Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2017–2018
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 1
Graphe et plus court chemin

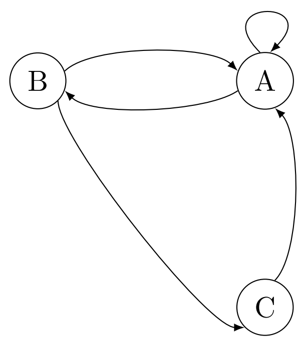
Exercice 1.— *Représentation des graphes finis orientés.*

(1) On se donne un ensemble de sommets $\mathcal{S} = \{A; B; C; D\}$ et un ensemble d'arcs

$$\mathcal{A} = \{(A, B); (B, A); (C, A); (B, C); (C, B); (D, B); (D, D)\}.$$

Représenter le graphe fini orienté $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$.

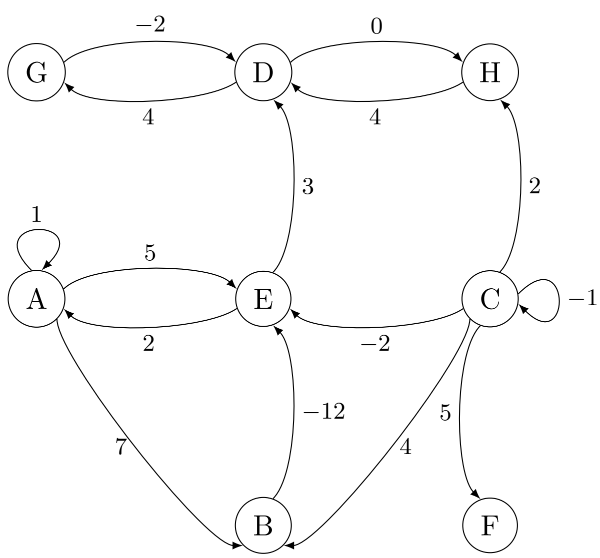
(2) Donner la représentation $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ du graphe suivant:



(3) Donner un chemin de A vers C constitué de 2 arcs, 3 arcs, n arcs pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(4) Y a-t-il plusieurs chemins de B vers C ?

Exercice 2.— *Chemins et circuits.* On considère le graphe orienté valué $\mathcal{G}_3 = (\mathcal{S}, \mathcal{A}, v)$ suivant



(1) Vérifier que les suites de sommets suivantes définissent bien des chemins dans le graphe $\mathcal{G}_3$ et donner leur valuation:
- $c_1 = (G, D, H)$,
- $c_2 = (G, D, G, D, H)$,
- $c_3 = (G, D, H, D, H)$.

(2) Lister l'ensemble des chemins **élémentaires** de
- G vers H,
- A vers D.

(3) Lister l'ensemble des circuits **élémentaires** de $\mathcal{G}$. Lesquels sont absorbants ?

(4) Existe-t-il un plus court chemin de
- A vers C ?
- A vers D ?
- C vers F ?
- G vers H ?

Exercice 3.— *Algorithme de Dijkstra.* Détailler les étapes de l'algorithme de Dijkstra permettant de trouver un plus court chemin de ... à ... .

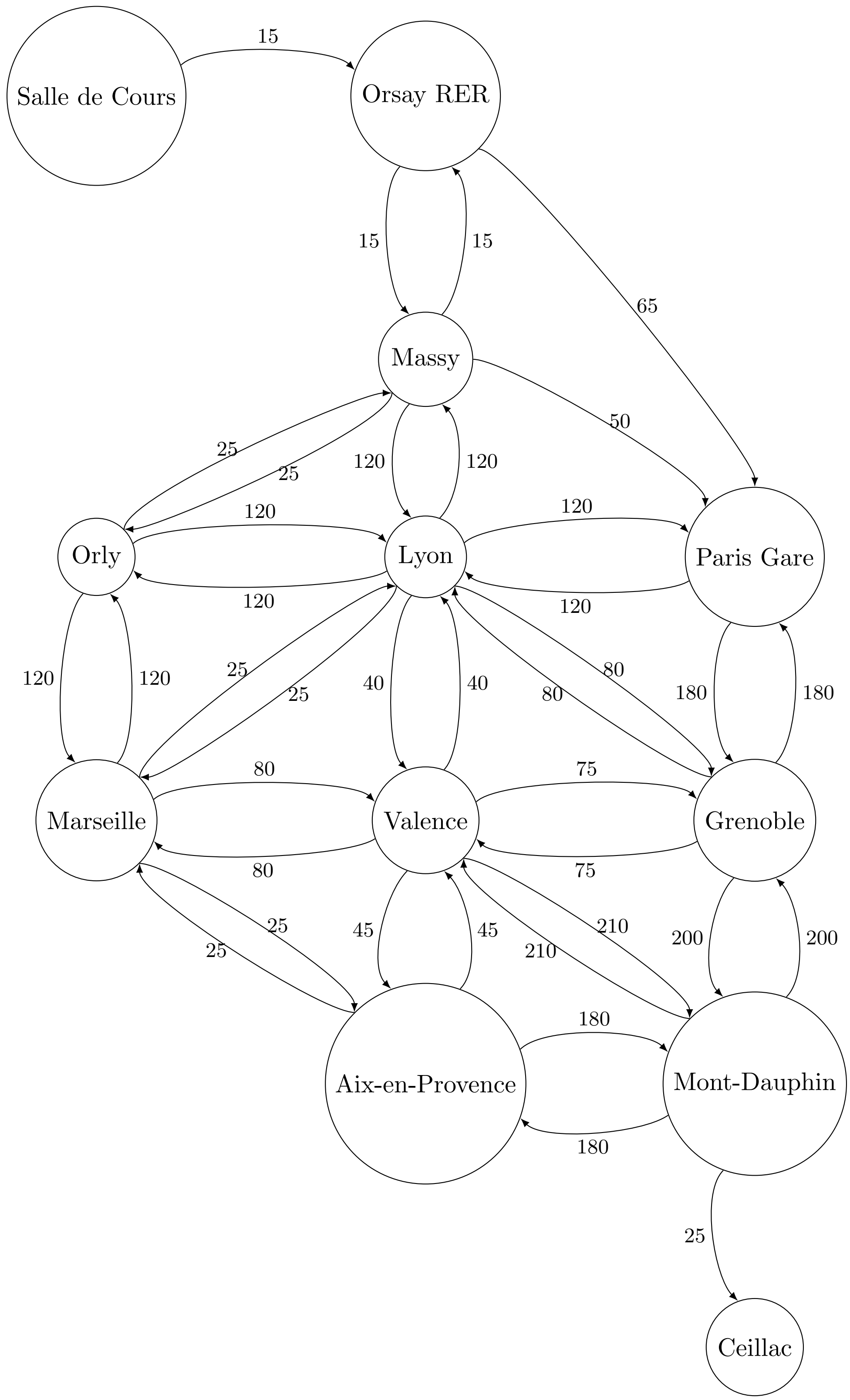


Tableau des marques

Étape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Salle de Cours														
Orsay RER														
Massy														
Orly														
Lyon														
Paris Gare														
Marseille														
Valence														
Grenoble														
Aix-en-Pce														
Mt-Dauphin														
Ceillac														

Tableau des poids

Étape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Salle de Cours														
Orsay RER														
Massy														
Orly														
Lyon														
Paris Gare														
Marseille														
Valence														
Grenoble														
Aix-en-Pce														
Mt-Dauphin														
Ceillac														

Tableau des antécédents

Étape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Salle de Cours														
Orsay RER														
Massy														
Orly														
Lyon														
Paris Gare														
Marseille														
Valence														
Grenoble														
Aix-en-Pce														
Mt-Dauphin														
Ceillac														

Exercice 4.— Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe fini orienté à valuation positive. Soit $x_0 \in S$ notre sommet origine. On considère l'ensemble des sommets $\mathcal{S}'$ atteignables depuis x_0.

(1) Justifier que pour $s \in \mathcal{S}'$, la distance de x_0 à s dans le graphe:

$$d_{x_0}(s) = \min\{v(c) : c \text{ chemin de } x_0 \text{ vers } s\}$$

est bien défini.

On renumerote les sommets de $\mathcal{S}'$ par ordre de distance à x_0, c'est-à-dire que $\mathcal{S}' = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et

$$x_0 = d_{x_0}(x_0) \leq d_{x_0}(x_1) \leq d_{x_0}(x_2) \leq \ldots \leq d_{x_0}(x_n) .$$

Afin de simplifier l'exercice, on suppose que les inégalités ci-avant sont toutes strictes. On va montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_k$:

Après k itérations de l'agorithme, chaque sommet marqué s vérifie $Poids(s) = d_{x_0}(s)$ et l'ensemble des sommets marqués est $M = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$.

(2) *Initialiser* la récurrence.

(3) *Hérédité*: on **fixe** $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n+1$, on suppose que $\mathcal{P}_i$ est vrai pour tout $i = 0 \ldots k$ et on montre qu'alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

(a) Soit $c = (x_0, \ldots, x_p, x_k)$ un plus court chemin de x_0 vers x_k. Montrer que

$$d_{x_0}(x_p) \leq d_{x_0}(x_k) \text{ et } p < k .$$

(b) En déduire (utiliser l'hypothèse de récurrence) que

$$Poids(x_p) = d_{x_0}(x_p), \text{ puis que } Poids(x_k) = d_{x_0}(x_k).$$

(c) Soit x_q un sommet non marqué à la $k+1$–ème itération, montrer que

$$Poids(x_k) \leq Poids(x_q) \text{ et } k < q$$

(d) En déduire que x_k est bien marqué à la $k+1$–ème itération et conclure l'hérédité.

(4) **Conclusion** de la récurrence:

(5) Que peut-on déduire concernant l'algorithme de Dijkstra ?