Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2019–2020

Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 2

Densité dans $\mathbb{R}$

Rationnels et irrationnels

Définition (Densité dans les réels)**.** Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que D est *dense* dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, il existe $d \in D$ tel que $a < d < b$.

Exercice 1.— *Une définition équivalente*
Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $d \in D \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[$.

Définition (Partie entière)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq x < m+1$. On notera $m = E(x)$ la *partie entière* de x.

Exercice 2.— *Les rationnels sont denses dans* $\mathbb{R}$*.*
On va (re ?)démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on cherche à intercaler un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ entre a et b : $a < q < b$.

(1) Soit $\alpha < \beta$ des réels. On suppose que l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ est de longueur $\beta - \alpha > 1$. Montrer que I contient un entier relatif.
(2) Trouver un entier strictement positif $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(b-a) > 1$.
(3) Conclure.

Exercice 3.— *Densité et ensembles finis*

(1) Soit X un ensemble fini non vide. Montrer que X ne peut pas être dense dans $\mathbb{R}$.
(2) Soit D un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ et $d_1, \ldots, d_N \in D$ N éléments distincts de D. Montrer que $D \setminus \{d_1, \ldots, d_N\}$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

Quelques rappels ...

Définition (Majorant et borne supérieure)**.** Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de X si pour tout $x \in X$, $x \leq M$. On dit de même que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de X si pour tout $x \in X$, $x \geq m$.
- On dit que x est le *plus grand élément* (resp. le plus petit élément) de X si x est un majorant (resp. minorant) de X et si $x \in X$.
- On dit que $\beta \in \mathbb{R}$ est la *borne supérieure* de X si β est le plus petit élément parmi tous les majorants de X. On la note $\beta = \sup X$.
  De même, on dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est la *borne inférieure* de X si α est le plus grand élément parmi tous les minorants de X. On la note $\alpha = \inf X$.

Attention, il n'existe pas toujours de plus grand ou plus petit élément à un ensemble, même s'il est borné, penser à $X =]0, 1[$ par exemple. En revanche, le théorème de la borne supérieure nous dit que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). On rappelle enfin une caractérisation bien utile de la borne supérieure/inférieure :

Proposition. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le réel β est la borne supérieure de X si et seulement si β est un majorant de X et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que*

$$\beta - \epsilon \leq x \leq \beta \, .$$

Exercice 4.— *Une dichotomie modifiée*

Soit $X \subset]0, +\infty[$ un ensemble contenant au moins deux éléments distincts. On suppose que X possède la propriété suivante de stabilité :

$$\forall a, \, b \in X \, , \quad \sqrt{ab} \in X \, .$$

(1) Pourquoi X admet-il une borne inférieure ?

On suppose de plus que X est majoré et on note $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$ et $I =]\alpha, \beta[$. Notre but est de montrer que X est dense dans I au sens où pour tout a, $b \in I$, $a < b$, il existe $x \in X$ tel que $a < x < b$.

(2) Pourquoi I n'est pas vide ?

Soit a, $b \in I$, $a < b$, on notera $c = \dfrac{a+b}{2}$.

(3) Montrer qu'il existe x_0, $y_0 \in X$ tels que $x_0 \leq a$ et $b \leq y_0$.

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le principe de dichotomie suivant, on commence avec x_0, $y_0 \in X$ tels que $x_0 \leq a$ et $b \leq y_0$ donnés par la question précédente et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- *si $x_n \leq c \leq \sqrt{x_n y_n}$ on définit $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$,*
- *si $\sqrt{x_n y_n} < c \leq y_n$, on définit $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ et $y_{n+1} = y_n$.*

(4) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

(5) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels qui converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que de plus $v < l < w$ alors $v < u_n < w$ à partir d'un certain rang.

(6) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Quelle est finalement cette limite ?

(7) Conclure que X est dense dans I.

Exercice 5.— *Rationnel ou irrationnel ?*

On rappelle que tout $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, se décompose de manière unique en facteurs premiers (distincts)

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \quad \text{avec} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall i = 1 \dots k, m_i \in \mathbb{N}^*$$

(1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

(2) Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p^{\frac{1}{n}}$ est irrationnel.

(3) Soit r un rationnel strictement positif et différent de 1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, le réel $r^{\frac{1}{n}}$ est irrationnel.

Exercice 6.— *Des irrationnels denses.*

On reprend l'ensemble X et les notations de l'exercice 4, montrer que $X \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans I.