Feuille 2 – Fonctions-test, distributions, dérivées et ordre

Définition (Convergence dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact dans Ω. On rappelle que la topologie sur $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ est définie par le fait qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ si et seulement si :

- il existe $K \subset \Omega$ compact tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$;
- pour tout $l \in \{0,\dots,k\}$ on a $\|\varphi_n^{(l)} - \varphi^{(l)}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup sur Ω.

On utilisera cette définition dans les cas de $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}_0^0(\Omega)$.

Exercice 1 (Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)**.**

1. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\psi\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \psi\varphi$.

   Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact contenant les supports des $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion $\operatorname{supp}(\psi\varphi_n) \subset \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$. Donc la condition de support est vérifiée. Par ailleurs, comme $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$, on a $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc φ est nulle hors de K.
   Notons $f = \psi\varphi$ et $f_n = \psi\varphi_n$ pour $n \geqslant 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$, par la règle de Leibniz on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi^{(i)}(x)\psi^{(k-i)}(x)$$

   et une formule similaire pour chaque f_n. Donc

   $$\begin{aligned}\left|f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\varphi_n^{(i)}(x) - \varphi^{(i)}(x)\right)\psi^{(k-i)}(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left|\varphi_n^{(i)}(x) - \varphi^{(i)}(x)\right|\left|\psi^{(k-i)}(x)\right|.\end{aligned}$$

   Si $x \notin K$, chaque terme de la somme est nul. Sinon $\left|\psi^{(k-i)}(x)\right| \leqslant \left\|\psi^{(k-i)}\right\|_{\infty,K}$. Donc

   $$\left\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left\|\psi^{(k-i)}\right\|_{\infty,K}\left\|\varphi_n^{(i)} - \varphi^{(i)}\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Et donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} f$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $t \neq 0$ on pose $\varphi_t : x \mapsto \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}$. Montrer que φ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$, vers une certaine fonction à déterminer.

   Si φ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$ vers une fonction ψ, alors elle converge uniformément et donc simplement vers ψ. On doit donc avoir $\psi = \varphi'$.
   Soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Comme on s'intéresse au cas $t \to 0$, on peut se restreindre à considérer $t \in [-1, 1]$. Pour tout $t \in [-1, 1]$ on a $\operatorname{supp}(\varphi_t) \subset [-M-1, M+1]$, donc la condition de support est vérifiée.

Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [-1,1]$,

$$\left|\varphi_t^{(k)}(x) - (\varphi')^{(k)}(x)\right| = \frac{1}{|t|}\left|\varphi^{(k)}(x+t) - \varphi^{(k)}(x) - t\varphi^{(k+1)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{|t|}\frac{t^2}{2}\left\|\varphi^{(k+2)}\right\|_\infty,$$

où on a appliqué l'inégalité de Taylor–Lagrange entre x et $x+t$ à la fonction $\varphi^{(k)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc

$$\left\|\varphi_t^{(k)} - \varphi^{(k+1)}\right\|_\infty \leqslant |t|\left\|\varphi^{(k+2)}\right\|_\infty \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Finalement, on a bien $\varphi_t \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi'$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. (*facultatif*) Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$. Pour tout $t \neq 1$ on définit $\varphi_t : x \mapsto \varphi(xt)$ et $\psi_t = \frac{\varphi_t - \varphi}{t-1}$. Montrer que $\psi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $t \notin \{0,1\}$ et que $\psi_t \xrightarrow[t\to 1]{\mathcal{D}} \psi$.
   Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la fonction φ_t est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$, donc $\psi_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Soit $M \geqslant 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$, alors $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset \left[-\frac{M}{|t|}, \frac{M}{|t|}\right]$ si $t \neq 0$. Dans ce cas, on a $\mathrm{supp}(\psi_t) \subset \mathrm{supp}(\varphi_t) \cup \mathrm{supp}(\varphi) = [-K_t, K_t]$, où $K_t = \max(M, \frac{M}{|t|})$. Ainsi si $t \notin \{0,1\}$, on a bien $\psi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Notons que $\psi_0 = \varphi - \varphi(0)$ n'est à support compact que si $\varphi(0) = 0$.
   Pour montrer la convergence, on peut se restreindre à considérer $t \geqslant \frac{1}{2}$. Pour tout $t \geqslant \frac{1}{2}$ on a $K_t \leqslant 2M$ et donc $\mathrm{supp}(\psi_t) \subset [-2M, 2M]$. Calculons les dérivées de ψ et ψ_t. Par la règle de Leibniz, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{Id}^{(i)}(x)\varphi^{(1+k-i)}(x) = x\varphi^{(k+1)}(x) + k\varphi^{(k)}(x),$$

   et par ailleurs

$$\psi_t^{(k)}(x) = \frac{1}{t-1}\Big(\varphi_t^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\Big) = \frac{1}{t-1}\Big(t^k\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)\Big).$$

   On a donc

$$\begin{aligned}
\left|\psi_t^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)\right| &= \left|\frac{t^k\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)}{t-1} - x\varphi^{(k+1)}(x) - k\varphi^{(k)}(x)\right| \\
&= \left|\frac{t^k - 1}{t-1}\varphi^{(k)}(tx) + \frac{\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x) - (t-1)x\varphi^{(k+1)}(x)}{t-1} - k\varphi^{(k)}(x)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|t-1|}\left|\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x) - (tx-x)\varphi^{(k+1)}(x)\right| \\
&\quad + \left|\frac{t^k-1}{t-1}\right|\left|\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)\right| + \left|\frac{t^k-1}{t-1} - k\right||\varphi^{(k)}(x)|.
\end{aligned}$$

   Pour contrôler le premier terme, on applique Taylor–Lagrange pour $\varphi^{(k)}$ entre x et tx. On obtient :

$$\frac{1}{|t-1|}\left|\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x) - (tx-x)\varphi^{(k+1)}(x)\right| \leqslant x^2|t-1|\|\varphi^{(k+2)}\|_\infty.$$

   De même, pour le second terme,

$$\left|\frac{t^k-1}{t-1}\right|\left|\varphi^{(k)}(tx) - \varphi^{(k)}(x)\right| \leqslant |t^k - 1||x|\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty.$$

Enfin, pour le troisième terme :

$$\left|\frac{t^k-1}{t-1}-k\right||\varphi^{(k)}(x)| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{k-1} t^i - k\right| \|\varphi^{(k)}\|_\infty \leqslant \|\varphi^{(k)}\|_\infty \sum_{i=0}^{k-1} |t^i-1|.$$

Si $|x| \geqslant 2M$, alors $\left|\psi_t^{(k)}(x)-\psi^{(k)}(x)\right| = 0$. Sinon, les inégalités précédentes montrent que :

$$\left|\psi_t^{(k)}(x)-\psi^{(k)}(x)\right| \leqslant x^2|t-1|\|\varphi^{(k+2)}\|_\infty + |t^k-1||x|\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty + \|\varphi^{(k)}\|_\infty \sum_{i=0}^{k-1}|t^i-1|.$$

Donc

$$\left\|\psi_t^{(k)}-\psi^{(k)}\right\|_\infty \leqslant 4M^2|t-1|\|\varphi^{(k+2)}\|_\infty + 2M|t^k-1|\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty + \|\varphi^{(k)}\|_\infty \sum_{i=0}^{k-1}|t^i-1| \xrightarrow[t\to 1]{} 0.$$

Exercice 2 (Premiers exemples de distributions)**.** Montrer que les applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{x^2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

   Un argument rapide est de remarquer qu'il s'agit de la distribution T_f associée à la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ qui est $\mathbb{C}^0$ donc L^1_{loc}.

   À la main, soit K un compact, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans K on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_K f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

   Comme de plus l'application considérée est linéaire, c'est une distribution.

2. $\varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x$.

   Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$. Soit K un compact et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans K. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $K \subset [-M, M]$ et alors :

$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{\sqrt{M}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{M}\|\varphi\|_\infty.$$

   Donc on a bien défini une distribution.

3. $\varphi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$.

   Encore une fois, l'application considérée est bien linéaire. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset [-N, N]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K, on a :

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(n)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \|\varphi^{(n)}\|_\infty.$$

Exercice 3 (La valeur principale)**.** On rappelle la définition de la *valeur principale de* $\frac{1}{x}$:

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Rappeler l'argument montrant que $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a :
   $$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   Soit $\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. Pour tout $x > M$, $\psi(x) = 0$, donc ψ est bien intégrable sur $[\varepsilon, +\infty[$. Par ailleurs,
   $$\psi(x) = \frac{1}{x}(\varphi(x)-\varphi(-x)) = \frac{1}{x}\big(\varphi(0) + x\varphi'(0) - \varphi(0) + x\varphi'(0) + o(x)\big) = 2\varphi'(0) + o(1).$$
   Donc ψ se prolonge continuement par $2\varphi'(0)$ en 0, et ψ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc
   $$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   Cela prouve que $\big\langle \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi\big\rangle$ est bien défini. De plus cette expression est linéaire en φ.
   Soit $M \geqslant 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$ on a :
   $$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| = \left|\int_0^M \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^M \frac{|\varphi(x)-\varphi(-x)|}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [0, M]$, $|\varphi(x)-\varphi(-x)| \leqslant 2x\|\varphi'\|_\infty$ et donc
   $$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant 2M\|\varphi'\|_\infty,$$
   ce qui prouve que $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, montrer que $\big\langle \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi\big\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, son support est un compact disjoint de $\{0\}$, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}\backslash]-\eta, \eta[$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \eta[$, on a :
   $$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\geqslant\eta} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   On obtient la formule voulu en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans le terme de gauche.
3. La fonction $I : x \mapsto \frac{1}{x}$ définit une distribution $T_I \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. Expliquer en quoi $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ peut être vu comme un prolongement de T_I en un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Un tel prolongement est-il unique ?
   La fonction I est continue donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^*$ et donc $T_I \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.
   On a une inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, obtenue en prolongeant les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ par 0 en 0. Cette inclusion est continue, au sens où : si $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ alors cette convergence est aussi vraie dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et elle se restreint donc en une forme linéaire continue $T_{|\mathbb{R}^*}$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.
   La question 2 montre que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, $\big\langle \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi\big\rangle = \langle T_I, \varphi\rangle$. Donc $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)_{|\mathbb{R}^*} = T_I$. En ce sens $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ prolonge T_I en une distribution sur $\mathbb{R}$.
   Un tel prolongement n'est pas unique : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$,
   $$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \delta_0, \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle + \langle \delta_0, \varphi\rangle = \langle T_I, \varphi\rangle + \varphi(0) = \langle T_I, \varphi\rangle.$$
   Donc $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) + \delta_0$ est un autre prolongement de T_I à $\mathbb{R}$.

4. Existe-t-il un prolongement de T_I en une distribution sur $\mathbb{R}$ de la forme T_f avec $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$?
On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $(T_f)_{|\mathbb{R}^*} = T_I$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, on a :

$$\langle T_f\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^*} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^*} f_{|\mathbb{R}^*}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{f_{|\mathbb{R}^*}}\,, \varphi\rangle.$$

Donc $T_I = (T_f)_{|\mathbb{R}^*} = T_{(f_{|\mathbb{R}^*})}$. Or $f_{|\mathbb{R}^*} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^*)$, donc $f_{|\mathbb{R}^*} = I$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^*)$, par injectivité de $g \mapsto T_g$. Finalement $f_{|\mathbb{R}^*} = I$ presque partout sur $\mathbb{R}^*$, donc $f(x) = \frac{1}{x}$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Cela contredit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Parties finies)**.** Notons H la *fonction de Heaviside*, qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$, où pf se lit *partie finie*.

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right) &: \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon),\\
\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) &: \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)$ et $\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$ définissent des distributions sur $\mathbb{R}$.
Ces deux applications sont bien linéaires en φ. Soit $M > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $[-M, M]$. Pour tout $\varepsilon \in \,]0, M[$, on a $\int_\varepsilon^M \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(M) - \ln(\varepsilon)$, donc

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(M)\\
&= \int_{\varepsilon}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(M).
\end{aligned}$$

Comme φ est continue et $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \varphi'(0)$, la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ est intégrable sur $[0, M]$. Donc

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{0}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(M).$$

Cela montre que $\langle \mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)\,, \varphi\rangle$ est bien défini. Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in [0, M]$, $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant x\|\varphi'\|_\infty$. Donc,

$$\left|\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant \int_0^M \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \mathrm{d}x + |\varphi(0)\ln(M)| \leqslant |\ln(M)|\|\varphi\|_\infty + M\|\varphi'\|_\infty,$$

ce qui montre que $\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Remarque. On peut traiter le cas de $\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$ de même, en remplaçant l'inégalité des accroissements finis par l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 2. On présente ci-dessous une méthode alternative utilisant le lemme de Hadamard (voir l'exercice 1 de la feuille 1). On aurait pu utiliser cette méthode alternative pour traiter le cas de $\mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)$ ou celui de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ dans l'exercice 3.

Soit $M > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $[-M, M]$. Par le lemme de Hadamard, il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x). \tag{i}$$

Rappelons qu'en général $\psi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que

$$\|\psi\|_{\infty,[-M,M]} = N_{[-M,M],0}(\psi) \leqslant N_{[-M,M],2}(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty. \tag{ii}$$

Pour tout $\varepsilon \in \left]0, M\right[$, on a alors

$$\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \frac{\varphi(0)}{x^2} + \frac{\varphi'(0)}{x} + \psi(x)\,\mathrm{d}x = 2\varphi(0)\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{M}\right) + \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme ψ est continue donc intégrable sur $[-M, M]$, on a donc

$$\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = -2\frac{\varphi(0)}{M} + \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M} \psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -2\frac{\varphi(0)}{M} + \int_{-M}^{M} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cela montre que $\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle$ est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle\right| &= \left|-2\frac{\varphi(0)}{M} + \int_{-M}^{M} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{M}\|\varphi\|_\infty + 2M\|\psi\|_\infty \\ &\leqslant \left(\frac{2}{M} + 2M\right)(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi''\|_\infty),\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Conjecturer puis démontrer des expressions plus simples des produits suivants dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

   (a) $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, (c) $x^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, (d) $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right)$.

   Comme vu dans l'exercice 3, on veut penser à $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ comme une extension de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en une distribution sur $\mathbb{R}$. N'étant pas L^1_{loc}, elle ne définit pas un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on doit ruser pour définir $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Néanmoins il est naturel de conjecturer que $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{1}$.
   Les distributions parties finies sont construites sur le même principe, en utilisant un procédé de renormalisation pour étendre des fonctions non localement L^1 en des distributions. On s'attend donc à avoir $x^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathbf{1}$ et $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right) = H$.
   Le cas 2b est un peu plus subtil. On voudrait penser à $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ comme à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, mais malheureusement celle-ci ne définit pas une distribution. Néanmoins on peut espérer que $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\left\langle x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle \mathbf{1}, \varphi\rangle.$$

   Donc $x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{1}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme conjecturé.

   (b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\left\langle x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle.$$

   Donc $x\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (c) D'après les deux cas précédents, $x^2\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{1}$.

(d) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x}\right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle H, \varphi\rangle.$$

3. (*facultatif*) Montrer que l'application linéaire suivante définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon).$$

Déterminer des expressions plus simples des produits $x \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ et $x^2 \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
De nouveau, l'expression est bien linéaire est φ. Soit $M > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-M, M]$, on repart de l'expression (i) donnée par le lemme de Hadamard. Pour tout $\varepsilon \in \,]0, M[$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^{M} \frac{\varphi(0)}{x^2} + \frac{\varphi'(0)}{x} + \psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln(\varepsilon)\\ &= \int_\varepsilon^{M} \psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{M} + \varphi'(0)\ln(M)\\ &\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_0^{M} \psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{M} + \varphi'(0)\ln(M).\end{aligned}$$

Donc $\left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi \right\rangle$ est bien défini et

$$\left|\left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi \right\rangle\right| = \left|\int_0^{M} \psi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{M} + \varphi'(0)\ln(M)\right| \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{M} + |\ln(M)|\|\varphi'\|_\infty + M\|\psi\|_\infty.$$

En utilisant la majoration (ii), on obtient $\left|\left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi \right\rangle\right| \leqslant \left(\frac{1}{M} + |\ln(M)| + M\right) \sum_{i=0}^{2} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$.
Donc $\operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ définit bien une distribution.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\left\langle x \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \varphi(0)\ln(\varepsilon) = \left\langle \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Donc $x \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) = \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et, par le cas 2d, $x^2 \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) = x \operatorname{pf}\left(\frac{H}{x}\right) = H$.

Exercice 5 (Calculs de dérivées). 1. Soit $f : x \mapsto \ln(|x|)$, calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
On a bien $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$. On s'attend donc à ce que $T_f' = \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. De fait, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x|} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soient ε et M tels que $0 < \varepsilon < M$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$, alors

$$\int_{\varepsilon < |x|} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon < |x| \leqslant M} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-M}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^{M} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme ln et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, M]$ on peut intégrer par parties.

$$\int_\varepsilon^{M} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x)\varphi(x)\big]_\varepsilon^M - \int_\varepsilon^{M} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\varphi(\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

De même,

$$\int_{-M}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \big[\ln(-x)\varphi(x)\big]_{-M}^{-\varepsilon} - \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\begin{aligned}-\int_{\varepsilon<|x|} \ln(|x|)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \ln(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)) &= \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon\ln(\varepsilon)) \\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

Donc $T_f' = \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ comme annoncé.

2. Calculer la dérivée de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   En se basant sur ce qu'il se passe pour les fonctions, on peut espérer que $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)' = -\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$. Vérifions que c'est le cas. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi \right\rangle = -\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi' \right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   On intègre par parties sur $]-\infty, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, +\infty[$. C'est possible car φ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ y sont $\mathcal{C}^1$ et car φ est à support compact. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \\ = \int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)+O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

   Finalement $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)' = -\,\mathrm{pf}\big(\frac{1}{x^2}\big)$.

3. Calculer la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto H(x)\ln(x)$, où H est la fonction de Heaviside.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle (H\ln)', \varphi \rangle = -\langle H\ln, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}-\int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -[\ln(x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(\varepsilon)\varphi(0) + O(\varepsilon\ln(\varepsilon)) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

   Donc $(H\ln)' = \mathrm{pf}\big(\frac{H}{x}\big)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées successives dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $x \mapsto \frac{x^n}{n!}H(x)$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la distribution associée à la fonction L^1_{loc} définie par $x \mapsto \frac{x^n}{n!}H(x)$. Pour $n = 0$, on a $T_0 = H$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Donc $T_0' = H' = \delta_0$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T_0^{(k)} = \delta_0^{(k-1)} : \varphi \mapsto (-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle T_n' \,, \varphi\rangle = -\langle T_n \,, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^n}{n!}\varphi(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ = \langle T_{n-1} \,, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $T_n' = T_{n-1}$. Par récurrence, on en déduit que $T_n^{(k)} = T_{n-k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. En recollant ceci avec la formule obtenue pour les dérivées de T_0, on a pour tout n et $k \in \mathbb{N}$:

$$T_n^{(k)} = \begin{cases} T_{n-k} & \text{si } k \leqslant n, \\ T_0^{(k-n)} = \delta_0^{(k-n-1)} & \text{si } k \geqslant n+1. \end{cases}$$

Exercice 6 (Une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas une distribution)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau valant 1 sur $[-1, 1]$, supportée dans $[-2, 2]$ et positive, on note $\varphi = \psi f$. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction croissante, nulle sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et constante à 1 sur $[1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : x \mapsto \chi(nx)\varphi(x)$.

1. Comprendre ces fonctions sur un dessin, puis montrer que $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Indication. On pourra utiliser sans démonstration que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré $2k$ tel que $f^{(k)} : t \mapsto t^{-2k}P_k(t)f(t)$. C'est une reformulation d'un fait établi dans les notes de cours lors de la preuve de 1.2.3.

   Par construction, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \operatorname{supp}(\psi) \cap \operatorname{supp}(f) \subset [0, 2]$. Donc $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \subset [0, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela règle la question de l'uniformité du support.
   Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \big(\chi(n\cdot)\big)^{(k-i)}(x)\varphi^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i}\chi^{(k-i)}(nx)\varphi^{(i)}(x)$$

   et donc

$$\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x) = (\chi(nx) - 1)\varphi^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^{k-i}\chi^{(k-i)}(nx)\varphi^{(i)}(x). \tag{iii}$$

   Comme φ et χ sont nulles sur $]-\infty, 0]$, cette expression s'annule pour $x \leqslant 0$. Par ailleurs χ est constante à 1 sur $[1, +\infty[$, donc si $x \geqslant \frac{1}{n}$, $\chi(nx) = 1$ et les $\chi^{(k-i)}(nx)$ s'annulent pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Donc (iii) est nulle si $x \in \mathbb{R}\backslash]0, \frac{1}{n}[$.
   Si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ alors

$$\left|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| \leqslant |\chi(nx) - 1||\varphi^{(k)}(x)| + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^{k-i}|\chi^{(k-i)}(nx)||\varphi^{(i)}(x)|$$

donc

$$\left\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \|\varphi^{(k)}\|_{\infty,[0,\frac{1}{n}]} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} n^{k-i} \|\chi^{(k-i)}\|_\infty \|\varphi^{(i)}\|_{\infty,[0,\frac{1}{n}]} \tag{iv}$$

Sur $[0, \frac{1}{n}] \subset [0, 1]$, on a $\varphi = f$. Soit $i \in \{0, \dots, k\}$, suivant l'indication, pour tout $x \in]0, \frac{1}{n}]$ on écrit

$$n^{k-i}|\varphi^{(i)}(x)| = n^{k-i}|f^{(i)}(x)| = n^{k-i}\frac{|P_i(x)|}{x^{2i}} f(x) \leqslant \frac{\|P_i\|_{\infty,[0,1]}}{x^{k+i}} f(x) = \|P_i\|_{\infty,[0,1]} x^{-k-i} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme $x^{-k-i}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on a également $\sup_{0<x\leqslant\frac{1}{n}} x^{-k-i}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc

$$n^{k-i}\|\varphi^{(i)}\|_{\infty,[0,\frac{1}{n}]} \leqslant \|P_i\|_{\infty,[0,1]} \sup_{0<x\leqslant\frac{1}{n}} x^{-k-i}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En réinjectant ces relations dans l'inégalité (iv), on obtient bien que $\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[n\to 0]{} 0$.

2. Le sous-espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ est-il fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

   La fonction χ est nulle sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \leqslant \frac{1}{2n}$ on a donc $\chi(nx) = 0$ et $\varphi_n(x) = 0$. Comme par ailleurs, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \subset [0, 2]$, on a $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset [\frac{1}{2n}, 2] \subset \mathbb{R}^*$. Donc $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Remarque. Cette convergence n'a pas lieu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ car la condition d'uniformité du support n'est pas satisfaite par la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$.

   On raisonne par l'absurde. Si $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ était un sous-espace fermé de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on aurait $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ et donc $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \in]0, 1]$, $\varphi(x) = f(x) > 0$, donc $]0, 1] \subset \operatorname{supp}(\varphi)$. Comme le support est fermé $0 \in \operatorname{supp}(\varphi)$, ce qui est la contradiction recherchée. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit E un supplémentaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit T la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \oplus E$ définie par :

$$T : g \longmapsto \begin{cases} \sum_{k\geqslant 1} e^k g\left(\frac{1}{k}\right) & \text{si } g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*) \\ 0 & \text{si } g \in E. \end{cases}$$

3. Montrer que $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [\frac{1}{n}, 1]$, on a $\chi(nx) = 1$ et $\psi(x) = 1$, donc $\varphi_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Comme φ_n est à valeurs positives, on a :

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \sum_{k\geqslant 1} e^k \varphi_n\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} e^k \varphi_n\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} e^k e^{-k} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

4. En déduire que T ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

   Par l'absurde, si T définissait une distribution on aurait :

$$\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

   par continuité et la question 1. En particulier, $(\langle T, \varphi \rangle_n)_{n\geqslant 1}$ serait bornée, ce qui contredit le résultat de la question 3.

Définition (Ordre d'une distribution)**.** Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on dit que T est *d'ordre fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact il existe $C_K \geqslant 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K,

$$|\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant C_K \sum_{k=0}^{n} \left\| \varphi^{(k)} \right\|_\infty.$$

Si T est d'ordre fini, on appelle *ordre* de T le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant la condition précédente. Sinon on dit que T est *d'ordre infini.*

Exercice 7 (Ordre d'une distribution)**.**

1. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, montrer que T_f est d'ordre 0.

   Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K on a :

   $$|\langle T_f\,, \varphi\rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

   Donc T_f est d'ordre 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\delta_0^{(n)}$ est une distribution d'ordre exactement n. En déduire l'ordre de la distribution définie à la question 3 de l'exercice 2.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $|\langle \delta_0^{(n)}\,, \varphi\rangle| = |\langle \delta_0\,, \varphi^{(n)}\rangle| = |\varphi^{(n)}(0)| \leqslant \|\varphi^{(n)}\|_\infty$, indépendamment d'un compact contenant le support de φ. Donc $\delta_0^{(n)}$ est d'ordre au plus n. Pour montrer que $\delta_0^{(n)}$ est d'ordre exactement n, il faut maintenant montrer qu'on ne peut en général pas contrôler $|\langle \delta_0\,, \varphi^{(n)}\rangle| = |\varphi^{(n)}(0)|$ par $\sum_{k=0}^{n-1} \|\varphi^{(k)}\|_\infty$.
   Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire, et δ_0 est bien d'ordre 0. Soit $n \geqslant 1$, supposons par l'absurde que δ_0 est d'ordre inférieur ou égal à $n-1$. Alors il existe C tel que

   $$|\varphi^{(n)}(0)| \leqslant C \sum_{k=0}^{n-1} \|\varphi^{(k)}\|_\infty,$$

   pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supporté dans $[-1, 1]$.
   Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on définit $\psi_j : x \mapsto \psi(jx)$. Alors $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset [-1, 1]$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\psi_j^{(k)} : x \mapsto j^k \psi^{(k)}(jx)$. On obtient donc

   $$j^n |\psi^{(n)}(0)| = |\psi_j^{(n)}(0)| \leqslant C \sum_{k=0}^{n-1} \|\psi_j^{(k)}\|_\infty = C \sum_{k=0}^{n-1} j^k \|\psi^{(k)}\|_\infty,$$

   pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. En divisant de part et d'autre par j^n, on obtient $|\psi^{(n)}(0)| = O\!\left(\frac{1}{j}\right)$ lorsque $j \to +\infty$ et donc $\psi^{(n)}(0) = 0$. Il reste à vérifier qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supporté dans $[-1, 1]$ et telle que $\psi^{(n)}(0) \neq 0$, ce qui donnera la contradiction recherchée et montrera que $\delta_0^{(n)}$ est d'ordre exactement n.
   Il suffit de prendre $\psi : x \mapsto x^n \chi(x)$, où χ est une fonction plateau à support dans $[-1, 1]$ et constante à 1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Alors $\psi^{(n)} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \chi^{(n-k)}(x)$ et $\psi^{(n)}(0) = n!$.
   Dans la preuve précédente, 0 ne joue aucun rôle particulier, et on montre de même que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_a^{(n)}$ est d'ordre exactement n. La distribution 3 de l'exercice 2 est $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n^{(n)}$. Supposons par l'absurde que T soit d'ordre fini $N \in \mathbb{N}$. Il existerait alors $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $\left[N + \frac{1}{2}, N + \frac{3}{2}\right]$,

   $$\left| \left\langle \delta_{N+1}^{(N+1)}\,, \varphi \right\rangle \right| = \left| \varphi^{(N+1)}(N+1) \right| = |\langle T\,, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{n=0}^{N} \|\varphi^{(n)}\|_\infty.$$

Cela implique que $\delta_{N+1}^{(N+1)}$ est d'ordre $\leqslant N$ ce qui est absurde. Donc T est d'ordre infini.

3. Déterminer l'ordre de la distribution $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ étudiée dans l'exercice 3.

   Dans la solution de la question 1 de l'exercice 3 on a montré que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supporté dans $[-M, M]$ on a :

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant 2M\|\varphi'\|_\infty,$$

   ce qui prouve que $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ est d'ordre $\leqslant 1$. Si $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ était d'ordre 0, il existerait $C \geqslant 0$ tel que

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant C\|\varphi\|_\infty$$

   pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $[-2, 2]$.

   Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, croissante, impaire et constante à 1 sur $[1, +\infty[$. Pour obtenir une telle fonction, on considère une primitive F d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ paire, positive et à support dans $[-1, 1]$ (bref une bosse). Alors $\psi = \frac{F - F(0)}{F(1) - F(0)}$ convient. Un choix possible d'un tel f est

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau (en particulier à valeurs dans $[0, 1]$) paire, à support dans $[-2, 2]$ et constante à 1 sur $[-1, 1]$. On pose $\psi_k : x \mapsto \psi(kx)\chi(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est impaire, positive sur $\mathbb{R}_+$, à support dans $[-2, 2]$ et bornée par 1. On a donc :

$$\begin{aligned} C \geqslant C\|\psi_k\|_\infty \geqslant \left|\int_0^{+\infty} \frac{\psi_k(x) - \psi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\psi_k(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{\psi(kx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ \geqslant 2\int_1^k \frac{\psi(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_1^k \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \ln(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

   C'est absurde. Donc $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ est d'ordre 1 exactement.

Définition (Mesure de Radon)**.** Une *mesure de Radon* sur $\mathbb{R}$ est une mesure borélienne μ qui est finie sur les compacts.

Une telle mesure μ définit une forme linéaire $I_\mu : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\mu$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ avec les propriétés suivantes.

- *Positivité :* pour tout φ à valeurs positive, on a $I_\mu(\varphi) \geqslant 0$.
- *Continuité :* pour tout $K \subset \mathbb{R}$ compact, il existe $C_K \geqslant 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ à support dans K on ait $|I_\mu(\varphi)| \leqslant C_K\|\varphi\|_\infty$.

On admettra que cette notion de continuité équivaut à demander que $I_\mu : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ soit continue pour la topologie définie au début de cette feuille.

Théorème 1 (Riesz–Markov)**.** *Soit $\Psi : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire positive, alors il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\Psi = I_\mu$.*

Exercice 8 (Mesures de Radon et distributions d'ordre 0)**.** Soit $\mathcal{P} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant 0\}$, une forme linéaire $S : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ (pas nécessairement continue) est dite *positive* si $\forall \varphi \in \mathcal{P}$, $S(\varphi) \geqslant 0$.

1. Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, montrer que μ définit une distribution positive d'ordre 0.
   L'intégration contre μ définit une forme linéaire I_μ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On définit donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par restriction :
   $$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle \mu\,, \varphi \rangle = I_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$
   On peut déduire sa continuité de la continuité de I_μ et de celle de l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On peut aussi raisonner directement. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supporté dans K :
   $$|\langle \mu\,, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right| \leqslant \int_K |\varphi(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \mu(K)\|\varphi\|_\infty.$$
   Ceci montre que μ définit une distribution d'ordre 0.
   Si $\varphi \in \mathcal{P}$ alors $\langle \mu\,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$. Donc cette distribution est bien positive.
2. Soit $S : \mathcal{P} \to [0, +\infty[$ telle que, $\forall f, g \in \mathcal{P}$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $S(f + \lambda g) = S(f) + \lambda S(g)$. Vérifier que S s'étend de manière unique en une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, encore notée S.

   Indication. On commencera par étendre S aux fonctions-test à valeurs réelles, en écrivant une telle fonction comme la différence de deux éléments de $\mathcal{P}$.

   On raisonne par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe une extension de S en une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs complexes, on a :
   $$S(f) = S(\Re(f) + i\Im(f)) = S(\Re(f)) + iS(\Im(f)).$$
   Donc l'extension est uniquement déterminée par sa valeur sur les fonctions à valeurs réelles.
   Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, suivant l'indication on veut écrire f comme différence de deux fonctions de $\mathcal{P}$, disons $f = g - h$ avec $g, h \in \mathcal{P}$. Cela impose $g \geqslant g - h = f$ et $h = g - f$. Soit donc $g \in \mathcal{P}$ tel que $g \geqslant f$, alors $g - f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est à valeurs positives donc dans $\mathcal{P}$. On a donc :
   $$S(f) = S(g - (g - f)) = S(g) - S(g - f),$$
   où S est évaluée sur des fonctions de $\mathcal{P}$ dans le terme de droite. Cela prouve l'unicité d'une éventuelle extension de S et donne le seul candidat potentiel pour être l'extension recherchée.
   Passons à la synthèse. On définit $\widetilde{S} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ de la façon suivante :
   - si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles, $\widetilde{S}(f) = S(g) - S(g - f)$ pour tout $g \in \mathcal{P}$ tel que $g \geqslant f$;
   - si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est à valeurs complexes, $\widetilde{S}(f) = S(\Re(f)) + iS(\Im(f))$.

   Vérifions que $\widetilde{S}$ est bien définie. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, il existe $g \in \mathcal{P}$ tel que $g \geqslant f$, par exemple $g = \|f\|_\infty \chi$ où $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ est une fonction-plateau constante à 1 sur le support de f. Montrons que $\widetilde{S}(f)$ ne dépend pas du choix de g. Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{P}$ tels que $g_1 \geqslant f$ et $g_2 \geqslant f$, on a
   $$S(g_1) + S(g_2 - f) = S(g_1 + g_2 - f) = S(g_2) + S(g_1 - f)$$
   où on a uniquement utilisé les propriétés de S sur $\mathcal{P}$. Cette égalité se ré-écrit sous la forme $S(g_1) - S(g_1 - f) = S(g_2) - S(g_2 - f)$. Donc $\widetilde{S}(f)$ est bien définie, indépendamment du choix de g. L'extension aux fonctions à valeurs complexes ne posent pas de problème.
   Vérifions que $\widetilde{S}$ est une extension de S. Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a $\widetilde{S}(f) = S(f) - S(0) = S(f)$, où on a utilisé que $S(0) = 0S(0) = 0$. Donc $\widetilde{S}$ prolonge bien S, en particulier $\widetilde{S}$ est positive.

Il reste à vérifier la linéarité, en commençant par le cas réel. Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Soit g_1 et $g_2 \in \mathcal{P}$ tels que $g_1 \geqslant f_1$ et $g_2 \geqslant f_2$. On a alors $g_1 + g_2 \geqslant f_1 + f_2$ et donc :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(f_1 + f_2) &= S(g_1 + g_2) - S(g_1 + g_2 - f_1 - f_2) = S(g_1) + S(g_2) - (S(g_1 - f_1) + S(g_2 - f_2)) \\ &= \widetilde{S}(f_1) + \widetilde{S}(f_2),\end{aligned}$$

où cette fois encore on utilise uniquement les propriétés de S sur $\mathcal{P}$. En particulier, on aura $\widetilde{S}(f) + \widetilde{S}(-f) = \widetilde{S}(0) = 0$ et donc $\widetilde{S}(-f) = -\widetilde{S}(f)$ pour tout f à valeurs réelles. Pour conclure que $\widetilde{S}$ est $\mathbb{R}$-linéaire en restriction aux fonctions-test à valeurs réelles, il suffit de vérifier que $\widetilde{S}(\alpha f) = \alpha \widetilde{S}(f)$ pour tout $\alpha \geqslant 0$ et f à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est bien le cas. En effet, si $g \in \mathcal{P}$ domine f alors $\alpha g \in \mathcal{P}$ domine αf puisque $\alpha \geqslant 0$. Donc

$$\widetilde{S}(\alpha f) = S(\alpha g) - S(\alpha g - \alpha f) = \alpha S(g) - S(\alpha(g - f)) = \alpha(S(g) - S(g - f)) = \alpha \widetilde{S}(f).$$

Soient maintenant $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on décompose ces trois termes en parties réelles et imaginaires : $f = f_1 + i f_2$, $g = g_1 + i g_2$ et $\lambda = \alpha + i\beta$. En utilisant la $\mathbb{R}$-linéarité en restriction aux fonctions à valeurs réelles, on a alors :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(f + \lambda g) &= \widetilde{S}\big(f_1 + \alpha g_1 - \beta g_2 + i(f_2 + \beta g_1 + \alpha g_2)\big) \\ &= \widetilde{S}(f_1 + \alpha g_1 - \beta g_2) + i\widetilde{S}(f_2 + \beta g_1 + \alpha g_2) \\ &= \widetilde{S}(f_1) + \alpha \widetilde{S}(g_1) - \beta \widetilde{S}(g_2) + i\Big(\widetilde{S}(f_2) + \beta \widetilde{S}(g_1) + \alpha \widetilde{S} g_2\Big) \\ &= \widetilde{S}(f) + \lambda \widetilde{S}(g)\end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{S}$ est bien une forme $\mathbb{C}$-linéaire positive sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui étend S.

3. Montrer que cette extension S est une distribution d'ordre 0.

   Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact, on note $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau sur K (i.e. χ est à valeurs dans $[0, 1]$ et constante à 1 sur K). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \chi(x)$. Donc $\|\varphi\|_\infty \chi - \varphi \in \mathcal{P}$, donc

$$\|\varphi\|_\infty S(\chi) - S(\varphi) = S(\|\varphi\|_\infty \chi - \varphi) \geqslant 0,$$

   et donc $S(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\infty S(\chi)$. En considérant $\varphi + \|\varphi\|_\infty \chi \in \mathcal{P}$, on obtient $S(\varphi) \geqslant -\|\varphi\|_\infty S(\chi)$ par la même méthode. Ainsi $|S(\varphi)| \leqslant S(\chi)\|\varphi\|_\infty$. La constance $S(\chi) \geqslant 0$ dépend de K mais pas de φ, on a donc bien montré que S est une distribution d'ordre 0.

4. En déduire qu'il existe une unique mesure de Radon μ telle que $S = \mu$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   On sait que S définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La stratégie est d'étendre S en une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour pouvoir appliquer le théorème représentation de Riesz–Markov (thm. 1). Pour étendre S à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on voudrait utiliser le théorème de prolongement des applications linéaires continues à valeurs dans un Banach, rappelé ci-dessous.

   Théorème 2. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Soit $\phi : D \to F$ une application linéaire continue d'un sous-espace dense D de E vers F, où la densité de D et la continuité de ϕ sont au sens de la topologie normée de E. Alors il existe un unique prolongement continu $\Phi : E \to F$ de ϕ.*

   Malheureusement on ne peut pas appliquer le théorème 2 dans le cas qui nous intéresse, car $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas un espace normé. En fait, la topologie sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ définie précédemment n'est pas métrisable, de même que la topologie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Une subtilité à noter est que $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, mais que cette norme définit une topologie strictement moins fine que celle qui nous intéresse. En effet, on ne peut pas traduire la condition d'uniformité du support d'une suite convergente en terme de $\|\cdot\|_\infty$. Une dernière remarque est que $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet, ce qui explique pourquoi on considère la topologie définie au début de cette feuille, qui elle est sympathique.

Revenons au problème d'étendre S à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction-test positive, d'intégrale 1, à support dans $[-1,1]$. On note $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1]$. Soient $M \geqslant 0$ et $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ supportée dans $[-M,M]$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, la fonction $\varphi_\varepsilon * f$ est $\mathcal{C}^\infty$ (feuille 1, exercice 7), à support dans $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) + \operatorname{supp}(f) \subset [-M-1, M+1]$ (feuille 1, exercice 6), et $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ uniformément sur $\mathbb{R}$ (feuille 1, exercice 8, question 4). Si de plus f est à valeurs positives alors c'est aussi le cas de $\varphi_\varepsilon * f$, car on a choisi un noyau φ positif.

On a montré que, pour tout $M \geqslant 0$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ supportée dans $[-M,M]$, il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à supports dans $[-M-1, M+1]$ tels que $\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{C}_0} f$. Si de plus $f \geqslant 0$, on peut supposer que $\psi_n \in \mathcal{P}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset [-M,M]$. Soit (ψ_n) une suite comme ci-dessus. Comme S est une distribution d'ordre 0, il existe $C_M \geqslant 0$ telle que $|\langle S\,,\varphi\rangle| \leqslant C_M\|\varphi\|_\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-M-1, M+1]$. En particulier, pour tout $m,n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle S\,,\psi_n\rangle - \langle S\,,\psi_m\rangle| = |\langle S\,,\psi_m - \psi_n\rangle| \leqslant C_M\|\psi_m - \psi_n\|_\infty.$$

Comme (ψ_n) converge uniformément vers f, elle est de Cauchy uniforme. L'inégalité précédente montre alors que la suite $\left(\langle S\,,\psi_n\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace complet $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Donc $\langle S\,,\psi_n\rangle$ converge vers une limite que l'on note $\langle S\,,f\rangle \in \mathbb{C}$.

Vérifions que $\langle S\,,f\rangle$ ne dépend ni de M ni de (ψ_n). Soient $\widetilde{M} \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset [-\widetilde{M}, \widetilde{M}]$ et $(\widetilde{\psi}_n)$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[-\widetilde{M}-1, \widetilde{M}+1]$ qui converge uniformément vers f. Notons $N = \max(M+1, \widetilde{M}+1)$. En utilisant le fait que S est une distribution d'ordre 0 avec le compact $[-N,N]$, on a :

$$\left|\langle S\,,\psi_n\rangle - \langle S\,,\widetilde{\psi}_n\rangle\right| \leqslant C_N\|\psi_n - \widetilde{\psi}_n\|_\infty \leqslant C_N\Big(\|\psi_n - f\|_\infty + \|\widetilde{\psi}_n - f\|_\infty\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\langle S\,,f\rangle$ est bien défini, au sens où ce complexe ne dépend que de f. De plus, si f est à valeurs positives, on peut choisir (ψ_n) formée d'éléments de $\mathcal{P}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle S\,,\psi_n\rangle \geqslant 0$, et donc $\langle S\,,f\rangle \geqslant 0$ en passant à la limite.

L'extension ainsi définie est bien linéaire. En effet, soient $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g) \subset [-M,M]$. Soient (ψ_n) et (χ_n) des suites d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à supports dans $[-M-1, M+1]$ qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Alors $(\psi_n + \lambda\chi_n)$ converge uniformément vers $f + \lambda g$ et donc

$$\langle S\,,f+\lambda g\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle S\,,\psi_n + \lambda\chi_n\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle S\,,\psi_n\rangle + \lambda\langle S\,,\chi_n\rangle = \langle S\,,f\rangle + \lambda\langle S\,,g\rangle.$$

Finalement, l'extension est continue. Soit $M \geqslant 0$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ à support dans $[-M,M]$ il existe (ψ_n) comme précédemment. On utilise le fait que S est une distribution d'ordre 0 avec le compact $[-M-1, M+1]$. Il existe $C_M \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle S\,,\psi_n\rangle| \leqslant C_M\|\psi_n\|_\infty.$$

En passant à la limite de part et d'autre on obtient $|\langle S\,,f\rangle| \leqslant C_M\|f\|_\infty$.

Faisons le bilan. On a montré qu'une distribution S d'ordre 0 s'étend en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On se convaincra que cette extension est unique. De plus, si la distribution S est positive, alors son extension l'est aussi.

Remarque. De la même manière, si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est d'ordre au plus k, on peut l'étendre de manière unique est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$.

L'extension de S est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Par le thm. 1, il existe donc une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{S} = I_\mu$. En restreignant ces deux applications à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on obtient $S = \mu$ comme attendu.

Soit T une distribution d'ordre 0, le but de l'exercice est de prouver qu'il existe un quadruplet $(\mu_j)_{0 \leqslant j \leqslant 3}$ de mesures de Radon telles que $T = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.

5. Vérifier que T s'étend uniquement en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathcal{P}$ on définit alors $T_0(f) = \sup\{\Re(\langle T, h\rangle) \mid h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), 0 \leqslant h \leqslant f\}$, montrer que $T_0(f) \in [0, +\infty[$.
Comme T est d'ordre 0, on l'étend uniquement en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ comme à la question 4. Considérant cette extension, la définition de T_0 à bien du sens.
Comme $f \in \mathcal{P}$, elle est minorée par la fonction nulle. Donc $T_0(f) \geqslant \Re(\langle T, 0\rangle) = 0$.
Comme $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, elle est supporté dans un compact K. Comme T est d'ordre 0, il existe C_K telle que $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_K \|\varphi\|_\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans K. Pour tout $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, si $0 \leqslant h \leqslant f$ alors $\operatorname{supp}(h) \subset \operatorname{supp}(f) \subset K$. Donc
$$\Re(\langle T, h\rangle) \leqslant |\Re(\langle T, h\rangle)| \leqslant |\langle T, h\rangle| \leqslant C_K \|h\|_\infty \leqslant C_K \|f\|_\infty.$$
Donc $\langle T_0, f\rangle \leqslant C_K \|f\|_\infty < +\infty$.

6. Soient $f, g \in \mathcal{P}$ et $\lambda \geqslant 0$, montrer que $T_0(f + \lambda g) = T_0(f) + \lambda T_0(g)$. En déduire que T_0 s'étend en une distribution représentée par une mesure de Radon μ_0.
On remarque que si $\lambda = 0$ il n'y a rien à faire. Dans la suite on suppose donc que $\lambda > 0$. Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ tels que $0 \leqslant h_1 \leqslant f$ et $0 \leqslant h_2 \leqslant g$. Alors $h = h_1 + \lambda h_2 \leqslant f + \lambda g$ et on a :
$$\Re(\langle T, h_1\rangle) + \lambda \Re(\langle T, h_2\rangle) = \Re(\langle T, h\rangle) \leqslant T_0(f + \lambda g).$$
En passant au sup sur $0 \leqslant h_1 \leqslant f$ et $0 \leqslant h_2 \leqslant g$ on obtient que $T_0(f) + \lambda T_0(g) \leqslant T_0(f + \lambda g)$.
Soit $h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ tel que $0 \leqslant h \leqslant f + \lambda g$. On note $h_1 = \min(h, f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $h_2 = \frac{1}{\lambda}(h - h_1)$, de sorte que $h = h_1 + \lambda h_2$. Comme $h \geqslant h_1$ on a $h_2 \geqslant 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, si $h(x) \leqslant f(x)$ alors $h_1(x) = h(x)$ et $h_2(x) = 0 \leqslant g(x)$. Si $h(x) \geqslant f(x)$ alors $h_1(x) = f(x)$ et $h_2(x) = \frac{1}{\lambda}(h(x) - f(x)) \leqslant g(x)$. Au final, on a donc $h_2 \leqslant g$. Donc
$$\Re(\langle T, h\rangle) = \Re(\langle T, h_1\rangle) + \lambda \Re(\langle T, h_2\rangle) \leqslant T_0(f) + \lambda T_0(g).$$
En passant au sup sur $0 \leqslant h \leqslant f + \lambda g$, on obtient $T_0(f) + \lambda T_0(g) \geqslant T_0(f + \lambda g)$, et donc l'égalité.
On a montré que $T_0 : \mathcal{P} \to [0, +\infty[$ satisfait les conditions de la question 2. Par les questions 2, 3 et 4, il existe donc une unique mesure de Radon μ_0 définissant une distribution qui étend T_0 à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (et en fait à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

7. Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on définit $T_2(f) = T_0(f) - \Re(\langle T, f\rangle)$. Montrer que T_2 s'étend en une distribution représentée par une mesure de Radon μ_2.
Soit $f \in \mathcal{P}$, comme $f \leqslant f$, on a $\Re(\langle T, f\rangle) \leqslant T_0(f)$ et donc $T_2(f) \geqslant 0$. Donc $T_2 : \mathcal{P} \to [0, +\infty[$.
Pour tout $f, g \in \mathcal{P}$ et $\lambda \geqslant 0$, on a :
$$\begin{aligned} T_2(f + \lambda g) &= T_0(f + \lambda g) - \Re(\langle T, f + \lambda g\rangle) = T_0(f) + \lambda T_0(g) - \Re(\langle T, f\rangle) - \lambda \Re(\langle T, g\rangle) \\ &= T_2(f) + \lambda T_2(g), \end{aligned}$$
où on a utilisé le résultat de la question 6 et la $\mathbb{R}$-linéarité de $\Re(\langle T, \cdot\rangle)$. Donc T_2 satisfait les hypothèses de la question 4 et, comme ci-dessus, T_2 s'étend en une unique distribution positive, uniquement représentée par une mesure de Radon μ_2.

8. En raisonnant de même sur la partie imaginaire de $\langle T\,,f\rangle$ pour $f \in \mathcal{P}$, montrer qu'il existe des mesures de Radon $(\mu_j)_{0\leqslant j\leqslant 3}$ telles que $T = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.

   On définit $T_1(f) = \sup\{\Im(\langle T\,,h\rangle) \mid h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), 0 \leqslant h \leqslant f\}$ et $T_3(f) = T_1(f) - \Im(\langle T\,,f\rangle)$ pour tout $f \in \mathcal{P}$. En remplaçant $\Re$ par $\Im$ dans la solution des questions 5, 6 et 7 on obtient que T_1 (resp. T_3) s'étend de manière unique en une distribution positive, qui est donc uniquement représentée par une mesure μ_1 (resp. μ_3).

   Il s'agit de vérifier que $T = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$. Pour tout $f \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}\langle T\,,f\rangle &= \Re(\langle T\,,f\rangle) + i\Im(\langle T\,,f\rangle) = T_0(f) - T_2(f) + i\big(T_1(f) - T_3(f)\big)\\ &= \langle \mu_0\,,f\rangle + i\langle \mu_1\,,f\rangle - \langle \mu_2\,,f\rangle - i\langle \mu_3\,,f\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,f\right\rangle,\end{aligned}$$

   où la seconde égalité est obtenue par définition de T_2 et T_3. Soit maintenant $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Comme vu dans la question 2, il existe $g \in \mathcal{P}$ tel que $g \geqslant f$, i.e. $g - f \in \mathcal{P}$, par le cas ci-dessus,

$$\langle T\,,f\rangle = \langle T\,,g\rangle - \langle T\,,g-f\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,g\right\rangle - \left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,g-f\right\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,f\right\rangle.$$

   On passe au cas $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes en écrivant :

$$\langle T\,,f\rangle = \langle T\,,\Re(f)\rangle + i\langle T\,,\Im(f)\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,\Re(f)\right\rangle + i\left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,\Im(f)\right\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j\,,f\right\rangle.$$

   Donc $T = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.

9. Le quadruplet $(\mu_j)_{0\leqslant j\leqslant 3}$ construit précédemment est-il unique ?

   Non, si on pose $\nu_j = \mu_j + \delta_0$ pour tout $j \in \{1,2,3,4\}$ on a aussi $T = \sum_{j=0}^{3} \nu_j$.

   Remarque. Pour obtenir l'unicité il faut imposer une condition supplémentaire disant que les supports de μ_0 et μ_2 sont disjoints, en un sens à préciser, et de même que les supports de μ_1 et μ_3 sont disjoints.

10. Soit $\rho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, identifier des mesures $(\mu_j)_{0\leqslant j\leqslant 3}$ telles que $T_\rho = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$.

    On peut décomposer ρ en parties réelle et imaginaire, puis chacune en parties positive et négative. On écrit de la sorte $\rho = \sum_{j=0}^{3} i^j \rho_j$ avec $\rho_j \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ à valeurs positives. Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_\rho\,,f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{3} i^j \int_{\mathbb{R}} \rho_j(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{3} i^j \langle \rho_j\,\mathrm{d}x\,,f\rangle.$$

    Il suffit donc de définir μ_j comme la mesure admettant la densité ρ_j par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$.

    Remarque. On voit ici, qu'il n'y a pas de différence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ entre la distribution T_f associée à la fonction positive $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ et la distribution associée à la mesure à densité $f\,\mathrm{d}x$. En particulier, $\mathrm{d}x = \mathbf{1}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

11. Calculer la dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$.
    Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \mathrm{d}x' \,, \varphi \rangle = -\langle \mathrm{d}x \,, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = [\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

car φ est à support compact. Donc $(\mathrm{d}x)' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. C'est rassurant vue la remarque précédente : on a $\mathrm{d}x = T_{\mathbf{1}}$, donc $(\mathrm{d}x)' = T_{\mathbf{1}}' = T_{\mathbf{1}'} = T_0 = 0$.