Université Paris-Saclay
2022 – 2023
Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Feuille 1 – Rappels et boite à outils

Notations. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

- Le *support* de $f : \Omega \to \mathbb{C}$, noté $\operatorname{supp}(f)$, est l'adhérence dans Ω de $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact. On note aussi $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
- Soit $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (modulo égalité presque partout) telles que $f_{|K} \in L^p(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où $f_{|K}$ est la restriction de f à K.
- On appelle *multi-indice* tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ sa *longueur*, et $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$. Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on note $x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$ et $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$.
- Soient $K \subset \Omega$ un compact et $f \in \mathcal{C}^l(\Omega)$, on note $N_{K,l}(f) = \sup\big\{|\partial^\alpha f(x)| \bigm| |\alpha| \leqslant l \text{ et } x \in K\big\}$.

Exercice 1 (Lemme de Hadamard)**.** Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \psi_\alpha(x). \tag{1}$$
2. Soit $l \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^{k+l}(\mathbb{R}^d)$, montrer que les $(\psi_\alpha)_{|\alpha|=k}$ sont $\mathcal{C}^l$ sur $\mathbb{R}^d$ et expliciter leurs dérivées.
3. Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ une boule fermée centrée en 0. Pour tout α de longueur $|\alpha| = k$, montrer que $N_{B,l}(\psi_\alpha) \leqslant N_{B,l}(\partial^\alpha f) \leqslant N_{B,k+l}(f)$.
4. Dans cette question on suppose que $d = 1$, de sorte que l'équation (1) se ré-écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) \frac{x^j}{j!} + x^k \psi_k(x).$$
On suppose que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à quelle condition a-t-on $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Exercice 2 (Inégalité de Hölder généralisée)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on munit $L^p(X, \mu)$ de sa norme d'espace de Banach $\|\cdot\|_p$ définie pour $f \in L^p(X, \mu)$ par :
$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < +\infty, \\ \inf\big\{M \geqslant 0 \bigm| |f(x)| \leqslant M \text{ pour presque tout } x \in X\big\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$
On rappelle l'*inégalité de Hölder* classique : soient $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, où p et $q \in [1, +\infty]$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(X, \mu)$, et de plus $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

1. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que pour tout $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$ on a $fg \in L^r(X, \mu)$ et $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

2. Dans cette question on suppose $\mu(X) < \infty$. Montrer que si $r \leqslant q$ alors $L^q(X,\mu) \subset L^r(X,\mu)$ et $\|f\|_r \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q(X,\mu)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Donner un contre-exemple à l'inclusion de la question 2 lorsque $\mu(X) = +\infty$.
4. Déduire de la question 2 que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3 (Continuité des translations dans L^p pour $p < +\infty$)**.** Soit $p \in [1,+\infty[$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de translation $\tau_a : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ par $\tau_a(f) : x \mapsto f(x-a)$. Le but de l'exercice est de prouver que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0. \tag{2}$$

1. Montrer que (2) est vrai lorsque $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.
2. Conclure grâce à la densité de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Définition (Convolution)**.** Soient f et g mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, si $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est L^1, on note $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$. La fonction $f*g$ est appelée la *convolée* de f et g.

Exercice 4 (Convolution : premiers exemples)**.** 1. Soient f et g mesurables et soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si $f*g(x)$ est bien défini, montrer que $g*f(x)$ est bien défini et que $g*f(x) = f*g(x)$.

2. Soient $a<b$ et $c<d$, on note $\mathbf{1}_{[a,b]}$ et $\mathbf{1}_{[c,d]}$ les fonctions indicatrices de $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement. Montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'expliciter.
3. Soient $a<b$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, montrer que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f$ est bien définie. Vérifier que $\mathbf{1}_{[a,b]} * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

Le résultat suivant donne un critère assurant que la convolée de deux fonctions f et g est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Il donne aussi un contrôle sur les normes L^p de $f*g$. On le prouvera dans plusieurs cas particuliers dans l'exercice 5. Le cas général fait l'objet de l'exercice 10.

Théorème 1 (Inégalité de Young)**.** *Soient p,q et $r \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$.*

Exercice 5 (Inégalité de Young, cas particuliers)**.** 1. Prouver le théorème 1 pour $p=q=r=1$.

2. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f*g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
3. Soient f,g et $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f*(g*h) = (f*g)*h$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
4. Prouver le théorème 1 lorsque $r=+\infty$. Montrer que $f*g$ est alors uniformément continue.
5. Prouver le théorème 1 lorsque $q=1$.

   Indication. Écrire $f*g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)^{\frac{1}{p}}g(y)^{\frac{p-1}{p}}\,\mathrm{d}y$ et utiliser l'inégalité de Hölder.

Exercice 6 (Support d'une convolée)**.** Soient A et $B \subset \mathbb{R}^d$, on note $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est compact et $B \subset \mathbb{R}^d$ est fermé, montrer que $A+B$ est fermé. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermés ?
2. Soient f et g deux fonctions mesurables telles que $f*g$ soit bien définie sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $x \notin \mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)$ alors $f*g(x) = 0$.
3. Si f ou g est à support compact, montrer que $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)$. Que se passe-t-il dans le cas général ?

Exercice 7 (Convolution et dérivation). 1. Soient $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial f*g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
3. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $f * g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter ses dérivées partielles.

Exercice 8 (Régularisation par convolution). Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:
$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\big(\tau_{\varepsilon y} f(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$
2. En déduire que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. Ce résultat apparait de façon cruciale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier pour les fonction L^1 dont la transformée de Fourier est L^1, avec φ égale à la gaussienne standard.

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose que φ est à support compact.

3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, montrer que la formule (3) est toujours valable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.
4. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément continue, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformément.
5. Soient $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. On suppose que $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Le résultat reste-t-il vrai pour $p = +\infty$?
6. En déduire que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 9 (Lemme de Riemann–Lebesgue). Le but de cet exercice est de prouver le lemme de Riemann–Lebesgue : pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0. \tag{4}$$

1. Prouver que (4) est valable pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. En déduire que (4) est valable pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 10 (Inégalité de Young, cas général — *facultatif*). 1. Établir l'*inégalité de Hölder à n termes* : soient $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$, soient $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$, alors $f_1 \cdots f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}$.

2. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On note p' et q' les exposants conjugués de p et q respectivement. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, vérifier que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad |f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{q'}} |g(y)|^{\frac{q}{p'}} \big(|f(x-y)|^p |g(y)|^q\big)^{\frac{1}{r}}.$$
En déduire l'inégalité : $\big(|f| * |g|\big)^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \big(|f|^p * |g|^q\big)$.
3. Établir le théorème 1 dans le cas général.

Exercice 11 (Construction d'une fonction-test par convolution — *facultatif*). Pour tout $a > 0$ on définit la fonction indicatrice normalisée H_a par
$$H_a : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de strictement positive telle que $\sum_{k\geqslant 0} a_k < +\infty$. On note $u_n = H_{a_0} * \cdots * H_{a_n}$. Le but de l'exercice est de prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction-test. On utilisera les notations suivantes :

- $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $D_r f : x \mapsto \frac{1}{r}(f(x) - f(x-r))$ pour toute fonction f et tout $r > 0$.

1. Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $r > 0$, montrer que $H_r * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ et que $(H_r * f)' = D_r f$.
2. Vérifier que u_1 est continue, positive, à support dans $[0, A_1]$ et d'intégrale 1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, positive, à support dans $[0, A_n]$ et d'intégrale 1.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a :
$$u_n^{(j)} = \big(D_{a_0} \circ \cdots \circ D_{a_{j-1}}\big)\big(H_{a_j} * \cdots * H_{a_n}\big).$$
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on $\|u_n'\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}$.

   Indication. Utiliser l'inégalité de Young.
6. Soient m et $n \geqslant 2$, montrer que $\|u_{n+m} - u_m\|_\infty \leqslant \frac{2}{a_0 a_1}(A_{m+n} - A_m)$. En déduire que (u_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u.
7. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n^{(j)})_{n\geqslant j+1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
8. Conclure que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x = 1$.