Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Blanche Buet, Thomas Letendre et Stéphane Nonnenmacher.

Examen partiel – 20 octobre 2022

L'épreuve dure 3 heures. L'usage de documents, calculatrices, téléphones portables est interdit.

Le sujet comporte 5 exercices indépendants. L'exercice 5 est sensiblement plus difficile que les autres. Il est recommandé de ne l'aborder qu'après avoir traité soigneusement les exercices 1 à 4, ce qui est suffisant pour obtenir une bonne note.

Afin de faciliter le travail de correction, merci de composer sur trois jeux de copies indépendants qui contiendront respectivement :

- **l'exercice 1,**
- **les exercices 2 et 3,**
- **les exercices 4 et 5.**

Exercice 1 (Distributions à support compact)**.** Pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on notera $\|\varphi\|_K = \sup\big\{|\varphi(x)| \;\big|\; x \in K\big\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ et soit T_f la distribution associée. On note $K = \operatorname{supp}(T_f)$, montrer que :
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad |\langle T_f\,, \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_K \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
D'après le cours (ex. 1.6.5), comme f continue $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(T_f) = K$ est compact. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a donc :
$$|\langle T_f\,, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_K |\varphi(x)||f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_K \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact, montrer que T est d'ordre fini.
Soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(T) \subset [-M, M]$ et soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau égale à 1 sur $[-M-1, M+1]$ et nulle hors de $[-M-2, M+2]$. Comme $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe $C \geqslant 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $[-M-2, M+2]$, on ait $|\langle T\,, \psi\rangle| \leqslant C \sum_{j=0}^m \|\psi^{(j)}\|_\infty$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est à support dans $[-M-2, M+2]$. Par ailleurs, $(1-\chi)\varphi$ s'annule sur $[-M-1, M+1]$ et donc $\operatorname{supp}((1-\chi)\varphi) \cap \operatorname{supp}(T) = \emptyset$. Par la prop. 1.6.7 du cours,
$$|\langle T\,, \varphi\rangle| = \big|\langle T\,, \chi\varphi\rangle + \langle T\,, (1-\chi)\varphi\rangle\big| = |\langle T\,, \chi\varphi\rangle| \leqslant C \sum_{j=0}^m \|(\chi\varphi)^{(j)}\|_\infty.$$
Soit $j \in \{0, \dots, m\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|(\chi\varphi)^{(j)}(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \chi^{(j-i)}(x)\varphi^{(i)}(x)\right| \leqslant \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \|\chi^{(j-i)}\|_\infty \|\varphi^{(i)}\|_\infty,$$
donc
$$|\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} \binom{j}{i} \|\chi^{(j-i)}\|_\infty \|\varphi^{(i)}\|_\infty \leqslant C \sum_{i=0}^m \|\varphi^{(i)}\|_\infty \left(\sum_{j=i}^m \binom{j}{i} \|\chi^{(j-i)}\|_\infty\right).$$
Cette majoration est indépendante d'un compact contenant le support de φ. Donc T est d'ordre au plus $m \in \mathbb{N}$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à support compact K et soit $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de T. On peut se demander si, comme à la question 1, il existe $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad |\langle T , \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{i=0}^{m} \|\varphi^{(i)}\|_K. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est prouver que c'est en général faux, en construisant un contre-exemple. On définit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T , \varphi \rangle = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right)\right).$$

3. Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre inférieur ou égal à 1.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\left|\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right)\right| \leqslant \frac{2}{k}\|\varphi'\|_\infty$ par le théorème des accroissements finis. Donc $\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{k}\right)\right)\right| \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty k^{-\frac{3}{2}}$ est sommable et $\langle T , \varphi \rangle$ est bien défini. De plus,
   $$|\langle T , \varphi \rangle| \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty \sum_{k \geqslant 1} k^{-\frac{3}{2}}.$$
   Comme $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est linéaire, cette inégalité prouve que T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre inférieur ou égal à 1.
4. Déterminer le support K de T.
   Notons $K = \left\{\frac{1}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}^*\right\} \sqcup \{0\}$, on va vérifier que $\operatorname{supp}(T) = K$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \setminus K$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ on a $\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ et donc $\langle T , \varphi \rangle = 0$. Donc $T_{|\mathbb{R}\setminus K} = 0$ et $\operatorname{supp}(T) \subset K$.
   Soit $l \in \mathbb{Z}^*$ et soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $K \cap \left]\frac{1}{l} - \varepsilon, \frac{1}{l} + \varepsilon\right[= \left\{\frac{1}{l}\right\}$. Soit $\chi_{l,\varepsilon} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle hors de $\left]\frac{1}{l} - \varepsilon, \frac{1}{l} + \varepsilon\right[$ et telle que $\chi\left(\frac{1}{l}\right) = 1$. L'existence d'une telle fonction est assurée par le cours prop. 1.2.6. Alors,
   $$\langle T , \chi_{l,\varepsilon} \rangle = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\chi_{l,\varepsilon}\left(\frac{1}{k}\right) - \chi_{l,\varepsilon}\left(-\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{|l|}} \left(\chi_{l,\varepsilon}\left(\frac{1}{|l|}\right) - \chi_{l,\varepsilon}\left(-\frac{1}{|l|}\right)\right) = \frac{l}{|l|^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$
   Donc T n'est nulle en restriction à aucun voisinage de $\frac{1}{l}$. Donc $\frac{1}{l} \in \operatorname{supp}(T)$ pour tout $l \in \mathbb{Z}^*$ et donc $K \setminus \{0\} \subset \operatorname{supp}(T)$. Comme $\operatorname{supp}(T)$ est fermé et 0 est adhérent à $K \setminus \{0\}$ on a $K \subset \operatorname{supp}(T)$ et finalement $K = \operatorname{supp}(T)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi_n \in \mathcal{D}(]0, 2[)$ avec les propriétés suivantes :
   (a) $\|\varphi_n\|_\infty = 1$,
   (b) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est constante sur un voisinage du point $\frac{1}{k}$,
   (c) $\langle T , \varphi_n \rangle \geqslant n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$, il existe p_n tel que $\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant n$. D'après le cours prop. 1.2.6, il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0, 1]$, constante égale à 1 sur un voisinage de $\left[\frac{1}{p_n}, 1\right]$ et nulle hors de $\left]\frac{1}{p_n + \frac{1}{2}}, 2\right[$. On a bien $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et $\varphi_n \in \mathcal{D}(]0, 2[)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, la fonction φ_n est constante au voisinage de $\frac{1}{k}$ (égale à 1 si $1 \leqslant k \leqslant p_n$ et égale à 0 sinon). Enfin,
   $$\langle T , \varphi_n \rangle = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant n.$$

6. Montrer que T est d'ordre $m = 1$.

   D'après la question 3, on sait que T est d'ordre $m \leqslant 1$. Montrons par l'absurde que T n'est pas d'ordre 0. Si c'était le cas, il existerait une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $[0,2]$, on ait $|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_\infty$. Comme φ_n est supportée dans $[0,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait :

$$C = C\|\varphi_n\|_\infty \geqslant |\langle T\,,\varphi_n\rangle| \geqslant n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

   ce qui est absurde. Donc T est d'ordre égal à 1.

7. Conclure qu'il n'existe pas de $C \geqslant 0$ tel que (1) soit vérifiée pour la distribution T.

   On raisonne de nouveau par l'absurde est utilisant la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 5. S'il existait $C \geqslant 0$ telle que la relation (1) soit vérifiée, on aurait

$$n \leqslant \langle T\,,\varphi_n\rangle \leqslant C\big(\|\varphi_n\|_K + \|\varphi_n'\|_K\big)$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, φ_n est constante au voisinage de chaque point de K par construction. Donc $\|\varphi_n'\|_K = 0$ et $\|\varphi_n\|_K \leqslant 1$. Là aussi on aurait $C \geqslant n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice 2 (Prolongement des fonctions à singularité polynomiale)**.** On considère une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^*)$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \geqslant 0$ tels que :

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \qquad |f(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^n}. \tag{2}$$

Soit $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ la distribution associée à f. On définit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T\,,\varphi\rangle = \int_{|x|<1} f(x)\left(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right)\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}$ qui est d'ordre inférieur ou égal à n.

   Soit $M \geqslant 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $[-M,M]$. Comme $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^*)$ et φ est bornée, $f\varphi$ est intégrable sur $[-M,M]\backslash]-1,1[$.

   Pour tout $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, la formule de Taylor–Lagrange montre que :

$$|f(x)|\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant |f(x)|\frac{|x|^n}{n!}\|\varphi^{(n)}\|_\infty \leqslant \frac{C}{n!}\|\varphi^{(n)}\|_\infty$$

   donc $x \mapsto f(x)\Big(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\Big)$ est intégrable sur $[-1,1]$, ce qui montre que $\langle T\,,\varphi\rangle$ est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned}|\langle T\,,\varphi\rangle| &\leqslant \int_{|x|<1} |f(x)|\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right|\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{2C}{n!}\|\varphi^{(n)}\|_\infty + \left(\int_{[-M,-1]\cup[1,M]} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\|\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

   Comme $\langle T\,,\varphi\rangle$ dépend bien linéairement de φ, la majoration précédente montre que T définit une distribution d'ordre au plus n.

2. Vérifier que $T_{|\mathbb{R}^*} = T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. En particulier, φ est nulle au voisinage de 0, donc toutes ses dérivées en 0 sont nulles. Donc
$$\langle T\,,\varphi\rangle = \int_{|x|<1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_f\,,\varphi\rangle.$$
   Donc $T_{|\mathbb{R}^*} = T_f$.
3. Dans cette question on considère $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui satisfait la condition (2) avec $n = 1$. Identifier la distribution T dans ce cas.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle T\,,\varphi\rangle = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
   car $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ se prolonge continuement par $\varphi'(0)$ en 0 et est donc intégrable sur $[-1,1]$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,
$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle,\end{aligned}$$
   où on a utilisé l'imparité de la fonction inverse. Finalement, on a $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ dans ce cas.

Exercice 3 (Une fonction non prolongeable)**.** Soient $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ la distribution associée. Le but de l'exercice est de prouver qu'il n'existe pas de prolongement de T_f en une distribution sur $\mathbb{R}$. On va raisonner par l'absurde.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T_{|\mathbb{R}^*} = T_f$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(]0,2[)$ une fonction plateau sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\chi_n : x \mapsto \chi(nx)$.

1. Montrer que $\langle T\,,\chi_n\rangle \geqslant \frac{1}{2n}e^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b < 2$ et $\mathrm{supp}(\chi) \subset [a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \notin \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$, $\chi_n(x) = \chi(nx) = 0$. Donc $\mathrm{supp}(\chi_n) \subset \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right] \subset]0,2[$.
   Comme f et χ_n sont à valeurs positives et $\mathrm{supp}(\chi_n) \subset \mathbb{R}^*$, on a :
$$\langle T\,,\chi_n\rangle = \langle T_f\,,\chi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^*} f(x)\chi_n(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)\chi(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2n}e^{n^2},$$
   en utilisant la décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Obtenir une contradiction et conclure.
   Comme on a supposé que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supporté dans $[0,2]$,
$$|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant C\sum_{k=0}^{m} \|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme on a vu que χ_n est supporté dans $[0,2]$, on a en particulier que
$$\frac{1}{2n}e^{n^2} \leqslant \langle T\,,\chi_n\rangle \leqslant |\langle T\,,\chi_n\rangle| \leqslant C\sum_{k=1}^{m} \|\chi_n^{(k)}\|_\infty.$$

Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\chi_n^{(k)} : x \mapsto n^k \chi^{(k)}(nx)$ et donc $\|\chi_n^{(k)}\|_\infty = n^k \|\chi^{(k)}\|_\infty$. Ainsi, on a montré que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad e^{n^2} \leqslant 2C \sum_{k=0}^{m} n^{k+1} \|\chi^{(k)}\|_\infty.$$

C'est absurde par croissance comparée. On obtient une contradiction, donc il n'existe pas de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T_{|\mathbb{R}^*} = T_f$.

Exercice 4 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$f_n : x \longmapsto \ln\left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right), \qquad g_n : x \longmapsto \arctan(nx) \qquad \text{et} \qquad h_n : x \longmapsto \frac{1}{x - \frac{i}{n}}.$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On notera encore f_n, g_n et h_n les distributions associées.

1. Montrer qu'il existe f et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} f$ et $g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} g$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n, g_n et h_n sont continues donc L^1_{loc} et elle définissent donc bien des distributions.

   Étudions d'abord la convergence simple des suites (f_n) et (g_n). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 2\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0, \\ -\infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   Notons f (resp. g) la limite simple de (f_n) (resp. (g_n)) que l'on vient de calculer. Ces fonctions sont bien L^1_{loc} et définissent donc bien des éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f_n \,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

   On a $f_n\varphi \xrightarrow[n \to +\infty]{} f\varphi$ simplement presque partout sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$|f_n(x)| = \left|\ln\left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)\right| = \begin{cases} \ln\left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right) \leqslant \ln\left(x^2 + 1\right) & \text{si } x^2 + \frac{1}{n^2} \geqslant 1 \\ -\ln\left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right) \leqslant -\ln(x^2) & \text{si } x^2 + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 \end{cases}$$

   Donc $f_n\varphi$ est dominée par la fonction intégrable $x \mapsto |\varphi(x)|\left(\ln\left(x^2+1\right) + |\ln(x^2)|\right)$, indépendamment de n. Par convergence dominée on a donc

$$\langle f_n \,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f \,, \varphi \rangle.$$

   C'est valable pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} f$.
   De même, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite $(g_n\varphi)$ converge simplement vers $g\varphi$ et est dominée par la fonction intégrable $\frac{\pi}{2}|\varphi|$. Par convergence dominée on a donc

$$\langle g_n \,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle g \,, \varphi \rangle$$

   et $g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} g$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer h_n en fonction de f_n' et g_n'.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n et g_n sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier leurs dérivées dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ coïncident avec leurs dérivées au sens usuel (prop 1.4.2 du cours). On a alors :
$$f_n' : x \longmapsto \frac{2x}{x^2 + \frac{1}{n^2}} \qquad \text{et} \qquad g_n' : x \longmapsto \frac{n}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{1}{n}}{x^2+\frac{1}{n^2}}.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n(x) = \frac{1}{x - \frac{i}{n}} = \frac{x + \frac{i}{n}}{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} f_n'(x) + i g_n'(x).$$
Donc $h_n = \frac{1}{2} f_n' + i g_n'$.
3. En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T que l'on exprimera en fonction de distributions connues.
Par continuité de la dérivation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a $f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} f'$ et $g_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} g'$, voir prop. 1.7.7 du cours. D'après la question 2, on a donc $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \frac{1}{2}f' + ig' := T$. Il reste à déterminer f' et g'. On a $f : x \mapsto 2\ln(|x|)$, l'exemple 1.4.7 du cours dit que $f' = 2\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$. Par ailleurs les fonctions g et $\pi\big(H - \frac{1}{2}\big)$, où H est la fonction de Heaviside, sont égales presque partout sur $\mathbb{R}$, donc $g = \pi\big(H - \frac{1}{2}\big)$ dans L^1_{loc} et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Donc $g' = \pi H' = \pi\delta_0$. Finalement, $T = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) + i\pi\delta_0$.

Exercice 5 (Changement de variable)**.** Soit $\gamma : I \to J$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, on définit $\gamma_* : \mathcal{D}(I) \to \mathcal{D}(J)$ par $\gamma_* : \varphi \mapsto \varphi \circ \gamma^{-1}$. Proposer une manière d'étendre γ_* en un isomorphisme continu d'inverse continu de $\mathcal{D}'(I)$ vers $\mathcal{D}'(J)$. Exprimer ensuite $(\gamma_* T)'$ en fonction de T', pour tout $T \in \mathcal{D}'(I)$.
Remarquons que $\gamma_* : \mathcal{D}(I) \to \mathcal{D}(J)$ est bien défini, linéaire, et inversible d'inverse $(\gamma_*)^{-1} = (\gamma^{-1})_*$. Montrons que cet isomorphisme est bicontinu. Si $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}(I)$ alors il existe $K \subset I$ contenant les supports de (φ_n). Les $(\gamma_*\varphi_n)$ sont alors à supports dans le compact $\gamma(K)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\gamma_*\varphi_n)^{(k)} = \big(\varphi_n \circ \gamma^{-1}\big)^{(k)}$. En appliquant la règle de la chaine de façon répétée, cette dérivée k-ième est une combinaison linéaire de termes de la forme : $\varphi_n^{(j)} \circ \gamma^{-1}$ avec $j \leqslant k$, multiplié par un produit de dérivées de γ^{-1}. Sur le compact $\gamma(K)$ les dérivées de γ^{-1} sont bornées, et $\|\varphi_n^{(j)} \circ \gamma^{-1}\|_\infty = \|\varphi_n^{(j)}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $j \leqslant k$. On en déduit que $\|(\gamma_*\varphi_n)^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Finalement, $\gamma_*\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}(J)$. Donc γ_* est continu. De même son inverse γ_*^{-1} est continu.
Si $f \in \mathcal{D}(I)$ alors $\gamma_* f = f \circ \gamma^{-1}$ est bien défini et dans $\mathcal{D}(J)$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$,
$$\int_J \gamma_* f(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_J f\big(\gamma^{-1}(y)\big)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_I f(x)\varphi(\gamma(x))|\gamma'(x)|\,\mathrm{d}x = \langle T_f \,, |\gamma'|\varphi\circ\gamma\rangle.$$
Pour $T \in \mathcal{D}'(I)$, cela suggère de poser $\gamma_* T : \varphi \mapsto \langle T\,, |\gamma'|\varphi\circ\gamma\rangle$ de $\mathcal{D}(J)$ vers $\mathbb{C}$, afin que $\gamma_* T_f = T_{\gamma_* f}$ lorsque $f \in \mathcal{D}(I)$.
Vérifions que $\gamma_* T$ définit un élément de $\mathcal{D}'(J)$. C'est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(J)$. De plus c'est la composée de $\gamma_*^{-1} : \mathcal{D}(J) \to \mathcal{D}(I)$, de la multiplication par la fonction $|\gamma'|$ de $\mathcal{D}(I)$ dans lui-même et de $T : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$. Ces trois applications étant continues, c'est aussi le cas de $\gamma_* T$, donc $\gamma_* T \in \mathcal{D}'(J)$. Notons que pour que la multiplication par $|\gamma'|$ soit bien définie et continue de $\mathcal{D}(I)$ dans lui-même il faut que γ' soit $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas, ce qui est bien le cas vu que γ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. La définition ci-dessus de $\gamma_* T$ pour $T \in \mathcal{D}'(I)$ définit une application linéaire $\gamma_* : \mathcal{D}'(I) \to \mathcal{D}'(J)$. On vérifie sur la formule que cette application est continue : si $\langle T_n\,, \psi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T\,, \psi\rangle$ pour tout

$\psi \in \mathcal{D}(I)$ alors $\langle \gamma_* T_n \,, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle \gamma_* T \,, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$. On vérifie également que γ_* est inversible d'inverse $(\gamma_*)^{-1} = (\gamma^{-1})_*$. Finalement γ_* est bien un isomorphisme bicontinu de $\mathcal{D}'(I)$ vers $\mathcal{D}'(J)$.
Comme γ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre intervalles de $\mathbb{R}$ sa dérivée est de signe strict constant. Dans la suite, on note $\varepsilon = 1$ si γ' est strictement positive et $\varepsilon = -1$ si γ' est strictement négative. Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'(I)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$,

$$\begin{aligned} \langle (\gamma_* T)' \,, \varphi \rangle &= -\langle \gamma_* T \,, \varphi' \rangle = -\langle T \,, \varepsilon \gamma' \big(\varphi' \circ \gamma \big) \rangle = -\varepsilon \langle T \,, (\varphi \circ \gamma)' \rangle = \varepsilon \langle T' \,, \varphi \circ \gamma \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\gamma'} T' \,, |\gamma'| \varphi \circ \gamma \right\rangle = \left\langle \gamma_* \left(\frac{1}{\gamma'} T' \right) , \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc $(\gamma_* T)' = \gamma_*(\frac{1}{\gamma'} T')$.
On va vérifier que si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $S \in \mathcal{D}'(I)$ alors $\gamma_*(fS) = (\gamma_* f)(\gamma_* S)$. Cela montrera que $\gamma_*(\frac{1}{\gamma'} T') = \frac{1}{\gamma' \circ \gamma^{-1}} \gamma_*(T') = (\gamma^{-1})' \gamma_*(T')$, ce qui étend la formule valide pour les fonctions de $\mathcal{C}^1(I)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ on a bien :

$$\langle \gamma_*(fS) \,, \varphi \rangle = \langle S \,, f |\gamma'| \varphi \circ \gamma \rangle = \langle S \,, |\gamma'| (\gamma_* f \circ \gamma)(\varphi \circ \gamma) \rangle = \langle \gamma_* S \,, (\gamma_* f) \varphi \rangle = \langle (\gamma_* f)(\gamma_* S) \,, \varphi \rangle.$$