Feuille 3 – Équations, support et convergence au sens des distributions

Exercice 1 (Intégrales tronquées)**.** Soit (X, μ) un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties mesurables de X telle que $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que :

$$\forall f \in L^1(X, \mu), \qquad \int_{X\setminus A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Exercice 2 (Support d'une distribution)**.**

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f)$.
2. Déterminer le support de $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 3 (Équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Résoudre l'équation $x^2T = 1$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$2xT' - T = \delta_0. \tag{1}$$

On va d'abord considérer l'équation différentielle homogène associée :

$$2xT' - T = 0. \tag{2}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$).
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression plus simple de la distribution $x\delta_0^{(k+1)}$. En déduire l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ dont le support est $\{0\}$ et qui sont solutions de (2).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ entier.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (Support et produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on note $Z = f^{-1}(0)$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $fT = 0$, montrer que $\mathrm{supp}(T) \subset Z$.
2. Soient $K \subset U \subset \mathbb{R}$ avec K compact et U ouvert, montrer qu'il existe $\chi \in \mathcal{D}(U)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et constante à 1 sur un voisinage de K.

Dans la suite, on fixe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre 0 telle que $\mathrm{supp}(T) \subset Z$. L'objectif est de montrer que dans ce cas $fT = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note $K = \mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T)$.

3. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, montrer qu'il existe U_ε ouvert contenant K tel que $\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x)| \leqslant \varepsilon$.
4. Construire une famille de fonctions $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon\in\,]0,1]}$ telle que :
   - $\forall \varepsilon \in\,]0, 1]$, $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$ et $\langle T\,, (1 - \chi_\varepsilon) f\varphi\rangle = 0$;
   - $\langle T\,, \chi_\varepsilon f\varphi\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.
5. Conclure que $fT = 0$.
6. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas que T est d'ordre 0 ?

Exercice 6 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Montrer que les suites de distributions définies par les formules suivantes convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ et déterminer leur limite.

1. $e_n : x \mapsto e^{inx}$.
2. $A_n = n^{100} e_n$.
3. $B_n : x \mapsto \cos^2(nx)$.
4. $C_n : x \mapsto n \sin(nx) H(x)$, où H est la fonction de Heaviside.
5. $D_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\frac{k}{n}}$.
6. $E_n = n\Big(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\Big)$.
7. $F_n = e_n \, \mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

   Indication. Pour la cas 7, on pourra utiliser sans démonstration que $\int_0^R \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \xrightarrow[R \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Définition (Translations)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, on rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\tau_a(\varphi) : x \mapsto \varphi(x-a)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit $\tau_a(T)$ par la relation $\langle \tau_a(T) \, , \varphi \rangle = \langle T \, , \tau_{-a}(\varphi) \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Translations et dérivation)**.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{1}{a}(T - \tau_a(T)) \xrightarrow[a \to 0]{\mathcal{D}'} T'$.

Définition (Dual topologique)**.** Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(\mathbb{R})'$ l'espace des formes linéaires continues sur $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Cet espace est muni de la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|_p$.

Définition (Convergence faible dans L^p)**.** On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R})$ *converge faiblement* vers $f \in L^p(\mathbb{R})$ si : $\forall \Phi \in L^p(\mathbb{R})'$, $\Phi(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(f)$. On note alors $f_n \rightharpoonup f$.

On rappelle les théorèmes importants suivants, qui serviront dans l'exercice 8.

Théorème 1 (Théorème de représentation)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on note $I_f \in L^q(\mathbb{R})'$ la forme linéaire $I_f : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$.*

- *L'application $I : f \mapsto I_f$ de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})'$ est isométrique, en particulier injective.*
- *Si $q < +\infty$ alors I est surjective.*

Théorème 2 (Banach–Steinhaus)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit A une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si $\forall x \in E$ $\sup_{\phi \in A} \|\phi(x)\|_F < +\infty$ alors $\sup_{\phi \in A} \|\phi\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.*

Exercice 8 (Convergence faible et convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)**.** Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de comparer les notions de convergence faible et de convergence au sens des distributions pour la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Si $f_n \rightharpoonup f \in L^p(\mathbb{R})$, montrer que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} f$ et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.
2. On suppose que $p \in \,]1, +\infty[$. Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$ et s'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} T$, montrer qu'il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $T = T_f$ et que $f_n \rightharpoonup f$.
3. Toujours dans le cas $p \in \,]1, +\infty[$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'} 0$ et qui ne converge pas faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$.
4. Dans le cas $p = 1$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge au sens des distributions mais pas faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'exercice suivant est adapté de l'examen partiel de 2021.

Exercice 9 (Une distribution d'ordre 2)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ on définit $T_n : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par

$$T_n : \varphi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \ln(n)\varphi'(0).$$

1. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que T_n est une distribution d'ordre 1 exactement.
2. Déterminer le support de T_n, pour tout $n \geqslant 2$.
3. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre inférieur ou égal à 2 telle que $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$.

   Indication. On rappelle qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, appelé *constante d'Euler–Mascheroni*, tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer le support de T.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à prouver que T est d'ordre 2 exactement. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction plateau sur $[-1,1]$, i.e. χ est à valeurs dans $[0,1]$ et est constante à 1 sur $[-1,1]$. On définit $\varphi_k : x \mapsto \frac{1}{k}\chi(x)\sin(kx)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que les suites $(\|\varphi_k\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ et $(\|\varphi_k'\|_\infty)_{k\geqslant 1}$ sont bornées.
6. En utilisant la formule de Taylor–Lagrange pour sin en 0, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in \{1, \cdots, n-1\}, \qquad \left| \sum_{j=k+1}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{j}\right) - \ln(n) + \ln(k) \right| \leqslant C.$$

   Indication. On pourra vérifier que $\sum_{j>k} \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
7. Montrer que la suite $\big(\langle T\,, \varphi_k\rangle + \ln(k)\big)_{k\geqslant 1}$ est bornée.
8. En conclure que T est d'ordre 2.