Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Thème 3

Autour de la méthode de Newton

La **Méthode de Newton** permet de calculer une solution approchée d'une équation de la forme $f(x) = 0$. On rappelle qu'on ne sait résoudre explicitement une telle équation que dans très peu de cas : si f est linéaire, si f est un polynôme de degré 2, et il existe encore des formules à base de radicaux (i.e. des formules faisant uniquement intervenir les coefficients du polynôme, les 4 opérations élémentaires et les racines k-ièmes) jusqu'à l'ordre 4 mais pas pour les polynômes de degré ≥ 5, comme l'a montré le mathématicien Abel.

Il est alors naturel de se poser la question de la résolution approchée d'une telle équation. La méthode de Newton fournit une méthode, et même une famille de méthodes, dont l'avantage incontestable est la rapidité de convergence (*convergence quadratique*). Malheureusement, la convergence n'est en général garantie que si l'on connaît déjà une assez bonne approximation de la solution que l'on recherche (on parle de *convergence locale*), qui est l'inconvénient principal de la méthode de Newton. À noter que sous hypothèse de convexité, il est possible d'obtenir des résultats de convergence globale et de réconcilier ainsi rapidité et robustesse de la méthode.

Commençons par introduire la méthode de Newton : soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une méthode *itérative* visant à calculer numériquement une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Principe.— Supposons que l'on cherche une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle I et partant de $x_0 \in I$ (par exemple une approximation grossière obtenue par dichotomie). L'idée de la méthode de Newton est de *linéariser* l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0 et de résoudre l'équation affine

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \,.$$

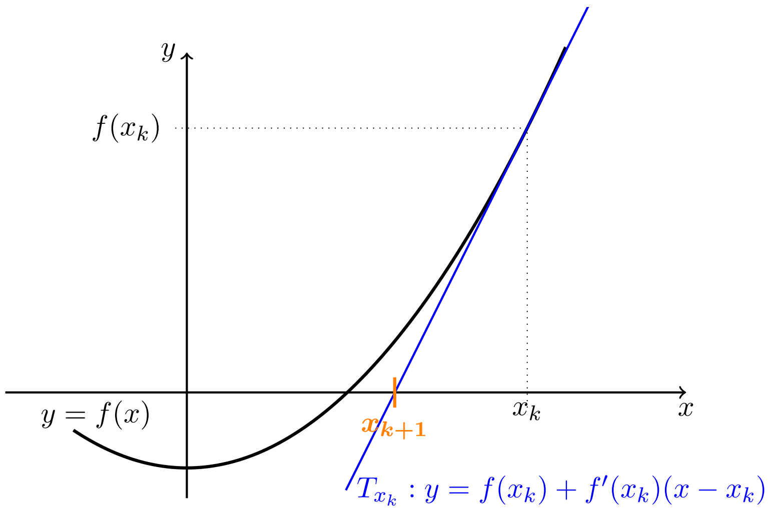
Si $f'(x_0) \neq 0$, on peut ainsi définir

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

et recommencer en linéarisant autour de x_1, pourvu qu'on ait bien $x_1 \in I$. On obtient la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Géométriquement, l'équation $y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ est l'équation de la tangente T_{x_k} à la courbe représentative de f au point $(x_k, f(x_k))$, de sorte que x_{k+1} est le point d'intersection entre T_{x_k} et l'axe des abscisses.



Attention, avant même de discuter de la convergence de la méthode de Newton, il est important de noter que rien n'assure a priori que la suite $(x_k)_k$ soit bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, soit $k \in \mathbb{N}$, si la suite est bien défini jusqu'au rang k, x_{k+1} ne peut pas être défini si :

- $f'(x_k) = 0$,
- $x_k \notin I$.

Et lorsque la méthode est bien définie, elle ne converge pas nécessairement ... on va étudier des exemples simples dans l'exercice 4.

Séance 1

Convergence quadratique : une méthode très efficace lorsqu'elle converge

On rappelle l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires, que nous prendrons la licence d'appeler par son petit nom "TVI" par la suite.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que le réel d appartient au segment $[f(\alpha), f(\beta)]$ ou $[f(\beta), f(\alpha)]$, alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $d = f(\gamma)$.*
En particulier, si $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Exercice 1.— *Théorème des valeurs intermédiaires*

On s'intéresse au cas particulier du TVI : soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et on suppose que $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(\gamma) = 0$.

1. Donner une condition assurant l'unicité d'un tel γ, donner un contre exemple à l'unicité de γ en général.

   Un tel γ est unique si f est strictement monotone. Sans cette hypothèse, on pourra penser à la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Tout réel $c \in]0, 1]$ a alors exactement deux antécédents par f. En effet, soit $c \in]0, 1]$ et $x \in [-1, 1]$,

$$|x| = c \iff \begin{cases} x & = & c \\ & \text{ou} & \\ -x & = & c \end{cases} \iff x \in \{-c, c\}$$

2. Soit $\mu = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ le milieu du segment $[\alpha, \beta]$.

   (*i*) Si $f(\alpha)f(\mu) \leq 0$ alors il existe $\tilde{\gamma} \in [\alpha, \mu]$ tel que $f(\tilde{\gamma}) = 0$. A-t-on toujours $\tilde{\gamma} = \gamma$?

   (*ii*) Montrer que sinon, i.e. si $f(\alpha)f(\mu) > 0$, alors $f(\beta)f(\mu) \leq 0$.

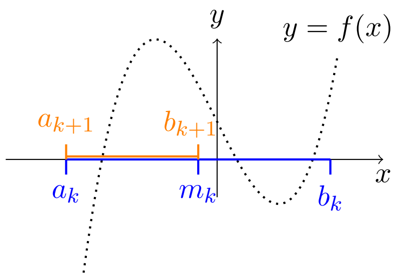
   (*i*) Non, si la fonction a plusieurs zéro dans $[\alpha, \beta]$, rien ne garantit que $\tilde{\gamma} = \gamma$ (faire un bô dessin).

   (*ii*) Si $f(\alpha)f(\mu) > 0$ alors $f(\alpha)^2 > 0$ et de plus

$$f(\alpha)^2 f(\beta)f(\mu) = \underbrace{f(\alpha)f(\beta)}_{\leq 0}\underbrace{f(\alpha)f(\mu)}_{>0} \leq 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{f(\alpha)^2>0} \quad f(\beta)f(\mu) \leq 0\,.$$

   Avec des mots : $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signe opposé par hypothèse. Si $f(\alpha)$ et $f(\mu)$ sont de même signe, alors $f(\beta)$ et $f(\mu)$ sont de signe opposé.
   On peut à nouveau en déduire qu'il existe $\tilde{\gamma} \in [\mu, \beta]$ tel que $f(\tilde{\gamma}) = 0$.

Dichotomie.— Lorsque vous avez démontré le théorème des valeurs intermédiaires, vous avez probablement utilisé une méthode de Dichotomie afin de construire une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0 et qui contiennent tous une solution de l'équation $f(x) = 0$. Cette méthode fournit également un algorithme permettant de calculer une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$. Son principal avantage est qu'elle est *robuste* : elle converge dès que l'intervalle initial contient une solution. Son inconvénient majeur est qu'elle ne converge pas très vite, ou en tout cas bien moins vite que la méthode de Newton, comme on va le voir.



Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. On définit les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence comme suit: $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $m_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ le milieu du segment d'extrémités a_k et b_k et on définit

$$\begin{cases} \text{si } f(a_k)f(m_k) \leq 0 \text{ alors} & a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = m_k \\ \text{sinon} & a_{k+1} = m_k,\ b_{k+1} = b_k\,. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2.— *Convergence de la méthode par Dichotomie*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$ et les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par (1).

1. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k \leq b_k \quad \text{et} \quad f(a_k)f(b_k) \leq 0\,. \tag{P_k}$$

Récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation :* $a_0 = a \leq b = b_0$ et $f(a_0)f(b_0) = f(a)f(b) \leq 0$ par hypothèse.
- *Hérédité :* soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et on suppose que $a_k \leq b_k$ et $f(a_k)f(b_k) \leq 0$ (HR). On a alors deux cas à traiter.
  - ∗ Premier cas, $f(a_k)f(m_k) \leq 0$. On a alors par définition (1) $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = m_k$ et donc bien d'une part $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) = f(a_k)f(m_k) \leq 0$ et d'autre part

$$a_{k+1} = a_k = \frac{a_k}{2} + \frac{a_k}{2} \underbrace{\leq}_{(HR)} \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} = b_{k+1}\,.$$

  - ∗ Deuxième cas, $f(a_k)f(m_k) > 0$. On a alors par définition (1) $a_{k+1} = m_k$, $b_{k+1} = b_k$. Or, par (HR), $f(a_k)f(b_k) \leq 0$ et on a alors par l'exercice 1-2(ii) avec $\alpha = a_k$, $\beta = b_k$ et $\mu = m_k$ que $f(m_k)f(b_k) \leq 0$ i.e. $f(a_{k+1})f(b_{k+1}) \leq 0$. La suite se traite de la même façon que le premier cas :

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} \underbrace{\leq}_{(HR)} \frac{b_k}{2} + \frac{b_k}{2} = b_k = b_{k+1}\,.$$

- *Conclusion :* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq b_k$ et $f(a_k)f(b_k) \leq 0$.

2. Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|b_k - a_k| \leq 2^{-k}|b - a|$.

Pas besoin de récurrence ici !

- La suite $(a_k)_k$ est croissante. En effet, soit $k \in \mathbb{N}$, on a soit $a_{k+1} = a_k$, soit $a_{k+1} = m_k = \frac{a_k+b_k}{2} \geq a_k$ car $b_k \geq a_k$ par la question précédente. Dans les deux cas $a_{k+1} \geq a_k$.
- De même, la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- Il reste à montrer que $|b_k - a_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Or, par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ est de longueur la moitié du précédent $[a_k, b_k]$ (on peut le voir directement à partir de la définition des suite (1) bien sûr) et donc

$$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - a_k| \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{suite géométrique}} |b_k - a_k| = \left(\frac{1}{2}\right)^k |b_0 - a_0| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,.$$

3. Conclure que les suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers la même limite $\gamma \in [a, b]$ telle que $f(\gamma) = 0$ et de plus

$$|a_k - \gamma| \leq 2^{-k}|b - a| \quad \text{et} \quad |b_k - \gamma| \leq 2^{-k}|b - a|\,.$$

Le théorème des suites adjacentes nous permet de conclure que les deux suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers une même limite γ et de plus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a \leq a_k \leq \gamma \leq b_k \leq b\,.$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a montré à la question 1 que $f(a_k)f(b_k) \leq 0$ et on peut ainsi appliquer le théorème des valeurs intermédaires à la fonction f continue sur $[a_k, b_k]$. On en déduit qu'il existe $\gamma_k \in [a_k, b_k]$ tel que $f(\gamma_k) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq \gamma_k \leq b_k$ et donc, par encadrement, $\gamma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \gamma$. Ainsi, par continuité de f au point γ, $f(\gamma_k) \xrightarrow[n_to\infty]{} f(\gamma)$. Et par ailleurs, la suite $(f(\gamma_k))_k$ est constante égale à 0 donc converge vers 0. Par unicité de la limite, il vient que $f(\gamma) = 0$. Enfin, comme $a_k \leq \gamma \leq b_k$, on a de plus le contrôle

$$|a_k - \gamma| \leq |b_k - a_k| \leq 2^{-k}|b - a| \quad \text{et de même} \quad |b_k - \gamma| \leq 2^{-k}|b - a|\,.$$

4. Combien d'itérations de la méthode par Dichotomie assurent d'obtenir une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ avec une précision $\leq 10^{-16}$? *Autrement dit, comment choisir* $k \in \mathbb{N}$ *pour assurer* $|a_k - \gamma| \leq 10^{-16}$ *?*

Grâce à la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|a_k - \gamma| \leq 2^{-k}|b - a|$ et on cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^{-k}|b - a| \leq 10^{-16} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\ln \text{croissant} \\ \text{bijectif}}} -k \ln 2 + \ln|b - a| \leq -16 \ln 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln|b - a| + 16 \ln 10}{\ln 2} \leq k\,.$$

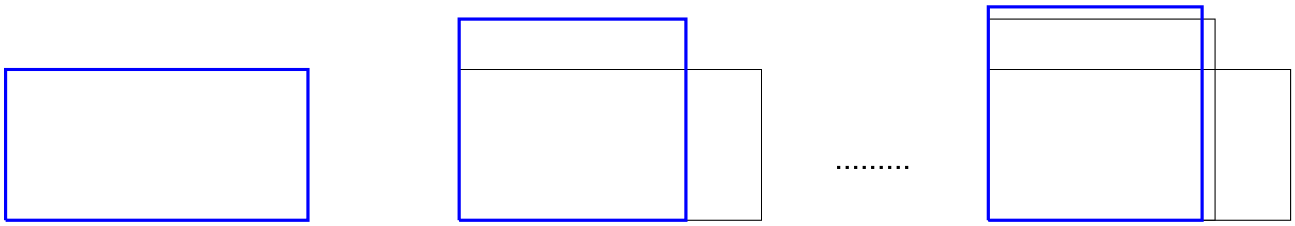
On peut définir N comme le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{\ln|b-a|+16\ln 10}{\ln 2}$ ("partie entière supérieure"). Effectuer N itérations, c'est-à-dire calculer a_N (ou b_N) assure que $|a_N - \gamma| \leq 10^{-16}$: a_N est une valeur approchée de γ avec une précision $\leq 10^{-16}$. Par exemple, si $|b - a| = 1$, on a (à la calculatrice)[1]

$$53 < \frac{\ln|b - a| + 16 \ln 10}{\ln 2} \leq 54$$

et on effectuerait $N = 54$ itérations.

[1]à la main : on encadre 10 par les puissances de 2 les plus proches, $2^3 < 10 < 2^4$ et on en déduit $3 = \dfrac{\ln(2^3)}{\ln 2} < \dfrac{\ln 10}{\ln 2} < \dfrac{\ln(2^4)}{\ln 2} = 4$ et on obtient un encadrement $48 < \ldots < 64$.

Algorithme de Héron.— Calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ ou plus généralement de la racine d'un entier naturel est une question très ancienne. On peut appliquer la méthdode de Dichotomie à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$ mais il existe (au moins) une autre façon de procéder très ancienne : l'algorithme de Héron (c'est un de ses nombreux noms). L'idée est assez simple : on cherche un carré dont l'aire vaut 2. Commençons avec un rectangle de côtés $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ et essayons de le rendre plus carré tout en préservant une aire égale à 2. Pour cela, on définit un rectangle de côtés a_1 et b_1 : on augmente la taille du plus petit côté, en prenant $a_0 < a_1 < b_0$, et pour conserver l'aire, on prend $b_1 = \frac{2}{a_1}$. Il reste à choisir plus précisément a_1 : l'algorithme de Héron consiste à prendre la moyenne des côtés précédents $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.



On définit finalement les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+1} = \frac{a_k + \dfrac{2}{a_k}}{2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ b_k = \frac{2}{a_k}\,. \tag{2}$$

Exercice 3.— *Comparaison de la Dichotomie et de l'algorithme de Héron.*

1. Montrer que l'algorithme de Héron coïncide avec la méthode de Newton appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ et condition initiale $x_0 = a_0$.

   La fonction f est bien de classe C^1 et de dérivée $f' : x \mapsto 2x$, non nulle en -dehors de 0. Calculons la fonction définissant l'itération de Newton $F : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$F(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}\,.$$

   Et on retrouve bien l'itération définie par l'agorithme de Héron $a_{k+1} = \frac{a_k + \frac{2}{a_k}}{2} = F(a_k)$.

   On va maintenant comparer la méthode de Dichotomie et l'algorithme de Héron (i.e. la méthode de Newton dans le cas du calcul approché d'une racine carrée).

2. *Algorithme de Héron.* Calculer (à l'aide d'une calculette) $a_0, a_1, \ldots, a_4$ ainsi que $b_0, b_1, \ldots, b_4$ et comparer à la valeur de $\sqrt{2}$. Quelle précision a-t-on atteint en 4 itérations ?

   On obtient

$a_0 = 1$	$b_0 = 2$	$\lvert b_0 - a_0\rvert = 1$
$a_1 = 3/2 = 1.5$	$b_1 = 4/3 \simeq 1.33333333$	$\lvert b_1 - a_1\rvert \leq 0.2$
$a_2 = 17/12 \simeq 1.41667$	$b_2 = 24/17 \simeq 1.411776$	$\lvert b_2 - a_2\rvert \leq 10^{-2}$
$a_3 = 577/408 \simeq 1.414215$	$b_3 = 816/577 \simeq 1.414211$	$\lvert b_3 - a_3\rvert \leq 10^{-5}$
$a_4 \simeq 1.414213562374$	$b_4 \simeq 1.414213562371$	$\lvert b_4 - a_4\rvert \leq 10^{-11}$

On observe qu'on double (approximativement) le nombre de chiffres significatifs à chaque itérations : on dit que l'algorithme de Héron est *d'ordre* 2.

3. *Dichotomie.* Reprendre la question précédente avec les suites définies par dichotomie, en partant de $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ également. Qu'observez-vous ?

   Si maintenant on effectue le calcul avec les suites définies par Dichotomie (1), on obtient

$$\begin{array}{l|l|l}
a_0 = 1 & b_0 = 2 & |b_0 - a_0| = 1 \\
a_1 = 1 & b_1 = 1.5 & |b_1 - a_1| = 0.5 \\
a_2 = 1.25 & b_2 = 1.5 & |b_2 - a_2| = 0.25 \\
a_3 = 1.375 & b_3 = 1.5 & |b_3 - a_3| = 0.125 \\
a_4 = 1.375 & b_4 = 1.4375 & |b_4 - a_4| = 0.0625
\end{array}$$

   On observe qu'on atteint une précision moins bonne qu'en seulement deux itérations de la méthode de Héron.

4. Sachant que $|a_k - \sqrt{2}| \leq 2^{-k}|b-a|$ pour la dichotomie, combien d'itérations assurent une précision à 10^{-5} près ? (c'est-à-dire quel $k \in \mathbb{N}$ est assez grand pour assurer que a_k est une approximation de $\sqrt{2}$ pour laquelle les 5 premières décimales sont correctes) et à 10^{-11} près ?

   Avec $a_0 = a = 1$ et $b_0 = b = 2$, la méthode de Dichotomie assure que $|a_k - \sqrt{2}| \leq 2^{-k}|b-a| = 2^{-k}$. Si on veut être sûr d'atteindre une précision 10^{-5}, on doit choisir $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^{-k} \leq 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad -k \ln 2 \leq -5 \ln 10 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 5 \frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 16.61$$

   et il suffit de prendre $k \geq 17$. On remarque que l'algorithme de Héron permettait d'atteindre cette précision en seulement $k = 3$ itérations.
   De même, si on veut être sûr d'atteindre une précision 10^{-11}, on doit choisir $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^{-k} \leq 10^{-11} \quad \Leftrightarrow \quad -k \ln 2 \leq -11 \ln 10 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 11 \frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 36.54$$

   et il suffit de prendre $k \geq 37$. On remarque que l'algorithme de Héron permettait d'atteindre cette précision en seulement $k = 4$ itérations.

Séance 2

Sensibilité à la condition initiale

Commençons par énoncer un résultat de convergence locale de la méthode de Newton. Nous ne ferons pas la preuve dans le cas général, on renvoie cependant au DM afin d'en comprendre le principe sur un cas particulier.

Théorème (Convergence locale)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \textit{et} \quad \forall x \in [a,b],\ f'(x) > 0\,.$$

On considère la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ définissant l'itération de Newton. Alors,

- *f admet un unique zéro $\gamma \in [a,b]$.*
- *Soit $x_0 \in [a,b]$. Si $|x_0 - \gamma|$ est assez petit,*[2] *la suite des itérées de Newton $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = F(x_k)$ est bien définie et converge vers γ. De plus, la convergence est* quadratique *: $\exists C > 0$ tel que*

$$|x_{k+1} - \gamma| \leq C|x_k - \gamma|^2\,.$$

On a déjà observé l'effet de la convergence quadratique de la méthode dans le cas de l'algorithme de Héron. Ajoutons simplement que si l'erreur $|x_k - \gamma|$ à l'itération k satisfait

$$C|x_k - \gamma| \leq 10^{-N} \text{ pour un certain } N \in \mathbb{N}$$

i.e. que les N premières décimales de γ sont correctes, alors à l'itération suivante,

$$C|x_{k+1} - \gamma| \leq C\,C|x_k - \gamma|^2 \leq 10^{-2N}$$

et le nombre de décimales exactes dans $C|x_k - \gamma|$ double à chaque itérations ! On peut résumer ainsi la situation : soit la méthode de Newton est bien définie et converge, et dans ce cas on atteindra la précision machine 10^{-16} (ou 10^{-32}) en moins d'une dizaine d'itérations, soit la méthode de Newton ne converge pas ou n'est pas bien définie, et nous allons étudier quelques exemples dans l'exercice suivant.

Exercice 4.— *Méthode de Newton et sensibilité à la condition initiale : non convergence.*

Dans tout l'exercice, on considère lorsqu'elle est bien définie, la suite donnée par la méthode de Newton

$$\left\{\begin{array}{lll} x_{k+1} & = & F(x_k), \quad k \in \mathbb{N} \\ x_0 & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \qquad \text{où} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1. **Sortie de l'ensemble de définition.** Soit f défine sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 0$. Trouver $x_0 \in]-1,+\infty[$ tel qu'on sorte de l'intervalle de définition de f à la première itération.

   Tout d'abord, f est bien dérivable sur son ensemble de définition et pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,.$$

[2] Il existe $\delta > 0$ tel que si $|x_0 - \gamma| < \delta$, …

On en déduit que f' ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$F(x) = x - 2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right) = x - 2(x+1) + 2\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+1} - x - 2\,.$$

On rappelle au passage que $\sqrt{t}$ n'étant défini que pour $t \geq 0$, on a toujours $\left(\sqrt{t}\right)^2 = t$ tandis que $\sqrt{t^2} = |t|$.

On cherche maintenant $x_0 > -1$ tel que $x_1 = F(x_0) \leq -1$. Or,

$$F(x_0) \leq -1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0+1} \leq x_0 + 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x_0+1\geq 0} 4(x_0+1) \leq (x_0+1)^2 \Leftrightarrow \underbrace{x_0^2 - 2x_0 - 3}_{=(x_0+1)(x_0-3)} \geq 0$$

ce qui est finalement équivalent à $x_0 \geq 3$ (ou aurait aussi $x_0 \leq -1$ mais on a supposé $x_0 > -1$ ...) et par exemple avec $x_0 = 3$, on obtient $x_1 = -1 \notin]-1,+\infty[$.

2. **Tangente horizontale.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1$, l'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 1$. Donner deux points $x_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquels la méthode de Newton n'est pas définie pour tout k (i.e. n'est pas définie à partir d'un certain rang).

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0. Ainsi, si la suite des itérées de Newton est initialisée à 0, le premier terme n'est pas défini. De même, si la suite des itérées de Newton passe par 0, la méthode de ne sera pas définie à partir de cet instant. Pour $x \neq 0$, on a

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{3x^3 - x^3 + 1}{3x^2} = \frac{2x^3+1}{3x^2}\,.$$

   On cherche $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_1 = F(x_0) = 0$:

$$F(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

   et dans ce cas la suite n'est plus définie après 1 itération. On peut ensuite se demander si $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ a un (ou plusieurs) antécedents par F ...

3. **Problème de régularité.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$.

   (i) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

   (ii) La méthode de Newton n'est pas définie pour $x_0 = 0$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = (-1)^k x_0$ ne converge pas.

   (i) Commençons par vérifier que f n'est pas dérivable en 0. Soit $x > 0$ par exemple, le taux de variation à droite en 0 tend vers $+\infty$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0_+]{} +\infty$$

   et donc f ne peut être dérivable en 0.

(*ii*) La méthode de Newton n'est ainsi pas définie pour $x_0 = 0$. Qu'en est-il pour $x_0 \in \mathbb{R}^*$?
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad F(x) = \begin{cases} x - 2\sqrt{x}\sqrt{|x|} = -x & \text{si} \quad x > 0 \\ x - -2\sqrt{-x}\sqrt{|x|} = x + 2|x| = -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

On a donc $F(x) = -x$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = (-1)^k x_0$ ne converge pas. Même si x_0 est très proche de 0. Cela ne contredit pas le théorème de convergence locale puisque f n'est pas de classe C^2 (pas dérivable en 0).

4. **F admet un cycle ou un point péridique en général.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Vérifier que $F(0) = 1$ et $F(1) = 0$ ($F(F(0)) = 0$ et $F(F(1)) = 1$). Que peut-on en déduire concernant les conditions initiales $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$?

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, de sorte que, pour $x \notin \{-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\}$,

$$F(x) = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} = \frac{2x^3 - 2}{3x^2 - 2}\,.$$

On vérfie que $F(0) = 1$ et $F(1) = 0$, ainsi $F(F(0)) = 0$ et $F(F(1)) = 1$. Si on initialise la méthode de Newton à $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, elle est bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ mais "tourne en rond" alternant entre 0 et 1 ...

5. **Divergence vers l'infini.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\exp(-x)$. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 0$.

- Montrer que si $x_0 \geq 2$ alors pour tout n, $x_n \geq 2$.
- Montrer que $(x_k)_k$ est croissante.
- En déduire que $(x_k)_k$ converge vers $+\infty$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\exp(-x)$. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 0$. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp(-x) - x\exp(-x) = (1-x)\exp(-x)$ de sorte que pour $x \neq 1$,

$$F(x) = x - \frac{x\exp(-x)}{(1-x)\exp(-x)} = x + \frac{x}{x-1}\,,$$

et on remarque que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq x$.

(a) Soit $x_0 \geq 2$. Montrons par récurence que pour tout k, $x_k \geq 2$.
   - ∗ *Initialisation :* $x_0 \geq 2$ par hypothèse.
   - ∗ *Hérédité :* Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que $x_k \geq 2$. On remarque que pour $x \geq 2$, $F(x) \geq x \geq 2$ et donc $x_{k+1} = F(x_k) \geq x_k \geq 2$.
   - ∗ *Conclusion :* $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \geq 2$.

(b) Montrons que $(x_k)_k$ est croissante. Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k+1} - x_k = F(x_k) - x_k \geq 0 \quad \text{car} \quad x_k \geq 2\,.$$

(c) Par le théorème de la suite monotone, la suite $(x_k)_k$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$. Si on avait $x_k \to l \in \mathbb{R}$, comme $x_k \geq 2$, on obtient par comparaison $l \geq 2$ et par continuité de F sur $[2, +\infty[$ (et donc en l) :

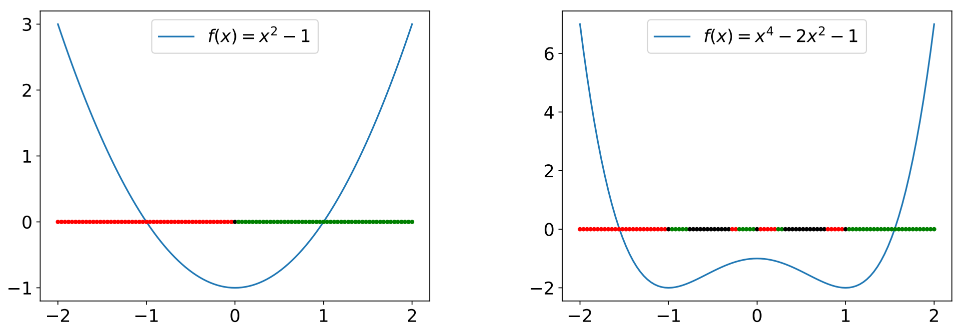
$$F(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(l) \quad \text{et} \quad F(x_k) = x_{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} l\,.$$

Par unicité de la limite, on a $F(l) = l$. Ce qui est impossible car $l \geq 2$ et

$$F(l) = l \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{l}{l-1} \quad \Longleftrightarrow \quad l = 0\,.$$

D'où finalement $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Il est intéressant de remarquer que même lorsque la méthode de Newton converge, il y a également incertitude sur le zéro de f vers lequel il y a convergence. En particulier, on peut prendre des conditions initiales x_0 et $\tilde{x_0}$ proches et pourtant dans certains cas, les itérées de Newton associées vont converger vers deux zéros $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ de f distincts (et pas nécessairement proches). Examinons plus concrètement deux exemples.



(a) (b)

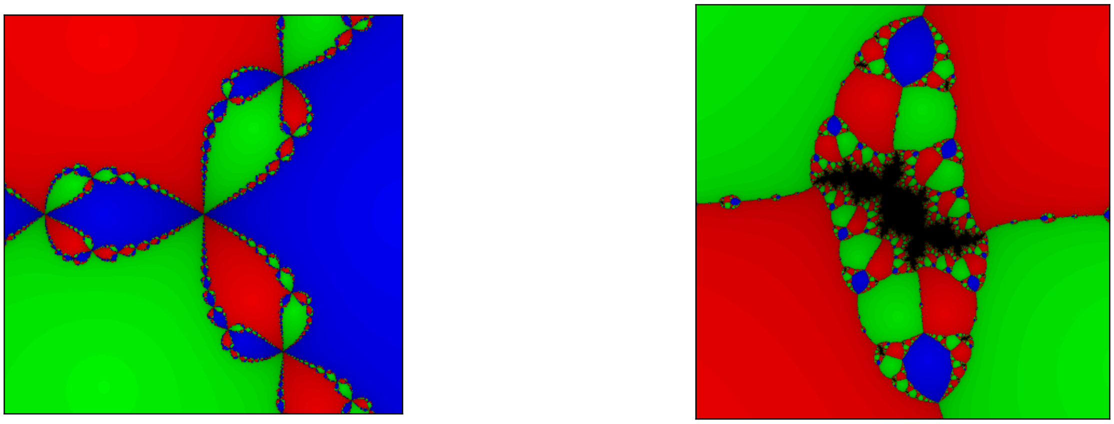
Sur les figures ci-dessus, on considère une fonction polynomiale f définie sur $[-2, 2]$ et possèdant deux zéros distincts de signe opposé $-2 < \gamma_- < 0 < \gamma_+ < 2$ dans cet intervalle. Pour j entre 0 et 100, on a défini $x_0 = -2 + 4\frac{j}{100} \in [-2, 2]$ et on a calculé les itérations de la méthode de Newton (avec un petit script Python). On colorie ensuite le point de coordonnées $(x_0, 0)$ en vert si la méthode converge vers le zéro de f positif γ_+, en rouge si la méthode converge vers le zéro de f négatif γ_- et en noir sinon (non convergence ou non définition de la méthode).

- Sur la figure de gauche, une condition initiale $x_0 < 0$ (resp. $x_0 > 0$) conduit à la convergence de la méthode de Newton vers la racine négative (resp. positive), et pour $x_0 = 0$, $f'(x_0) = 0$ et x_1 n'est pas défini.

- Sur la figure de droite, le comportement de la méthode en fonction de la condition initiale semble beaucoup plus compliqué à prédire.

L'ensemble des points rouges (resp. verts) est appelé *bassin d'attraction* de la racine négative γ_- (resp. racine positive γ_+).

La même étude menée avec un polynôme de degré 3 dans le plan complexe permet d'observer la même sensibilité de la méthode vis-à-vis du choix de la condition initiale, on obtient d'esthétiques *fractales de Newton* et je vous encourage à aller chercher d'autres images sur le web ! (pour plus de détails sur la méthode de Newton pour un polynôme $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on renvoie à l'énoncé de l'exercice suivant).



(a) (b)

Figure 2: $P(z) = z^3 - 1$

Exercice 5.— *Bassin d'attraction d'un polynôme complexe de degré* 2.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$. On considère le polynôme complexe défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)$$

et son polynôme dérivé

$$P'(z) = 2z - (\alpha + \beta)\,.$$

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}$, on définit l'itération de Newton par

$$z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)} \quad \text{et} \quad F(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}\,.$$

1. Que peut-on dire de $(z_n)_n$ lorsque $z_0 = \alpha$ ou $z_0 = \beta$?
2. On suppose maintenant $z_0 \notin \{\alpha, \beta\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que z_n est bien défini,
$$z_n \notin \{\alpha, \beta\} \quad \text{et} \quad \frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} = \left(\frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}\right)^2\,.$$
3. On définit la suite $w_n = \dfrac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}$. Exprimer w_n en fonction de w_0 et n.
4. Rappeler l'expression des racines n–ièmes de l'unité $z \in \mathbb{C}$ telles que $z^n = 1$.

5. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de w_n a-t-on $z_n = \frac{\alpha+\beta}{2}$?
   (b) Pour quelles valeurs de w_0 a-t-on $z_n = \frac{\alpha+\beta}{2}$?
   (c) Pour quelles valeurs de w_0 a-t-on que $(z_n)_n$ est bien défini pour tout n (c'est-à-dire que $z_n \neq \frac{\alpha+\beta}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ?

   On retiendra que si $|w_0| \neq 1$, $(z_n)_n$ est bien défini pour tout n.

6. On suppose $|w_0| > 1$, que peut-on dire de $|w_n|$ quand n tend vers $+\infty$? et pour $|w_0| < 1$?

7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$ et $w = \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$. Exprimer z en fonction de w, c'est-à-dire $z = h(w)$.

8. En déduire la limite de $(z_n)_n$ lorsque $|z_0 - \alpha| \neq |z_0 - \beta|$.