Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2019–2020
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Séance 2

Densité dans $\mathbb{R}$

Rationnels et irrationnels

Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que D est *dense* dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, il existe $d \in D$ tel que $a < d < b$.

Exercice 1.— *Une définition équivalente*
Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $d \in D \cap]d-\epsilon, d+\epsilon[$.

Définition (Partie entière)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq x < m+1$. On notera $m = E(x)$ la *partie entière* de x.

Exercice 2.— *Les rationnels sont denses dans* $\mathbb{R}$.
On va (re ?)démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on cherche à intercaler un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ entre a et b : $a < r < b$.

(1) Soit $\alpha < \beta$ des réels. On suppose que l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ est de longueur $\beta - \alpha > 1$. On a alors $E(\alpha) + 1 \in \mathbb{Z}$ et
$$\alpha < E(\alpha) + 1 \quad \text{et} \quad E(\alpha) + 1 \leq \alpha + 1 < \beta$$
et c'est gagné.

(2) On cherche $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(b-a) > 1$, comme $b - a > 0$, c'est équivalent à $q > \dfrac{1}{b-a}$ et il suffit de prendre
$$q = E\left(\frac{1}{b-a}\right) + 1 \quad \text{on a bien} \quad q \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad q > \frac{1}{b-a}\,.$$

(3) On peut appliquer la première question avec $\alpha = qa < \beta = qb$. L'intervalle $]qa, qb[$ est de longueur $qb - qa = q(b-a) > 1$ grâce au choix de q. On peut alors prendre
$$p = E(qa) + 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{q} = \frac{E(qa)+1}{q}\,.$$

Exercice 3.— *Densité et ensembles finis*

(1) On note N le nombre d'éléments (le *cardinal*) de X. Si $N \geq 2$, on peut numéroter les éléments de X par ordre croissant :
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \quad \text{avec} \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_N\,.$$
Si X était dense dans $\mathbb{R}$, on pourrait alors appliquer la définition avec $a = x_1$ et $b = x_2$: il existe $x \in X$ tel que $x_1 < x < x_2$ ce qui est impossible.

Si maintenant $N = 1$, $X = \{x_1\}$ contient un unique élément et on peut effectuer le même raisonnement avec $a = x_1$ et $b = x_1 + 1$ par exemple.

Méthode alternative (plus simple). L'ensemble X est fini et non vide, on note $m = \min X$. On peut alors prendre $b = m$ et $a = m - 1$ et comme tout $x \in X$ vérifie $x \geq m$, il n'y a aucun élément $x \in X$ tel que $(m - 1 <) x < m$.

(2) Soit D un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ et $d_1, \dots, d_N \in D$ sont N éléments distincts de D. Montrer que $D \setminus \{d_1, \dots, d_N\}$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Regardons les éléments de $\{d_1, \dots, d_N\}$ qui sont dans $]a, b[$: $Y = \{d_1, \dots, d_N\} \cap]a, b[$. L'ensemble Y est fini. S'il est non vide, on peut donc en prendre le minimum $m = \min Y$. Comme $\min Y \in Y$ et $Y \subset]a, b[$, on a $m > a$. Si Y est vide, on pose tout simplement $m = b > a$. Dans tous les cas on peut trouver $d \in D \cap]a, m[$ par densité de D dans $\mathbb{R}$. De plus $d \in]a, b[$ et $d < m = \min Y$ donc $d \notin Y$ et donc $d \notin \{d_1, \dots, d_N\}$ et $d \in D'$.

Quelques rappels ...

Définition (Majorant et borne supérieure)**.** Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de X si pour tout $x \in X$, $x \leq M$. On dit de même que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de X si pour tout $x \in X$, $x \geq m$.
- On dit que x est le *plus grand élément* (resp. le plus petit élément) de X si x est un majorant (resp. minorant) de X et si $x \in X$.
- On dit que $\beta \in \mathbb{R}$ est la *borne supérieure* de X si β est le plus petit élément parmi tous les majorants de X. On la note $\beta = \sup X$.
  De même, on dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est la *borne inférieure* de X si α est le plus grand élément parmi tous les minorants de X. On la note $\alpha = \inf X$.

Attention, il n'existe pas toujours de plus grand ou plus petit élément à un ensemble, même s'il est borné, penser à $X =]0, 1[$ par exemple. En revanche, le théorème de la borne supérieure nous dit que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). On rappelle enfin une caractérisation bien utile de la borne supérieure/inférieure :

Proposition. *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le réel β est la borne supérieure de X si et seulement si β est un majorant de X et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que*

$$\beta - \epsilon \leq x \leq \beta\,.$$

Exercice 4.— *Une dichotomie modifiée*

Soit $X \subset]0, +\infty[$ un ensemble contenant au moins deux éléments distincts. On suppose que X possède la propriété suivante de stabilité :

$$\forall a,\, b \in X\,, \quad \sqrt{ab} \in X\,.$$

(1) L'ensemble X est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée par 0 qui admet donc une born inférieure $\inf X \geq 0$ (puisque 0 est un minorant et la borne inférieure est le plus grand des minorants).

On suppose de plus que X est majoré et on note $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$ et $I =]\alpha, \beta[$. Notre but est de montrer que X est dense dans I au sens où pour tout a, $b \in I$, $a < b$, il existe $x \in X$ tel que $a < x < b$.

(2) L'intervalle I est non vide si et seulement si $\alpha < \beta$ (contient par exemple le milieu $\frac{\alpha+\beta}{2}$ dans ce cas). Or X contient au moins deux éléments distincts par hyptohèse. Soit donc c, $d \in X$ tels que $c < d$. Par définition β majore X donc $d \leq \beta$ et de même $\alpha \leq c$ de sorte que $\alpha \leq c < d \leq \beta$ et $I \neq \emptyset$.

Soit a, $b \in I$, $a < b$, on notera $c = \dfrac{a+b}{2}$.

(3) On a $b < \beta$ et donc $\epsilon = \beta - b > 0$. On peut alors appliquer la caractérisation de la borne supérieure rappelée ci-avant, on a donc un élément $y_0 \in X$ tel que $\beta - \epsilon \leq y_0 \leq \beta$ et on a en particulier $y_0 \geq \beta - \epsilon = b$. On procède de même pour trouver $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq a$.

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le principe de dichotomie suivant, on commence avec x_0, $y_0 \in X$ tels que $x_0 \leq a$ et $b \leq y_0$ donnés par la question précédente et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- *si $x_n \leq c \leq \sqrt{x_n y_n}$ on définit $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$,*

- *si $\sqrt{x_n y_n} < c \leq y_n$, on définit $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ et $y_{n+1} = y_n$.*

(4) Par construction, on vérifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par c et que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quant-à elle décroissante minorée par c (petite récurrence pour la majoration/minoration). On en déduit que ces deux suites convergent. Notons

$$x = \lim_{n\infty} x_n \quad \text{et} \quad y = \lim_{n\infty} y_n \, .$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \leq c \leq y_n$, on en déduit par comparaison que $x \leq c \leq y$.

(5) Soit $u < v$ des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers $l \in]v, w[$. On applique la définition epsilonesque de la convergence d'une suite en choisissant $\epsilon > 0$ pour que
- $v \leq l - \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq l - v$
- et $l + \epsilon \leq w \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq w - l$.

Avec $\epsilon = \min\{l - v, w - l\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - l| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{l - \epsilon}_{v\leq} < u_n < \underbrace{l + \epsilon}_{\leq w}$$

et donc $v < u_n < w$ dès que $n \geq N$.

(6) Supposons qu'elles aient une limite différente : $x < y$. On aurait alors par composition des limites

$$\lim_{n\infty} \sqrt{x_n y_n} = \sqrt{xy}$$

On a d'une part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x$ et $y \leq y_n$, par monotonie de chacune des suites. Or $0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt{xy} < y$. En effet, par stricte croissance de la racine, on a $0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$ et donc en multipliant par $\sqrt{x} > 0$, on obtient $x = \sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$, et on montre de la même façon l'autre inégalité. Grâce à la question précédente, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x < \sqrt{x_N y_N} < y \, .$$

Si $x_{N+1} = \sqrt{x_N y_N}$ (dans le cas où $c > \sqrt{x_N y_N}$) on aurait alors $x_{N+1} > x$ contredit $x_{N+1} \leq x$. Si $y_{N+1} = \sqrt{x_N y_N}$, on aurait alors $y_{N+1} < y$ contredit $y_{N+1} \geq y$. Et finalement $x = y$.
Comme on avait $x \leq c \leq y$, on peut conclure que $x = c = y$.

(7) On peut conclure que X est dense dans I en utilisant à nouveau la question 5 : comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c \in]a, b[$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel les suite $(x_n)_n$ est dans $]a, b[$, par exemple $a < x_N < b$ et de plus $x_N \in X$.

Un peu d'arithmétique ...

Théorème 1 (Lemme d'Euclide)**.** *Soit b, $c \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. Si p divise le produit bc alors p divise b ou p divise c.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'on a bien b, $c \in \mathbb{N}^*$ tels que p divise bc mais p ne divise ni b ni c.
- Notons déjà qu'on a alors $b \neq 1$ et $c \neq 1$.
- Pour b et p fixés, on choisit c le plus petit possible:

$$c = \min\{\gamma \in \mathbb{N}^* \; : \; p \text{ divise } b\gamma \text{ mais ne divise pas } \gamma\} \, .$$

L'ensemble considéré est non vide par hypothèse et minoré (par 2) donc c est bien défini. • On a $c < p$. En effet, on peut effectuer la division euclidienne de c par p:

$$c = c'p + r, \quad c' \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq r < p$$

et de plus $r > 0$ sinon c est multiple de p. On a alors que p ne divise pas r (ni b) et $br = b(c - c'p) = bc - bc'p$ et donc p divise br. Par minimalité, on a bien $c \leq r < p$.
- On effectue cette fois-ci la division euclidienne de p par c:

$$p = mc + r, \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq r < c \, .$$

On a $r > 0$, sinon $p = mc$ et p est premier, $c \neq 1$ donc $p = c$ ($m = 1$) ce qui est exclu puisque p ne divise pas c. Ainsi $0 < r < c < p$.
Comme $br = bp - mbc$ et p divise bc, on a p divise br. Et $r < p$ donc p ne divise pas r. Par minimalité de c, on devrait avoir $r \geq c$ et la contradiction suit. $\square$

Et on enchaîne avec le lemme de Gauss ...

Théorème 2 (Lemme de Gauss)**.** *Soit a, b et $c \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b sont premiers entre eux d'une part et que a divise bc d'autre part. Alors a divise c.*

Preuve. Comme a divise bc et ac, alors a divise leur PGCD. Or

$$\mathrm{PGCD}(bc, ac) = c\,\mathrm{PGCD}(a, b) = c \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux.}$$

On montre le fait que $\mathrm{PGCD}(bc, ac) = c\,\mathrm{PGCD}(a, b)$: comme c divise bc et ac on a que c divise leur $PGCD$. Soit donc $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathrm{PGCD}(bc, ac) = dc\,.$$

Soit $m = \mathrm{PGCD}(a, b)$, m divise a et b donc mc divise bc et ac et donc leur PGCD dc. Comme mc divise dc, on a que m divise d : il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $d = km = k\,\mathrm{PGCD}(a, b)$.
Soit $n = \mathrm{PGCD}(ac, bc)$, $n = kmc$ divise ac et bc donc km divise a et b et donc km divise $\mathrm{PGCD}(a, b) = m$. D'où finalement $k = 1$ et $d = m = \mathrm{PGCD}(a, b)$. $\square$

Exercice 5.— *Rationnel ou irrationnel ?*
On rappelle que tout $a \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique en facteurs premiers (distincts)

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \quad \text{avec} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall i = 1 \dots k, m_i \in \mathbb{N}^*$$

(1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
(2) Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose par l'absurde que $p^{\frac{1}{n}}$ est rationnel. On peut donc écrire $p^{\frac{1}{n}} = \frac{a}{b}$ avec a et b des entiers premiers entre eux. On a

$$pb^n = a^n \quad \Rightarrow \quad p \text{ divise } a^n$$

et comme p est premier, p divise l'un des facteurs du produit a^n et donc p divise a. et on peut écrire $a = pa'$ et

$$pb^n = p^n (a')^n \quad \Leftrightarrow \quad b^n = p^{n-1} (a')^n$$

comme $n - 1 \geq 1$, on en déduit que p divise b ce qui contredit a et b premiers entre eux.
(3) Soit r un rationnel strictement positif et différent de 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r^{\frac{1}{n}}$ est rationnel. Commençons par écrire $r^{\frac{1}{n}} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{N}^*$, a et b premiers entre eux. Par ailleurs r est lui-même rationnel, et on peut l'écrire $r = \frac{c}{d}$ avec c, $d \in \mathbb{N}^*$, c et d premiers entre eux. On peut décomposer c et d en facteurs premiers

$$c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \quad \text{et} \quad d = \prod_{i=1}^{l} q_i^{n_i} = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_l^{n_l}\,.$$

De sorte que $cb^n = da^n$, comme c et d sont premiers entre eux, c divise a^n et donc p_1 divise a^n. Comme p_1 est premier, p_1 divise a et on peut écrire. Comme a et b sont premiers entre eux, p_1 ne divise pas b. On peut donc écrire
• d'une part $cb^n = p_1^{m_1} u$ avec $u \in \mathbb{N}^*$ non multiple de p_1.
• d'autre part $da^n = p_1^n v$ avec $v \in \mathbb{N}^*$.
On a finalement si $n > m_1$ i.e. $n - m_1 \geq 1$:

$$p_1^{m_1} u = p_1^n v \quad \Leftrightarrow \quad u = p_1^{n-m_1} v$$

impossible car p_1 ne divise pas u. On remarque que notre raisonnement n'est valide que si $c \geq 2$. Si on avait $c = 1$, alors $d \geq 2$ car on a supposé $r \neq 1$ et on peut faire le même raisonnement (en remplaçant p_1 par q_1 et dans ce cas on aboutit à une contradiction dès que $n > n_1$. Ainsi, $r^{\frac{1}{n}}$ est irrationnel à partir d'un certain rang N (on peut prendre par exemple $N = \min\{m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l\} + 1$).

Exercice 6.— *Des irrationnels denses.*
On reprend l'ensemble X et les notations de l'exercice 4, montrer que $X \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans I.