Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2018–2019
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 3
Développement dyadique, suite logistique et chaos

On va étudier le "système dynamique" associé à

$$\begin{array}{cccc} g & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & 4x(1-x) \end{array}$$

On va montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ est dense dans $[0,1]$. On dit alors que le système dynamique associé à g est *chaotique*. Afin de prouver ce résultat, on va s'intéresser au nombre de Champernowne (une variante de ce nombre) $m \in]0,1[$ qui est défini via son développement en base 2 de la façon suivante: m est obtenu en concaténant, après la virgule, toutes les suites possibles formées d'un chiffre ($\in \{0,1\}$), puis de 2 chiffres, puis de 3 chiffres etc. de sorte que le début du développement dyadique (en base 2) de m est

$$m = 0,\underbrace{0\,1}_{1}\,\underbrace{00\;01\;10\;11}_{2}\,\underbrace{000\;001\;010\;011\;100\;101\;110\;111}_{3}\ldots\;.$$

Exercice 1.— *Développement dyadique (en base 2) d'un entier*
Le but de l'exercice est de démontrer de résultat suivant: pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_N) \in \{0,1\}^{N+1}$ tels que

$$a = a_N 2^N + a_{N-1}2^{N-1} + \ldots + a_1 2 + a_0\;.$$

Cette décomposition est unique si on suppose de plus $a_N \neq 0$ (i.e. $a_N = 1$).

1. On va montrer l'existence d'une telle décomposition par divisions euclidiennes successives. Soit $a \in \mathbb{N}^*$, on définit deux suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $b_0 = a$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: on effectue la division euclidienne de b_k par 2, il existe donc $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1\}$ tels que

$$b_k = 2q + r\;.$$

On définit alors $b_{k+1} = q$ et $a_k = r$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k \leq \dfrac{a}{2^k}$.

(b) Soit $X = \{k \in \mathbb{N} \,:\, 2^{k+1} > a\}$. Montrer que X admet un minimum que l'on notera $N = \min X$ par la suite.

(c) Montrer que $b_{N+1} = 0$ puis par récurrence que pour tout $k \geq N+1$, $b_k = 0$. En déduire que pour tout $k \geq N+1$, $a_k = 0$.

(d) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$,

$$b_{N-k} = a_N 2^k + a_{N-1}2^{k-1} + \ldots + a_{N-k+1}2 + a_{N-k}\;.$$

(e) Conclure.

2. On va à présent montrer l'unicité d'une telle décomposition. On suppose qu'il existe $N, P \in \mathbb{N}$, $N \leq P$, et $(a_0, a_1, \ldots, a_N) \in \{0,1\}^{N+1}$, $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_P) \in \{0,1\}^{P+1}$ tels que
$$a = a_N 2^N + a_{N-1} 2^{N-1} + \ldots + a_0 = \tilde{a}_P 2^P + \tilde{a}_{P-1} 2^{P-1} + \ldots + \tilde{a}_0 \,.$$
   (a) On suppose par l'absurde que $N < P$. Montrer que
   $$\left|(\tilde{a}_N - a_N)\, 2^N + (\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1})\, 2^{N-1} + \ldots + (\tilde{a}_1 - a_1)\, 2 + (\tilde{a}_0 - a_0)\right| < 2^{N+1}$$
   et aboutir à une contradiction.

   (b) On a donc $P = N$. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $\tilde{a}_k = a_k$. *On pourra procéder par l'absurde et considérer* $k_0 = \min\{k \in \{0, 1, \ldots, N\} \mid \tilde{a}_k \neq a_k\}$.

3. Écrire 175 en base 2.

Exercice 2.— *Développement dyadique d'un réel*

Définition. *Un* nombre dyadique *est un nombre rationnel de la forme* $d = \dfrac{a}{2^n}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 1. *Soit* $x \in [0,1[$. *Il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \{0,1\}$ *et*
$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}\right) . \end{aligned}$$
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est appelée* développement dyadique *de* x *et on note alors (en base 2)* $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$.

Le but de l'exercice est de montrer le théorème.

1. Montrer qu'un nombre dyadique $d \geq 0$ peut s'écrire sous la forme
$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a_k 2^k \quad \text{avec} \quad N_1, N_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \forall k,\ a_k \in \{0,1\} \,.$$
On note alors si $N_2 \geq 0 > N_1$,
$$d = a_{N_2} a_{N_2-1} \ldots a_1 a_0 \,,\ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{N_1} \,.$$
Décaler la virgule d'un cran à droite (resp. à gauche) correspond alors à multiplier d *par* 2 *(resp. par* 2^{-1}*).*

2. Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $a_k = E(2^k x) - 2E(2^{k-1} x)$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} = \frac{E(2^n x)}{2^n} \,.$$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(2^n x)}{2^n} = x$ et conclure.

4. Soit $x \in [0,1[$ dont un développement dyadique est $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\gamma \in [0, 2^{-p}]$ tel que
$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_p + \gamma = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^k} + \gamma \,.$$

5. Écrire $\dfrac{1}{2}$ en base 2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$. En déduire que $\dfrac{1}{2}$ admet deux développements dyadiques différents.

   Afin de récupérer l'unicité du développement dyadique, on doit exclure les développements de la forme $0, a_1 \ldots a_p 11111111111 \ldots$ *se terminant par une infinité de* 1. *Un développement qui n'est pas de cette forme est dit propre et tout* $x \in [0,1[$ *admet un unique développement dyadique propre. Les réels qui admettent deux développements dyadiques sont les nombres dyadiques.*

Exercice 3.—
Soit m le nombre de Champernowne défini au début de la feuille et $\alpha = \sin^2(m\pi)$. On va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$ est dense dans $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$ et $\epsilon > 0$.

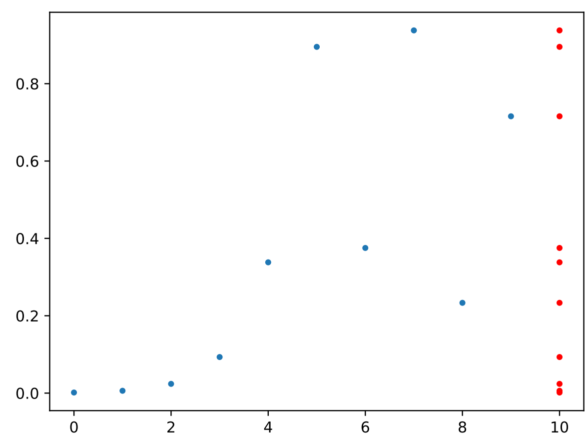
1. Soit $h : \mathbb{R} \to [0,1]$, $t \mapsto \sin^2(t)$. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $|h(u) - h(v)| \leq |u - v|$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer que $g(h(t)) = h(2t)$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(h(t)) = h(2^n t)$ où $g^n = \underbrace{g \circ \ldots \circ g}_{n \text{ fois}}$.
3. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \sin^2\theta$ et qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(x) = \sin^2(2^n\theta)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \{0,1\}$ les p premiers termes d'un développement dyadique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\dfrac{\theta}{\pi}$:
$$\frac{\theta}{\pi} = 0, a_1 a_2 \ldots a_p \ldots .$$
Montrer qu'il existe $N, q \in \mathbb{N}$ et $\beta \in [0, 2^{-p}]$ tels que $2^N m = q + 0, a_1 a_2 \ldots a_p + \beta$
5. En déduire que $\left|2^N m\pi - (q\pi + \theta)\right| \leq \pi 2^{-p}$.
6. En déduire que $\left|g^N(\alpha) - x\right| = \left|\sin^2\left(2^N m\pi\right) - \sin^2(\theta)\right| \leq \pi 2^{-p}$.
7. Choisir p assez grand tel que $|g^N(\alpha) - x| < \epsilon$ et conclure.

Rappel.— *... ou exercice ...*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit D un ensemble dense dans $[a,b]$ et $d_1, \ldots, d_N \in D$ N éléments distincts de D, alors l'ensemble $D \setminus \{d_1, \ldots, d_N\}$ est encore dense dans $[a,b]$.

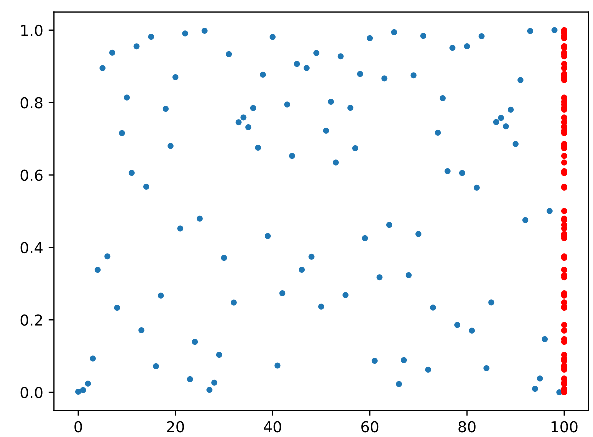
Exercice 4.— *Plus de densité ...*
Montrer que l'ensemble

$$\{\alpha \in [0,1] \mid \text{ la suite } (x_n)_n \text{ définie par } x_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n) \text{ est dense dans } [0,1]\}$$

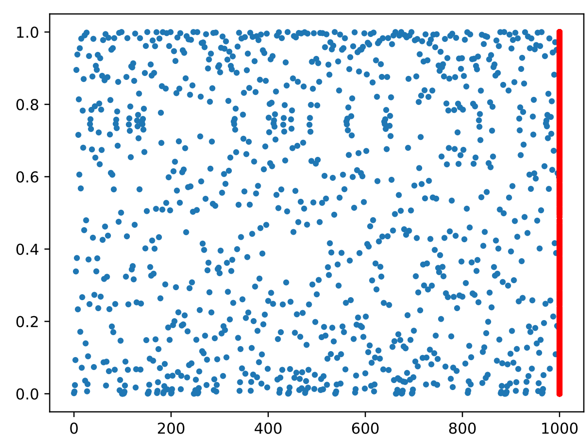
est lui-même dense dans $[0,1]$.



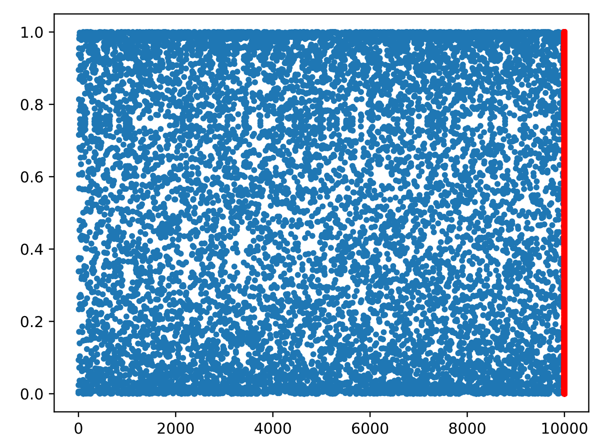
(a) $N = 10$



(b) $N = 100$



(c) $N = 1000$



(d) $N = 10000$

Figure 1: On représente en bleu les points (n, x_n) pour $n \in \{0, \ldots, N\}$, et en rouge les points (N, x_n) (projection de tous les points bleus sur la droite $x = N$.