongement de $E$ dans $M_2(F)$ tel que $E^\times \subset K'$ ; on a alors $K' = E^\times I$. On choisit un élément $b \in E^\times$ de valuation dans $E$ impaire et négative $-n$ et on forme le groupe $J = E^\times I(\frac{n+1}{2})$. On fixe un quasicaractère $\theta$ de $E^\times$ tel que $\theta(1+x) = \psi\circ tr_{E/F}(bx)$ pour $x \in \mathfrak{p}_E^{\frac{n+1}{2}}$ et on définit un quasicaractère $\lambda$ de $J$ par les formules :

$$\begin{array}{rclll} \lambda(y) & = & \theta(y) & \text{pour} & y \in E^\times \\ \lambda(1+x) & = & \psi\circ tr(bx) & \text{pour} & 1+x \in I(\frac{n+1}{2}). \end{array}$$

Alors l'induite compacte $\pi = c - \mathrm{Ind}_J^G(\lambda)$ est une représentation lisse irréductible supercuspidale minimale de $G$ d'exposant $n+2$ et, comme expliqué au §A.3.1, la représentation $\rho = \mathrm{Ind}^K_{J\cap K}(\lambda|_{J\cap K})$ est irréductible, intervient avec multiplicité 1 dans tous les éléments de la composante de $\pi$ et est un type pour cette composante.
De même qu'aux §A.3.6 et §A.3.7, il reste à voir que les constituants de $\pi|_K$ autres que $\rho$ ne sont pas typiques. Nous allons distinguer suivant les valeurs de $\frac{n+1}{2}$.

A.3.9. Supposons d'abord $\frac{n+1}{2} \geq 2$, i.e. $n \geq 3$, et soit $\mu$ un quasicaractère de $E^\times$ trivial sur $\mathfrak{O}_F^\times$ et d'exposant 2. On peut remplacer dans le paragraphe précédent $\theta$ par $\theta' = \theta\mu$, d'où une construction de $\lambda'$, $\sigma'$, $\pi'$ et $\rho'$ analogue à la précédente. Alors $\lambda$ et $\lambda'$ ont même restriction à $I(\frac{n+1}{2})$ et l'entrelacement dans $G$ de cette restriction est égal à $J$. Si $\pi$ et $\pi'$ étaient équivalentes, alors $\lambda$ et $\lambda'$ seraient conjuguées dans $G$ (c'est le résultat principal du chapitre 8 de [BK1], bien que pour $\mathrm{GL}_2$ cela se démontre plus simplement). Un élément de $G$ conjuguant $\lambda$ et $\lambda'$ doit entrelacer leur restriction à $I(\frac{n+1}{2})$ et donc appartenir à $J$, ce qui est impossible puisque $\mu$ n'est pas trivial. Il s'ensuit par le même raisonnement que $\pi$ et $\pi'$ n'appartiennent pas à la même composante. Nous allons montrer que tout constituant de $\pi|_K$ autre que $\rho$ intervient aussi dans $\pi'|_K$.

A.3.10. Ecrivons $G$ comme union disjointe de doubles classes $KgK'$ où $g = \begin{pmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \geq 1$, le cas $a = 1$ correspondant à la classe $KK'$. Posant $\tau = \mathrm{Ind}_J^{K'}(\lambda)$, on a $\pi = \mathrm{Ind}_{K'}^G(\tau)$ et $\pi|_K$ est somme directe des représentations $\mathrm{Ind}_{K\cap gK'g^{-1}}^K(\tau^g)$. Pour $g = \begin{pmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \geq 2$, on veut donc identifier $\mathrm{Ind}_{K\cap gK'g^{-1}}^K(\tau^g)$ et $\mathrm{Ind}_{K\cap gK'g^{-1}}^K(\tau'^g)$, et pour cela, il suffit d'identifier $\mathrm{Res}_{K\cap gK'g^{-1}}^{gK'g^{-1}}\tau^g$ et $\mathrm{Res}_{K\cap gK'g^{-1}}^{gK'g^{-1}}\tau'^g$. Comme au §A.3.7, il revient au même d'identifier $\mathrm{Res}_{g^{-1}Kg\cap K'}^{K'}\big(\mathrm{Ind}_J^{K'}(\lambda)\big)$ et $\mathrm{Res}_{g^{-1}Kg\cap K'}^{K'}\big(\mathrm{Ind}_J^{K'}(\lambda')\big)$. Ecrivons maintenant $K'$ comme union disjointe de doubles classes $(g^{-1}Kg \cap K')hJ$. On désire identifier, à $h$ fixé, les représentations $\lambda^h$ et $\lambda'^h$ de $g^{-1}Kg \cap K' \cap hJh^{-1}$. On a $g^{-1}Kg \cap K' = K_0(a)$. Soit $\varpi$ une uniformisante de $hE^\times h^{-1}$ et soit $j = 1 + x \in I(\frac{n+1}{2})$ ; si $(1+\varpi)j = y$ appartient à $g^{-1}Kg \cap K'$, c'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varpi_F^a\gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \delta \in U_F$, $\beta, \gamma \in \mathfrak{O}_F$ et $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ modulo $\mathfrak{p}_F$ puisque $y - 1$ est topologiquement nilpotent. Mais alors $\det(y-1) = (\alpha-1)(\delta-1) - \varpi_F^a\beta\gamma$ a une valuation dans $F$ au moins égale à 2, ce qui est impossible. On en déduit $g^{-1}Kg \cap K' \cap hJh^{-1} \subset h(1+\mathfrak{p}_E^2)h^{-1}I(\frac{n+1}{2})\mathfrak{O}_F^\times$ et, sur ce groupe, $\lambda^h$ et $\lambda'^h$ coïncident, d'où le résultat voulu.

A.3.11. Il reste à traiter le cas $n = 1$, où $\pi$ est de conducteur $\mathfrak{p}_F^3$ i.e. $c(\pi) - 1 = 2$. D'après la preuve du théorème 3 de [Ca], les vecteurs de $\pi$ fixés par $K(2)$ forment une représentation irréductible de $K$. Comme $J \cap K$ contient $K(2)$, cette représentation n'est autre que $\rho$. Par le théorème A.2.4.1, le complément de $\rho$ dans $\pi|_K$ est la somme directe des $u_N(\varepsilon_0)$ pour $N \geq 3$, où $\varepsilon_0$ est la restriction à $U_F$ du quasicaractère central de $\pi$. Aucun de ces constituants ne peut être typique pour la composante de $\pi$.
Notons encore que les résultats des deux derniers paragraphes sont valables pour toute valeur de $q$.

## Références


[BK1] Bushnell C., Kutzko P., *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via open compact subgroups*, Annals of Math. Studies 129, Princeton University Press, 1993.

[BK2] Bushnell C., Kutzko P., *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types*, Proc. London Math. Soc. 77, 1978, 582-634.

[BK3] Bushnell C., Kutzko P., *Semi-simple types in* $\mathrm{GL}_n$, Comp. Math. 119, 1999, 53-97.

[Ca] Casselman W., *The restriction of a representation of* $\mathrm{GL}_2(k)$ *to* $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O})$, Math. Annalen 206, 1973, 311-318.

[De] Deligne P., *Le centre de Bernstein*, Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Travaux en Cours 8, Hermann, Paris, 1984.

[GK] Gérardin P., Kutzko P., *Facteurs locaux pour* $\mathrm{GL}(2)$, Ann. Scient. E.N.S. 13, 1980, 349-384.

[HT] Harris M., Taylor R., *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, prépublication Institut de Mathématiques de Jussieu, 2000.

[He] Henniart G., *Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour* $\mathrm{GL}_n$ *sur un corps p-adique*, Inv. Math. 139, 2000, 439-455.

[JL] Jacquet H., Langlands R., *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$, Lecture Notes in Math. 114, Springer Verlag, 1971.

[Ku1] Kutzko P., *On the supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}_2$, Amer. J. Math. 100, 1978, 43-60.

[Ku2] Kutzko P., *The Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(2)$ *of a local field*, Ann. of Math. 112, 1980, 381-412.

[Ta] Tate J., *Number theoretic background*, Automorphic forms, representations and $L$-functions, Proc. Symposia in Pure Math. 33, 1979, 3-26.

Adresse : Guy Henniart, Département de Mathématiques et UMR 8628 du CNRS, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, FRANCE.
Courriel : Guy.Henniart@math.u-psud.fr