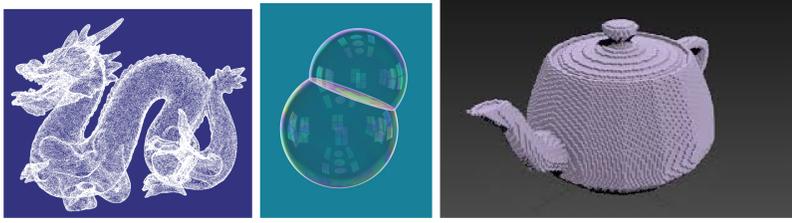


## Motivations



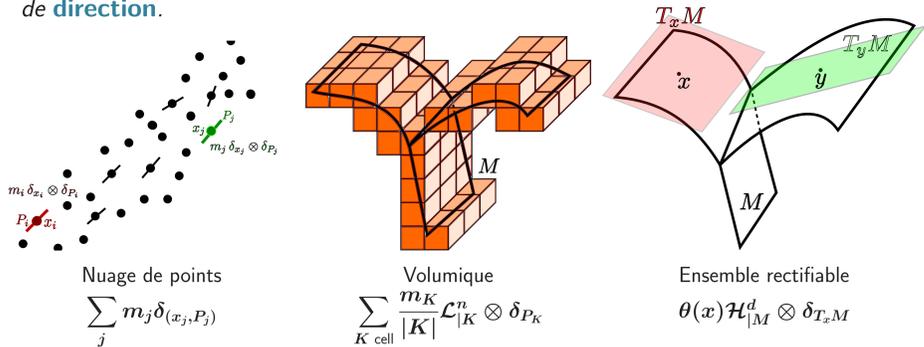
(a) Nuage de points (b) Rectifiable (c) Approx. volumique

→ On cherche un **cadre commun** pour étudier et **comparer** :

- ▶ une **surface régulière**,
  - ▶ une surface présentant des **singularités** (*bulles de savon, arêtes vives*),
  - ▶ leurs **différentes discrétisations** (*acquisition des données, application envisagée*),
- les **varifolds**

## Qu'est-ce qu'un varifold ?

**Surface généralisée** : encoder une information **spatiale pondérée** et une information de **direction**.



Nuage de points

$$\sum_j m_j \delta_{(x_j, P_j)}$$

Volumique

$$\sum_{K \text{ cell}} \frac{m_K}{|K|} \mathcal{L}^n \otimes \delta_{P_K}$$

Ensemble rectifiable

$$\theta(x) \mathcal{H}^d \llcorner M \otimes \delta_{T_x M}$$

Un **d-varifold** sur  $\mathbb{R}^n$  est une **mesure de Radon**  $V$  sur  $\mathbb{R}^n \times G_{d,n}$  avec  $G_{d,n} = \{d\text{-sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^n\}$

La **masse**  $\|V\|$  de  $V$  est la **mesure** sur  $\Omega$  :  $\|V\|(A) = V(A \times G_{d,n})$  (ex. aire)

## Question 1 : Approximation

- ▶ **varifolds continus** : courbes, surfaces, ensembles rectifiables,
- ▶ **varifolds discrets** : nuages de points, approximations volumiques.

**Peut-on approcher tout varifold continu  $V$  par une suite de varifolds discrets ?**

**Approximation** des varifolds rectifiables par des varifolds de type discret,

- au sens de la **convergence faible**\*,
- et au sens de la **flat distance**  $\Delta^{1,1}$ .

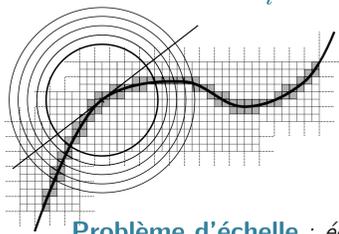
$$\Delta^{1,1}(V, W) = \sup \left\{ \left| \int \phi dV - \int \phi dW \right| : \phi \in \text{Lip}_1, \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

## Question 2 : Conditions de rectifiabilité

$V = \lim V_i$  : limite faible\* de varifolds discrets  $V_i$ .

**Conditions sur  $(V_i)$  assurant que  $V$  est rectifiable ?**

→ On cherche  $\mathcal{E}_i$  t.q.  $\sup_i \mathcal{E}_i(V_i) < +\infty \Rightarrow V$  rectifiable.



On adapte les **nombre de Jones** aux varifolds  
 écart de la surface au meilleur plan de régression

$$\beta_2(x, r, E) = \inf_{P \text{ d-plan affine}} \left( \frac{1}{r^d} \int_{E \cap B_r(x)} \left( \frac{d(y, P)}{r} \right)^2 d\mathcal{H}^d(y) \right)^{1/2}$$

**Problème d'échelle** : échelle de discrétisation / échelle de  $\mathcal{E}_i$

Soit  $(\alpha_i)_i \downarrow 0$  et  $(\beta_i)_i \downarrow 0$ , on suppose :

- (i) il existe  $0 < C_1 < C_2$  tels que pour  $\|V_i\|$ -presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $\beta_i < r < d(x, \Omega^c)$ ,

$$C_1 r^d \leq \|V_i\|(B_r(x)) \leq C_2 r^d,$$

- (ii)  $\sup_i \int_{\Omega \times G_{d,n}} E_{\alpha_i}(x, P, V_i) dV_i(x, P) < +\infty$ , avec

$$E_{\alpha_i}(x, P, W) = \int_{r=\alpha_i}^1 \frac{1}{r^d} \int_{y \in B_r(x) \cap \Omega} \left( \frac{d(y-x, P)}{r} \right)^2 d\|W\|(y) \frac{dr}{r}$$

Alors  $V$  est un **d-varifold rectifiable**.

## Courbure généralisée au sens des varifolds

**Théorème de la divergence** → définition **faible** de la courbure moyenne :

$$M \subset \mathbb{R}^n \text{ d-sous-variété } C^2, X \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \int_{M \cap \Omega} \text{div}_M X = - \int_{M \cap \Omega} \langle X, H \rangle$$

**Variation première de  $V$  (Allard)**

$$\delta V : X \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n \times G_{d,n}} \text{div}_S X(x) dV(x, S).$$

- ▶  $V = V(\text{surface } M) \Rightarrow \delta V = -H \mathcal{H}^d \llcorner M$ ,
- ▶  $V = V(\text{Nuage de points}) \Rightarrow \delta V$  **distribution d'ordre 1** mais **pas une mesure de Radon**.
- ▶  $\delta V$  mesure de Radon  $\Leftrightarrow V$  à **variation première bornée** :  $\delta V = -H \|V\| + \delta V_s$ .

## Question 3 : Conditions de contrôle de la courbure

$V = \lim V_i$  : limite faible\* de varifolds discrets  $V_i$ .

**Conditions sur  $(V_i)$  assurant que  $V$  est à variation première bornée ?**

$\rho \in W^{1,\infty}$  symétrique  $\geq 0$ ,

$$\int \rho = 1, \text{ supp } \rho \subset B_1(0), \rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

$$\delta V * \rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{B_\epsilon(x) \times G_{d,n}} \nabla^S \rho\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) dV(y, S).$$

- bien défini pour un varifold **quelconque**,
  - expression **explicite** → utilisable **numériquement**,
  - si  $V_i$  converge faiblement\* vers  $V$ ,
- $$\sup_i \|\delta V_i * \rho_{\epsilon_i}\|_{L^1} < +\infty \Rightarrow V \text{ à variation première bornée.}$$

## Application au calcul de la courbure discrète

$V_i$  converge faiblement\* vers  $V$ .

$$H_{\epsilon_i}^{V_i}(x) = - \frac{\delta V_i * \rho_{\epsilon_i}(x)}{\|V_i\| * \rho_{\epsilon_i}(x)} \text{ converge } \|V\| \text{-p. p. vers } H(x),$$

pour  $\epsilon_i \downarrow 0$  assez grand devant **l'échelle de la discrétisation** mesurée par une distance de type  $\Delta^{1,1}(V, V_i)$  localisée

+ **vitesse de convergence** dépendant de  $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_i, \\ \text{l'échelle de discrétisation,} \\ \text{la régularité de } \rho. \end{array} \right.$

→ Pour un **d-varifold**  $V_N$  associé à un nuage de points et  $\rho$  radial  $\rho(y) = \zeta(|y|)$ ,

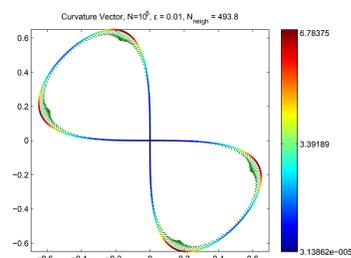
$$V_N = \sum_{j=1}^N m_j \delta_{x_j} \otimes \delta_{P_j}, \quad \|V_N\| = \sum_{j=1}^N m_j \delta_{x_j}$$

$$H_\epsilon^N(x) = - \frac{\sum_{j=1}^N m_j \zeta'\left(\frac{|x_j - x|}{\epsilon}\right) \frac{\Pi_{P_j}(x_j - x)}{|x_j - x|}}{\sum_{j=1}^N m_j \zeta\left(\frac{|x_j - x|}{\epsilon}\right)}.$$

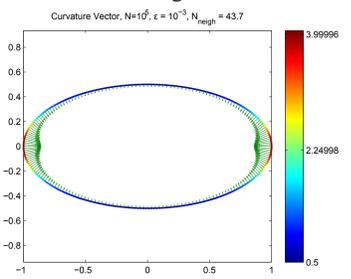
Projection sur la normale en  $x$  possible.

- ▶ Simple, **PAS besoin d'orienter** le nuage de points;
- ▶ **Préserve la courbure singulière nulle**.

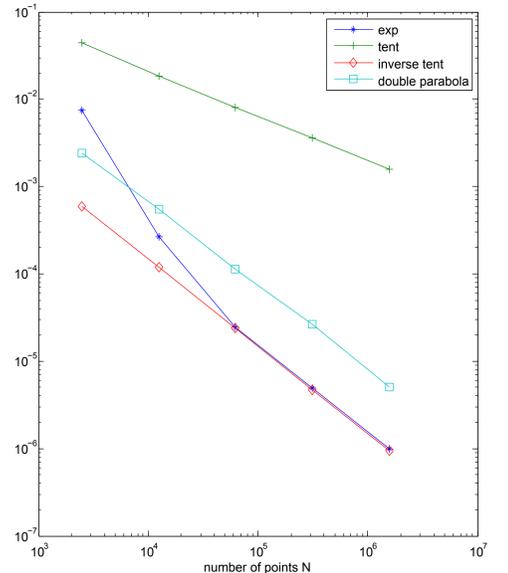
## Calculs de courbures de nuages de points 2D



### Courbure singulière nulle



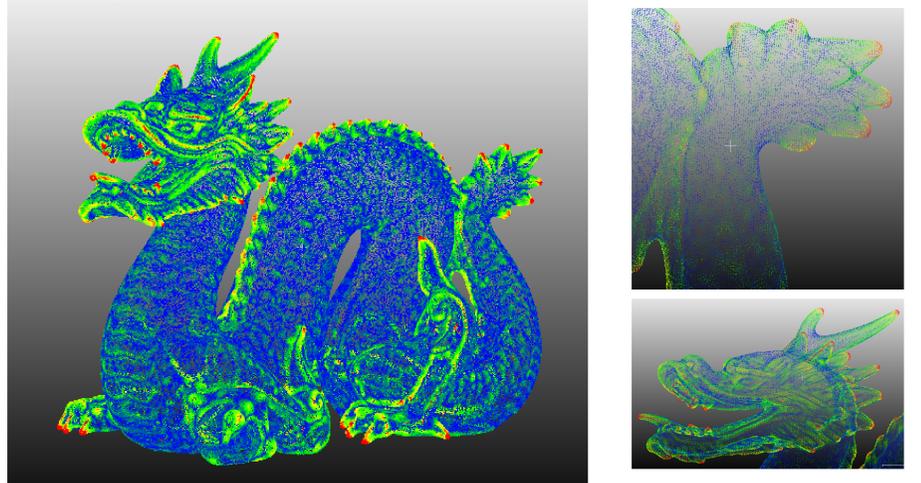
Courbure d'une ellipse discrète



Ellipse discrète : erreur moyenne sur la courbure pour différents profils de noyau

## Intensité de la courbure moyenne d'un nuage de points 3D

435 000 points. Code C++ utilisant la librairie nanoflann.



calculs avec  $\epsilon = 0.007$  pour un dragon de diamètre 1.