Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 2 – Fonctions-test, distributions, dérivées et ordre

Définition (Convergence dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact dans Ω. On rappelle que la topologie sur $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ est définie par le fait qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ si et seulement si :

- il existe $K \subset \Omega$ compact tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$;
- pour tout $l \in \{0, \dots, k\}$ on a $\|\varphi_n^{(l)} - \varphi^{(l)}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup sur Ω.

On utilisera cette définition dans les cas de $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}_0^0(\Omega)$.

Exercice 1 (Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)**.**

1. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\psi\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \psi\varphi$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $t \neq 0$ on pose $\varphi_t : x \mapsto \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$. Montrer que φ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$, vers une certaine fonction à déterminer.
3. (*facultatif*) Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$. Pour tout $t \neq 1$ on définit $\varphi_t : x \mapsto \varphi(xt)$ et $\psi_t = \frac{\varphi_t - \varphi}{t-1}$. Montrer que $\psi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $t \notin \{0,1\}$ et que $\psi_t \xrightarrow[t\to 1]{\mathcal{D}} \psi$.

Exercice 2 (Premiers exemples de distributions)**.** Montrer que les applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\varphi \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x$.
3. $\varphi \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$.

Exercice 3 (La valeur principale)**.** On rappelle la définition de la *valeur principale de* $\frac{1}{x}$:

$$\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Rappeler l'argument montrant que $\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, montrer que $\left\langle \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. La fonction $I : x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une distribution $T_I \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. Expliquer en quoi $\operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ peut être vu comme un prolongement de T_I en un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Un tel prolongement est-il unique ?
4. Existe-t-il un prolongement de T_I en une distribution sur $\mathbb{R}$ de la forme T_f avec $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$?

Exercice 4 (Parties finies)**.** Notons H la *fonction de Heaviside*, qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$, où pf se lit *partie finie*.

$$\begin{aligned} \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right) &: \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon), \\ \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) &: \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)$ et $\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$ définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.
2. Conjecturer puis démontrer des expressions plus simples des produits suivants dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

   (a) $x\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$, (b) $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$, (c) $x^2\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$, (d) $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)$.

3. (*facultatif*) Montrer que l'application linéaire suivante définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon).$$

   Déterminer des expressions plus simples des produits $x\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big)$ et $x^2\,\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x^2}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (Calculs de dérivées)**.** 1. Soit $f : x \mapsto \ln(|x|)$, calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Calculer la dérivée de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Calculer la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto H(x)\ln(x)$, où H est la fonction de Heaviside.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées successives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $x \mapsto \frac{x^n}{n!}H(x)$.

Exercice 6 (Une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas une distribution)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau valant 1 sur $[-1,1]$, supportée dans $[-2,2]$ et positive, on note $\varphi = \psi f$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction croissante, nulle sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et constante à 1 sur $[1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : x \mapsto \chi(nx)\varphi(x)$.

1. Comprendre ces fonctions sur un dessin, puis montrer que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Indication. On pourra utiliser sans démonstration que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré $2k$ tel que $f^{(k)} : t \mapsto t^{-2k}P_k(t)f(t)$. C'est une reformulation d'un fait établi dans les notes de cours lors de la preuve de 1.2.3.

2. Le sous-espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ est-il fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Soit E un supplémentaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit T la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \oplus E$ définie par :

$$T : g \longmapsto \begin{cases} \sum_{k\geqslant 1} e^k g\big(\frac{1}{k}\big) & \text{si } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \\ 0 & \text{si } g \in E. \end{cases}$$

3. Montrer que $\langle T\,, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
4. En déduire que T ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

Définition (Ordre d'une distribution)**.** Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on dit que T est *d'ordre fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact il existe $C_K \geqslant 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K,

$$|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant C_K \sum_{k=0}^{n} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_\infty.$$

Si T est d'ordre fini, on appelle *ordre* de T le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant la condition précédente. Sinon on dit que T est *d'ordre infini.*

Exercice 7 (Ordre d'une distribution)**.**

1. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, montrer que T_f est d'ordre 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\delta_0^{(n)}$ est une distribution d'ordre exactement n. En déduire l'ordre de la distribution définie à la question 3 de l'exercice 2.
3. Déterminer l'ordre de la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ étudiée dans l'exercice 3.

Définition (Mesure de Radon)**.** Une *mesure de Radon* sur $\mathbb{R}$ est une mesure borélienne μ qui est finie sur les compacts.

Une telle mesure μ définit une forme linéaire $I_\mu : \varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi \,\mathrm{d}\mu$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ avec les propriétés suivantes.

- *Positivité :* pour tout φ à valeurs positive, on a $I_\mu(\varphi) \geqslant 0$.
- *Continuité :* pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact, il existe $C_K \geqslant 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ à support dans K on ait $|I_\mu(\varphi)| \leqslant C_K \|\varphi\|_\infty$.

On admettra que cette notion de continuité équivaut à demander que $I_\mu : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ soit continue pour la topologie définie au début de cette feuille.

Théorème 1 (Riesz–Markov)**.** *Soit $\Psi : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire positive, alors il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\Psi = I_\mu$.*

Exercice 8 (Mesures de Radon et distributions d'ordre 0)**.** Soit $\mathcal{P} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant 0\}$, une forme linéaire $S : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ (pas nécessairement continue) est dite *positive* si $\forall \varphi \in \mathcal{P}$, $S(\varphi) \geqslant 0$.

1. Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, montrer que μ définit une distribution positive d'ordre 0.
2. Soit $S : \mathcal{P} \to [0, +\infty[$ telle que, $\forall f, g \in \mathcal{P}$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $S(f + \lambda g) = S(f) + \lambda S(g)$. Vérifier que S s'étend de manière unique en une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, encore notée S.

   Indication. On commencera par étendre S aux fonctions-test à valeurs réelles, en écrivant une telle fonction comme la différence de deux éléments de $\mathcal{P}$.
3. Montrer que cette extension S est une distribution d'ordre 0.
4. En déduire qu'il existe une unique mesure de Radon μ telle que $S = \mu$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soit T une distribution d'ordre 0, le but de l'exercice est de prouver qu'il existe un quadruplet $(\mu_j)_{0 \leqslant j \leqslant 3}$ de mesures de Radon telles que $T = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.

5. Vérifier que T s'étend uniquement en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathcal{P}$ on définit alors $T_0(f) = \sup\{\Re(\langle T\,,h\rangle) \mid h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), 0 \leqslant h \leqslant f\}$, montrer que $T_0(f) \in [0, +\infty[$.
6. Soient $f, g \in \mathcal{P}$ et $\lambda \geqslant 0$, montrer que $T_0(f + \lambda g) = T_0(f) + \lambda T_0(g)$. En déduire que T_0 s'étend en une distribution représentée par une mesure de Radon μ_0.
7. Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on définit $T_2(f) = T_0(f) - \Re(\langle T\,,f\rangle)$. Montrer que T_2 s'étend en une distribution représentée par une mesure de Radon μ_2.

8. En raisonnant de même sur la partie imaginaire de $\langle T\,, f\rangle$ pour $f \in \mathcal{P}$, montrer qu'il existe des mesures de Radon $(\mu_j)_{0\leqslant j\leqslant 3}$ telles que $T = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.
9. Le quadruplet $(\mu_j)_{0\leqslant j\leqslant 3}$ construit précédemment est-il unique ?
10. Soit $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, identifier des mesures $(\mu_j)_{0\leqslant j\leqslant 3}$ telles que $T_\rho = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.
11. Calculer la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$.