Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 5 – Distributions en plusieurs variables

Exercice 1 (Intégrabilité des puissances de $|x|$)**.** Soit $B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 1\right\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_B |x|^\alpha \,\mathrm{d}x < +\infty$ si et seulement si $\alpha > -2$.

   On passe en coordonnées polaires pour se ramener à une intégrale en une variable :

   $$\int_B |x|^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^\alpha r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 r^{\alpha+1}\,\mathrm{d}r.$$

   La dernière intégrale est finie si et seulement si $\alpha + 1 > -1$, c'est-à-dire $\alpha > -2$.

2. La fonction $x = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{|x|^3}$ est-elle dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$?

   Cette fonction est continue donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. S'il y a un problème c'est donc en 0. On va montrer que la fonction n'est pas intégrable sur B, par un changement de variable polaire.

   $$\int_B \left|\frac{x_1}{|x|}\right| \mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{r|\cos(\theta)|}{r^3} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi} |\cos(\theta)|\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\right) = +\infty.$$

Exercice 2 (Le retour de la valeur principale)**.** Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $B_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < \varepsilon\right\}$. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$T : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrer que $\psi : x = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{|x|^3}\big(\varphi(x_1, x_2) - \varphi(-x_1, x_2)\big)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

   Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R$. Hors de B_R, la fonction ψ est nulle. Par ailleurs, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il s'agit donc de vérifier l'intégrabilité au voisinage de 0. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in B_R$ on a

   $$|\psi(x)| = \frac{|x_1|}{|x|^3}|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(-x_1, x_2)| \leqslant \frac{2|x_1|^2}{|x|^3}\|\partial_1\varphi\|_\infty \leqslant 2\|\partial_1\varphi\|_\infty \frac{1}{|x|},$$

   par le théorème des accroissements finis. D'après l'exercice 1, le terme de droite est intégrable sur $B \cap B_R$, donc ψ aussi. Finalement $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2. En déduire que T définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Elle est appelée *valeur principale* de $\frac{x_1}{|x|^3}$.

   La question 2 de l'exercice 1 montre que $x \mapsto \frac{x_1}{|x|^3}$ n'est pas L^1_{loc}. Comme dans le cas de $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$, c'est un phénomène de symétrie qui permet d'effacer la singularité pour définir T.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrons que $\langle T\,,\varphi\rangle$ est bien défini. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\varepsilon} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1<0}} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1>0}} \frac{x_1}{|x|^3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1>0}} \frac{x_1}{|x|^3}\big(\varphi(x_1,x_2)-\varphi(-x_1,x_2)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\substack{|x|>\varepsilon\\ x_1>0}} \psi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

car ψ est intégrable. Donc $\langle T\,,\varphi\rangle$ est bien défini. De plus, cette expression est linéaire en φ. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ compact et soit $R > 0$ tel que $K \subset B_R$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$, on a en utilisant la majoration de la question 1 :

$$|\langle T\,,\varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\substack{|x|<R\\ x_1>0}} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\|\partial_1\varphi\|_\infty \int_{\substack{|x|<R\\ x_1>0}} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x = \|\partial_1\varphi\|_\infty \int_{B_R} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x.$$

L'intégrale dans le dernier terme est finie par l'exercice 1 (en fait elle vaut $2\pi R$). Donc T est une distribution d'ordre au plus 1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Calculs de dérivées)**.** On définit des formes linéaires T et T^+ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par :

$$T : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad T^+ : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T et T^+ définissent des distributions sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, disons supportée dans $[-R,R]^2$, alors $t \mapsto \varphi(t,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et supportée dans $[-R,R]$. En particulier, cette seconde fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc T et T^+ sont bien définies, et linéaires.

   Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ compact et soit $R > 0$ tel que $K \subset [-R,R]^2$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$, on a :

   $$\begin{aligned}|\langle T\,,\varphi\rangle| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2R\|\varphi\|_\infty,\\ \left|\langle T^+\,,\varphi\rangle\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^R |\varphi(t,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant R\|\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

   Donc T et T^+ sont deux distributions d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

   Remarque. Comme en dimension 1, les mesures de Radon sont exactement les distributions positives. Notons $i : t \mapsto (t,t)$ l'injection diagonale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Si on note μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, par définition de la mesure image on a :

   $$\langle i_*\mu\,,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}i_*\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\circ i(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t)\,\mathrm{d}t = \langle T\,,\varphi\rangle.$$

   Et de même T^+ est le poussé-en-avant par i de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $\partial_1 T + \partial_2 T$ et $\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on calcule :

   $$\langle \partial_1 T + \partial_2 T\,,\varphi\rangle = \langle \partial_1 T\,,\varphi\rangle + \langle \partial_2 T\,,\varphi\rangle = -\langle T\,,\partial_1\varphi\rangle - \langle T\,,\partial_2\varphi\rangle = -\langle T\,,\partial_1\varphi + \partial_2\varphi\rangle.$$

Notons $i : t \mapsto (t,t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi \circ i)'(t) = d_{i(t)}\varphi \cdot i'(t) = d_{(t,t)}\varphi \cdot (1,1) = \partial_1\varphi(t,t) + \partial_2\varphi(t,t).$$

Donc

$$\langle \partial_1 T + \partial_2 T \,, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \partial_1\varphi(t,t) + \partial_2\varphi(t,t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ i)'(t)\, \mathrm{d}t = [\varphi \circ i]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Ainsi, on obtient que $\partial_1 T + \partial_2 T = 0$. Pour T^+, le même calcul que précédemment mène à

$$\langle \partial_1 T^+ + \partial_2 T^+ \,, \varphi \rangle = -\langle T^+ \,, \partial_1\varphi + \partial_2\varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} (\varphi \circ i)'(t)\, \mathrm{d}t = \varphi(i(0)) = \varphi(0,0).$$

On obtient donc $\partial_1 T + \partial_2 T = \delta_0$.

3. Notons $D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 \geqslant |x_1|\right\}$ et $\mathbf{1}_D$ sa fonction indicatrice, calculer $\partial_1 \mathbf{1}_D - \partial_2 \mathbf{1}_D$.
On a $\mathbf{1}_D \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Comme cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et localement constante sur $\mathbb{R}^2 \backslash \partial D$, on sait déjà que ses dérivées sont supportées sur ∂D. Cette fois on va traiter séparément $\partial_1 \mathbf{1}_D$ et $\partial_2 \mathbf{1}_D$, au moins dans un premier temps. Pour calculer $\partial_1 \mathbf{1}_D$, on coupe D en tranches horizontales : $D = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 \geqslant 0, -x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_2\right\}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a alors :

$$\begin{aligned}\langle \partial_1 \mathbf{1}_D \,, \varphi \rangle &= -\langle \mathbf{1}_D \,, \partial_1\varphi \rangle = -\int_D \partial_1\varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{x_2=0}^{+\infty} \left(\int_{x_1=-x_2}^{x_2} \partial_1\varphi(x_1,x_2)\, \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi(x_2,x_2) - \varphi(-x_2,x_2)\, \mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(-t,t)\, \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour calculer $\partial_2 \mathbf{1}_D$, on suit le même schéma en découpant D en tranches verticales :

$$\begin{aligned}\langle \partial_2 \mathbf{1}_D \,, \varphi \rangle &= -\int_D \partial_2\varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{x_1 \in \mathbb{R}} \left(\int_{x_2=|x_1|}^{+\infty} \partial_2\varphi(x_1,x_2)\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1,|x_1|)\, \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x_1,x_1)\, \mathrm{d}x_1 + \int_{\mathbb{R}_-} \varphi(x_1,-x_1)\, \mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(-t,t)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\langle \partial_1 \mathbf{1}_D - \partial_2 \mathbf{1}_D \,, \varphi \rangle = -2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t)\, \mathrm{d}t = -2\langle T^+ \,, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et donc $\partial_1 \mathbf{1}_D - \partial_2 \mathbf{1}_D = -2T^+$.

4. Calculer $\partial_1^2 \mathbf{1}_D - \partial_2^2 \mathbf{1}_D$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
En utilisant les questions 2 et 3, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_1^2 \mathbf{1}_D - \partial_2^2 \mathbf{1}_D &= \left(\partial_1^2 - \partial_2^2\right) \mathbf{1}_D = (\partial_1 + \partial_2)(\partial_1 - \partial_2)\mathbf{1}_D = (\partial_1 + \partial_2)(\partial_1 \mathbf{1}_D - \partial_2 \mathbf{1}_D) \\ &= -2(\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+) = -2\delta_0.\end{aligned}$$

Exercice 4 (Mesure uniforme sur la sphère)**.** Soit γ la restriction à $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ de la mesure gaussienne standard, i.e. γ admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu = \pi_* \gamma$ où $\pi : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$ est la projection radiale.

1. Montrer que μ définit une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$.

   Comme π est continue, elle est mesurable de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$ équipés de leurs tribus boréliennes. Par définition de la mesure-image, $U \subset \mathbb{R}^d$ est μ-mesurable si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est γ-mesurable, i.e. borélien dans notre cas. Les boréliens de $\mathbb{R}^d$ sont donc μ-mesurables.

   Par ailleurs, $\mu(\mathbb{R}^d) = \gamma\big(\pi^{-1}(\mathbb{R}^d)\big) = \gamma\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big) = 1$. Donc μ est une mesure borélienne, positive et finie sur les compacts. C'est donc une mesure de Radon, et elle définit une distribution d'ordre 0 par $\langle \mu \,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$.

   Alternativement, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors $\varphi \circ \pi$ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et bornée par $\|\varphi\|_\infty$. Par définition de la mesure-image on a :

$$|\langle \mu \,, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi \circ \pi(x) \, \mathrm{d}\gamma(x) \right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \mathrm{d}\gamma(x) = \|\varphi\|_\infty.$$

2. Déterminer le support de μ.

   La mesure μ est la loi de $\frac{X}{|X|}$, où X est un vecteur gaussien centré réduit dans $\mathbb{R}^d$. C'est donc la mesure uniforme de probabilité uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Il est donc naturel que $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{S}^{d-1}$. Prouvons-le.

   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}$. Comme l'image de π est contenue dans $\mathbb{S}^{d-1}$, $\varphi \circ \pi = 0$. Alors,

$$\langle \mu \,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi \circ \pi(x) \, \mathrm{d}\gamma(x) = 0.$$

   Donc $\mu_{|\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}} = 0$ et $\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathbb{S}^{d-1}$.

   Dans la suite on note $B(x, R)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $R > 0$. Soit $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, montrons que $x \in \mathrm{supp}(\mu)$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une fonction-plateau $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et telle que $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon) \subset B(x, 2\varepsilon)$ et χ_ε est vaut 1 sur $B(x, \varepsilon)$. Comme χ_ε est à valeurs positives,

$$\begin{aligned}\langle \mu \,, \chi_\varepsilon \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\varepsilon(y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \chi_\varepsilon \circ \pi(x) \, \mathrm{d}\gamma(x) &\geqslant \int_{\pi^{-1}(B(x,\varepsilon))} \chi_\varepsilon \circ \pi(x) \, \mathrm{d}\gamma(x) \\ &\geqslant \gamma\big(\pi^{-1}(B(x, \varepsilon))\big).\end{aligned}$$

   Comme $B(x, \varepsilon)$ est un ouvert non-vide c'est aussi le cas de sa pré-image, π étant continue. Comme γ admet une densité positive par rapport à Lebesgue, $\gamma\big(\pi^{-1}(B(x, \varepsilon))\big) > 0$. Remarquons que $\pi^{-1}(B(x, \varepsilon))$ est le cône engendré par $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ (faire un dessin).

   Ainsi, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ on a construit une fonction $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ supportée dans $B(x, 2\varepsilon)$ et telle que $\langle \mu \,, \chi_\varepsilon \rangle > 0$. Donc μ n'est nulle en restriction à aucun voisinage de x, et $x \in \mathrm{supp}(\mu)$. Finalement, $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{S}^{d-1}$.

3. Existe-t-il $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = T_f$?

   Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = T_f$. On aurait alors

$$T_{(f_{|\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}})} = (T_f)_{|\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}} = \mu_{|\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

   Par injectivité de $g \mapsto T_g$ de $L^1_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}\big)$ vers $\mathcal{D}\big(\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}\big)$ on aurait alors f nulle sur $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^{d-1}$, c'est-à-dire presque partout sur $\mathbb{R}^d$. Mais alors $f = 0$, ce qui est absurde car $\mathrm{supp}(\mu) \neq \emptyset$.

L'exercice suivant est adapté de l'examen final de 2021.

Exercice 5 (Convolution de distributions)**.** Le but de l'exercice est de définir et d'étudier la convolée de deux distributions dont l'une est à support compact. On utilisera les notations suivantes.

- On note $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace des distributions à support compact.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on note $\check{\varphi} : z \mapsto \varphi(-z)$ et $\tau_x\varphi : z \mapsto \varphi(z-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T\,, \check{\varphi}\rangle$ et $\tau_x T : \varphi \mapsto \langle T\,, \tau_{-x}\varphi\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

1. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, montrer que $\operatorname{supp}(\check{\varphi}) = -\operatorname{supp}(\varphi)$ et $\operatorname{supp}(\tau_x\varphi) = x + \operatorname{supp}(\varphi)$. En déduire que $\operatorname{supp}(\check{T}) = -\operatorname{supp}(T)$ et $\operatorname{supp}(\tau_x T) = x + \operatorname{supp}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   Soit $z \in \mathbb{R}^d$, on a $\check{\varphi}(z) = \varphi(-z)$ donc $z \in \operatorname{supp}(\check{\varphi})$ si et seulement si $-z \in \operatorname{supp}(\varphi)$. Donc $\operatorname{supp}(\check{\varphi}) = -\operatorname{supp}(\varphi)$. De même, $z \in \operatorname{supp}(\tau_x\varphi)$ si et seulement si $z - x \in \operatorname{supp}(\varphi)$, c'est-à-dire $z \in x + \operatorname{supp}(\varphi)$. Donc $\operatorname{supp}(\tau_x\varphi) = x + \operatorname{supp}(\varphi)$.

   Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction-test telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap (-\operatorname{supp}(T)) = \emptyset$, alors $\operatorname{supp}(\check{\varphi}) \cap \operatorname{supp}(T) = \emptyset$ et donc $\langle \check{T}\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \check{\varphi}\rangle = 0$. Donc $\operatorname{supp}(\check{T}) \subset -\operatorname{supp}(T)$. Comme $S \mapsto \check{S}$ est une involution, on obtient également $\operatorname{supp}(T) \subset -\operatorname{supp}(\check{T})$, ce qui donne l'autre inclusion et prouve que $\operatorname{supp}(T) = -\operatorname{supp}(\check{T})$.

   Supposons maintenant que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap (x + \operatorname{supp}(T)) = \emptyset$, alors $\operatorname{supp}(\tau_{-x}\varphi) \cap \operatorname{supp}(T) = \emptyset$, et donc $\langle \tau_x T\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \tau_{-x}\varphi\rangle = 0$. On en déduit que $\operatorname{supp}(\tau_x T) \subset x + \operatorname{supp}(T)$. Comme τ_{-x} est l'application inverse de τ_x, on en déduit aussi que $\operatorname{supp}(T) \subset -x + \operatorname{supp}(\tau_x T)$ (pour τ_{-x} appliqué à $\tau_x T$). Cela donne l'inclusion inverse et donc $\operatorname{supp}(\tau_x T) = x + \operatorname{supp}(T)$.

2. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,
$$|\langle E\,, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha\varphi\|.$$

   Comme $\operatorname{supp}(E)$ est compact, il existe une fonction-plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp}(E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors $(1-\chi)\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est nulle au voisinage de $\operatorname{supp}(E)$. Donc
$$\langle E\,, \varphi\rangle = \langle E\,, \chi\varphi\rangle + \langle E\,, (1-\chi)\varphi\rangle = \langle E\,, \chi\varphi\rangle.$$

   En utilisant le fait que E est une distribution avec le compact $\operatorname{supp}(\chi)$, il existe $C' > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que
$$|\langle E\,, \chi\varphi\rangle| \leqslant C' \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha(\chi\varphi)\|_\infty$$

   On note $M = \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha\chi\|_\infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par la règle de Leibniz on a :
$$|\partial^\alpha(\chi\varphi)(x)| \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^{\alpha-\beta}\chi(x)\right| \left|\partial^\beta\varphi(x)\right| \leqslant M \left(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta}\right) \sum_{|\beta| \leqslant m} \|\partial^\beta\varphi\|_\infty.$$

   Finalement, les deux inégalités précédentes prouvent l'existence d'un $C > 0$ tel que
$$|\langle E\,, \varphi\rangle| = |\langle E\,, \chi\varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la *convolée* $\varphi * T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$\varphi * T : x \longmapsto \left\langle \tau_x \check{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle. \tag{1}$$

3. Montrer que $\varphi * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a :

$$\partial^\alpha(\varphi * T) = (\partial^\alpha \varphi) * T = \varphi * (\partial^\alpha T).$$

Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Notons $\psi : (x, y) \mapsto \varphi(x - y)$, de sorte que la convolée s'écrive $\varphi * T : x \mapsto \langle T, \psi(x, \cdot) \rangle$. On veut appliquer le théorème de dérivation sous le crochet. Pour cela il faudrait que $\psi(x, \cdot)$ soit supportée dans un compact K indépendant de x. Ce n'est malheureusement pas le cas, même si φ est à support compact. Pour pallier à ce problème on va se restreindre à considérer x dans la boule B_R de centre 0 et de rayon $R > 0$.

Il existe $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_M$. Soit $x \in B_R$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|y| > R + M$ on a $|y - x| > M$ et donc $\varphi(x - y) = 0$. Notons ψ_R la restriction de ψ à $B_R \times \mathbb{R}^d$. Par ce qui précède, pour tout $x \in B_R$, la fonction $\psi_R(x, \cdot)$ est à support dans le compact $\overline{B_{M+R}}$. En particulier, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le crochet à ψ_R. Donc $\varphi * T$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur B_R et ses dérivées sont données par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall x \in B_R, \quad \partial^\alpha(\varphi * T)(x) = \langle T, (\partial_x^\alpha \psi)(x, \cdot) \rangle = \langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Comme ce résultat est valable pour tout $R > 0$, on obtient bien que $\varphi * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\varphi * T)(x) &= \langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle = ((\partial^\alpha \varphi) * T)(x) \\ &= \langle T, (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \psi(x, \cdot) \rangle = \langle \partial^\alpha T, \psi(x, \cdot) \rangle = \varphi * (\partial^\alpha T)(x). \end{aligned}$$

4. Si on suppose $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{supp}(\varphi * T) \subset \mathrm{supp}(\varphi) + \mathrm{supp}(T)$.

D'après la question 3, on sait que $\varphi * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme φ et T sont à supports compacts, on a que $\mathrm{supp}(\varphi) + \mathrm{supp}(T)$ est compact. Il suffit donc de prouver l'inclusion.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\varphi * E(x) = \langle E, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle E, \tau_x \check{\varphi} \rangle$. Supposons $\varphi * E(x) \neq 0$, alors $\mathrm{supp}(E) \cap \mathrm{supp}(\tau_x \check{\varphi}) \neq \emptyset$. D'après la question 1, $\mathrm{supp}(\tau_x \check{\varphi}) = x - \mathrm{supp}(\varphi)$. Il existe donc $y \in \mathrm{supp}(\varphi)$ et $z \in \mathrm{supp}(E)$ tels que $z = x - y$. Mais alors $x = y + z \in \mathrm{supp}(\varphi) + \mathrm{supp}(E)$. Ce dernier ensemble étant fermé, on a donc $\mathrm{supp}(\varphi * E) \subset \mathrm{supp}(\varphi) + \mathrm{supp}(E)$.

Soient $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. D'après les questions précédentes, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a $\varphi * \check{E} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc définir la *convolée* $E * T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$E * T : \varphi \longmapsto \left\langle T, \varphi * \check{E} \right\rangle. \tag{2}$$

5. Montrer que $E * T$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

Remarquons sur l'équation (1), que $\varphi * \check{E}$ est linéaire en φ. Comme T est linéaire, c'est aussi le cas de $E * T$.

Comme $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, par la question 1 on a $\check{E} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{supp}(\check{E}) = -\mathrm{supp}(E)$. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$, par la question 4 on a que $\varphi * \check{E} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et son support vérifie $\mathrm{supp}(\varphi * \check{E}) \subset \mathrm{supp}(\varphi) - \mathrm{supp}(E) \subset K - \mathrm{supp}(E)$. En utilisant que T est une distribution avec le compact $K - \mathrm{supp}(E)$, il existe $C' \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle E * T, \varphi \rangle| = \left| \left\langle T, \varphi * \check{E} \right\rangle \right| \leqslant C' \sum_{|\beta| \leqslant n} \left\| \partial^\beta (\varphi * \check{E}) \right\|_\infty. \tag{i}$$

D'après la question 3, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\left|\partial^\beta(\varphi * \check{E})(x)\right| = \left|\left(\partial^\beta\varphi\right) * \check{E}(x)\right| = \left|\left\langle \tau_x E\,, \partial^\beta\varphi\right\rangle\right| = \left|\left\langle E\,, \tau_{-x}\partial^\beta\varphi\right\rangle\right|. \tag{ii}$$

Par ailleurs, par la question 2, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, ne dépendant que de E, tels que :

$$\left|\left\langle E\,, \tau_{-x}\partial^\beta\varphi\right\rangle\right| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha\tau_{-x}\partial^\beta\varphi\|_\infty = C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^{\alpha+\beta}\varphi\|_\infty \tag{iii}$$

En combinant les équations (i), (ii) et (iii), on obtient $\widetilde{C} > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$:

$$|\langle E * T\,, \varphi\rangle| \leqslant \widetilde{C} \sum_{\gamma\leqslant m+n} \|\partial^\gamma\varphi\|_\infty.$$

Donc $E * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

6. Vérifier que $(E, T) \mapsto E * T$ est bilinéaire de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. D'après (1), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\varphi * (E_1 \check{+} \alpha E_2)(x) &= \langle \tau_x(E_1 + \alpha E_2)\,, \varphi\rangle = \langle E_1 + \alpha E_2\,, \varphi(x + \cdot)\rangle\\ &= \langle E_1\,, \varphi(x + \cdot)\rangle + \alpha\langle E_2\,, \varphi(x + \cdot)\rangle\\ &= \varphi * \check{E}_1(x) + \alpha\varphi * \check{E}_2(x).\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\langle (E_1 + \alpha E_2) * (T_1 + \beta T_2)\,, \varphi\rangle =& \langle T_1 + \beta T_2\,, \varphi * \check{E}_1 + \alpha\varphi * \check{E}_2\rangle\\ =& \langle T_1\,, \varphi * \check{E}_1\rangle + \alpha\langle T_1\,, \varphi * \check{E}_2\rangle + \beta\langle T_2\,, \varphi * \check{E}_1\rangle + \alpha\beta\langle T_2\,, \varphi * \check{E}_2\rangle\\ =& \langle E_1 * T_1\,, \varphi\rangle + \alpha\langle E_2 * T_1\,, \varphi\rangle + \beta\langle E_1 * T_2\,, \varphi\rangle + \alpha\beta\langle E_2 * T_2\,, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $(E_1 + \alpha E_2) * (T_1 + \beta T_2) = E_1 * T_1 + \alpha E_2 * T_1 + \beta E_1 * T_2 + \alpha\beta E_2 * T_2$, et le produit de convolution est bien bilinéaire.

7. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, montrer que $\partial^\alpha(E * T) = (\partial^\alpha E) * T = E * (\partial^\alpha T)$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\langle \partial^\alpha(E * T)\,, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle E * T\,, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T\,, \partial^\alpha\varphi * \check{E}\rangle.$$

Utilisons les égalités prouvées dans la question 3. On a d'une part :

$$\langle \partial^\alpha(E * T)\,, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle T\,, \partial^\alpha\left(\varphi * \check{E}\right)\right\rangle = \left\langle \partial^\alpha T\,, \varphi * \check{E}\right\rangle = \langle E * (\partial^\alpha T)\,, \varphi\rangle.$$

D'autre part :

$$\langle \partial^\alpha(E * T)\,, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle T\,, \varphi * \left(\partial^\alpha\check{E}\right)\right\rangle = \left\langle T\,, \varphi * (\partial^\alpha\check{E})\right\rangle = \langle (\partial^\alpha E) * T\,, \varphi\rangle,$$

où on a utilisé que $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\check{E} = (\partial^\alpha\check{E})$. En effet, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$(-1)^{|\alpha|}\langle \partial^\alpha\check{E}\,, \psi\rangle = \langle \check{E}\,, \partial^\alpha\psi\rangle = \left\langle E\,, (\partial^\alpha\check{\psi})\right\rangle = \left\langle E\,, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\check{\psi}\right\rangle = \left\langle \partial^\alpha E\,, \check{\psi}\right\rangle = \left\langle (\partial^\alpha\check{E})\,, \psi\right\rangle.$$

8. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, de sorte que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$. On suppose que f est nulle presque partout hors d'un compact $K \subset \mathbb{R}^d$. Montrer que $T_f * T_g = T_{f*g}$.

   Comme $f_{|\mathbb{R}^d \setminus K} = 0$ presque partout, on a $\mathrm{supp}(T_f) \subset K$ et donc $T_f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\varphi * \check{T}_f(y) = \langle \tau_y T_f \,, \varphi \rangle = \langle T_f \,, \tau_{-y}\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Donc, en raisonnant formellement dans un premier temps :

$$\begin{aligned}\langle T_f * T_g \,, \varphi \rangle = \langle T_g \,, \varphi * \check{T}_f \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{f*g} \,, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

   Pour conclure, il suffit de justifier l'échange des intégrales. On va pour cela prouver que la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x)f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, ce qui permettra d'appliquer le théorème de Fubini.

   Par Fubini–Tonnelli, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\varphi(x)||f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |\varphi(x)|(|f| * |g|)(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} (|f| * |g|)(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   Comme $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, on a $|f| * |g| \in L^r(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Le support de φ étant compact le dernier terme est fini, ce qui prouve l'intégrabilité souhaitée.

9. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\langle T_\rho * T \,, \varphi \rangle = \langle T \,, \varphi * \check{\rho} \rangle = \langle T_{\rho * T} \,, \varphi \rangle.$$

   Commençons pour prouver la première égalité. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle T_\rho * T \,, \varphi \rangle = \left\langle T \,, \varphi * \check{T}_\rho \right\rangle$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi * \check{T}_\rho(x) = \langle \check{T}_\rho \,, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T_\rho \,, \varphi(x + \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\varphi(y+x)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(-y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

   Donc $\varphi * \check{T}_\rho = \varphi * \check{\rho}$ et $\langle T_\rho * T \,, \varphi \rangle = \langle T \,, \varphi * \check{\rho} \rangle$. Concernant la seconde égalité, on a :

$$\langle T_{\rho * T} \,, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\rho * T)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T \,, \rho(x - \cdot) \rangle \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T \,, \check{\rho}(\cdot - x)\varphi(x) \rangle\,\mathrm{d}x.$$

   On veut maintenant échanger l'intégration par rapport à x avec la forme linéaire T. Pour cela on va appliquer le théorème d'intégration sous le crochet. Notons $\psi : (x, y) \mapsto \check{\rho}(y-x)\varphi(x)$. Si $x \notin \mathrm{supp}(\varphi)$ alors $\psi(x, y) = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, si $y \notin \mathrm{supp}(\varphi) - \mathrm{supp}(\rho)$, alors pour tout $x \in \mathrm{supp}(\varphi)$ on a $y - x \notin -\mathrm{supp}(\rho) = \mathrm{supp}(\check{\rho})$ et donc $\psi(x, y) = 0$. Donc ψ est supportée dans le compact $\text{supp}(\varphi) \times (\text{supp}(\varphi) - \text{supp}(\rho)) \subset \mathbb{R}^{2d}$. Donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2d})$ et le théorème d'intégration sous le crochet montre que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle T\,, \check{\rho}(\cdot - x)\varphi(x)\rangle \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T\,, \psi(x,\cdot)\rangle \,\mathrm{d}x = \left\langle T\,, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,\cdot)\,\mathrm{d}x \right\rangle.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \check{\rho}(y-x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \check{\rho} * \varphi(y) = \varphi * \check{\rho}(y),$$

ce qui prouve la seconde égalité.

10. Calculer $\delta_0 * T$ où $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. De même, calculer $E * \delta_0$ où $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle \delta_0 * T\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \varphi * \check{\delta_0}\rangle$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi * \check{\delta_0}(x) = \langle \tau_x\delta_0\,, \varphi\rangle = \langle \delta_0\,, \tau_{-x}\varphi\rangle = \tau_{-x}\varphi(0) = \varphi(x).$$

Donc $\varphi * \check{\delta_0} = \varphi$ et donc $\langle \delta_0 * T\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \varphi\rangle$. Finalement, $\delta_0 * T = T$.
Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle E * \delta_0\,, \varphi\rangle = \langle \delta_0\,, \varphi * \check{E}\rangle = \varphi * \check{E}(0) = \langle E\,, \varphi\rangle.$$

Donc $E * \delta_0 = E$.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $(a_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$ une famille de nombres complexes indexée par les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus m, on considère l'*opérateur différentiel* $P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$. On appelle *solution fondamentale* de P toute distribution $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $P(T_0) = \delta_0$.

11. Soient $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une solution fondamentale de P, déterminer une solution de l'équation $P(T) = E$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
On va montrer que $T = E * T_0$ est solution. D'après les questions 6 et 7,

$$P(E * T_0) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha (E * T_0) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha E * (\partial^\alpha T_0) = E * \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha T_0\right) = E * P(T_0).$$

Comme T_0 est une solution fondamentale, la question 10 montre que $P(E * T_0) = E * \delta_0 = E$.

Exercice 6 (Solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur)**.** Soit $H = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside, on considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F : (t,x) \longmapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

1. Vérifier que $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
Il suffit de vérifier que $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact, il existe $M > 0$ tel que $K \subset [-M,M]^2$. On a alors :

$$\int_K |F(t,x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{[-M,M]^2} |F(x,t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{M}\int_{x=-M}^{M} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant 2M \int_0^M \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_0^M \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Donc $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que $\partial_t F - \partial_x^2 F = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction F est $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, ses dérivées au sens des distributions coïncident avec ses dérivées usuelles. Il suffit donc de faire le calcul. Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t F(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}^3} 4\pi \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\frac{x^2}{4t^2} = F(t,x)\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right).$$

   Et d'autre part,

$$\begin{aligned}\partial_x F(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\left(-\frac{2x}{4t}\right) = -\frac{x}{2t}F(t,x)\\ \partial_x^2 F(t,x) &= -\frac{1}{2t}F(t,x) - \frac{x}{2t}\partial_x F(t,x) = F(t,x)\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right).\end{aligned}$$

   On obtient donc bien $\partial_t F(t,x) - \partial_x^2 F(t,x) = 0$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, prouver que

$$\left\langle \partial_t F - \partial_x^2 F\,, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

   Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la fonction F est $\mathcal{C}^\infty$ et $\partial_t F - \partial_x^2 F = 0$. Sur $\mathbb{R}^2$ entier, il faut calculer $\partial_t F - \partial_x^2 F$ au sens des distributions. Comme $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_t F - \partial_x^2 F\,, \varphi \right\rangle &= \langle \partial_t F\,, \varphi\rangle - \left\langle \partial_x^2 F\,, \varphi\right\rangle = -\langle F\,, \partial_t\varphi\rangle - \left\langle F\,, \partial_x^2\varphi\right\rangle = -\left\langle F\,, \partial_t\varphi + \partial_x^2\varphi\right\rangle\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} F(t,x)\big(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{iv}$$

   Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la fonction $\partial_t\varphi + \partial_x^2\varphi$ est bornée, et nulle hors de $\operatorname{supp}(\varphi)$. Par ailleurs F est intégrable sur le compact $\operatorname{supp}(\varphi)$. Donc au final, $F\big(\partial_t\varphi + \partial_x^2\varphi\big)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} F(t,x)\big(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \int_{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\big(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\big(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{v}$$

   Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} F(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t &= [F(t,x)\varphi(t,x)]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}\partial_t F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\\ &= -F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) - \int_\varepsilon^{+\infty}\partial_t F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Donc

$$\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x - \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}}\partial_t F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

   Soit $t > \varepsilon$, en intégrant deux fois par parties et en utilisant le fait que φ est à support compact :

$$\int_{\mathbb{R}} F(t,x)\partial_x^2\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}}\partial_x F(t,x)\partial_x\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\partial_x^2 F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc
$$\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\partial_x^2\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \partial_x^2 F(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$
Finalement, en utilisant la question 2,
$$\begin{aligned}
&\int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} F(t,x)\big(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = -\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x + \int_{]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}} \big(\partial_x^2 F(t,x) - \partial_t F(t,x)\big)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = -\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{vi}$$
En combinant les équations (iv), (v) et (vi), on obtient bien la relation (3).

4. En déduire une expression simple de $\partial_t F - \partial_x^2 F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

On va utiliser l'expression de la question 3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$$\big\langle \partial_t F - \partial_x^2 F\,,\varphi\big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x.$$
Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $F(\varepsilon,\cdot)$ est la densité gaussienne de variance 2ε. En particulier, $F(\varepsilon,\cdot) = F(1,\cdot)_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on peut espérer avoir la convergence $\varphi(\varepsilon,\cdot) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0,\cdot)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par bicontinuité du crochet on aurait alors
$$\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x = \langle F(\varepsilon,\cdot)\,,\varphi(\varepsilon,\cdot)\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \langle \delta_0\,,\varphi(0,\cdot)\rangle = \varphi(0,0) = \big\langle \delta_{(0,0)}\,,\varphi\big\rangle.$$
La convergence de $\varphi(\varepsilon,\cdot)$ vers $\varphi(0,\cdot)$ étant pénible à établir au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on va suivre un chemin différent, par un calcul direct. Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème des accroissements finis,
$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0,0)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)(\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(0,0))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)|\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(0,0)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)|(\varepsilon,x)|\|D\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|D\varphi\|_\infty\left(\varepsilon\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}}|x|F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant \|D\varphi\|_\infty\left(\varepsilon + \int_{\mathbb{R}}|x|F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$
De plus,
$$\int_{\mathbb{R}}|x|F(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}}|x|e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\left[-2\varepsilon e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{\pi}}.$$
Donc
$$\left|\int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0,0)\right| = O\big(\sqrt{\varepsilon}\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Ainsi, on a bien

$$\langle \partial_t F - \partial_x^2 F \,, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0,0) = \langle \delta_{(0,0)} \,, \varphi \rangle,$$

et donc $\partial_t F - \partial_x^2 F = \delta_{(0,0)}$.

Remarque.

- L'équation de la chaleur régit l'évolution de la température, ou de façon équivalente de l'énergie thermique, dans un matériau au cours du temps. Si $U(t,x)$ dénote l'énergie thermique au point x à l'instant t, en l'absence de source de chaleur dans le milieu, cette énergie évolue selon l'équation $\partial_t U - \Delta_x U = 0$. En présence de sources de chaleur, cette équation devient $\partial_t U - \Delta_x U = f$, où le terme de source $f(t,x)$ correspond à l'énergie apportée au système au point x à l'instant t. Dans le cas d'un système à une dimension d'espace, une tige ou un fil par exemple, cette équation s'écrit $\partial_t U - \partial_x^2 U = f$.
- Pour espérer avoir une unique solution à cette équation, il faut imposer des conditions initiales (par exemple imposer le profil de température $U(0,\cdot) = u_0$ à l'instant $t = 0$) ou des conditions de bord (par exemple que U tende vers 0 à l'infini).
- Dans l'exercice 6 on a résolu l'équation de la chaleur unidimensionnelle avec terme de source $\delta_{(0,0)}$, et la solution obtenue est nulle à l'infini. On pourra penser à un fil, initialement avec un profil de température uniforme, que l'on chauffe brutalement en un point, par exemple par une impulsion laser apportant ponctuellement une unité d'énergie.
- On obtient ainsi une solution fondamentale de l'équation de la chaleur unidimensionnelle, ce qui permet d'obtenir par convolution des solutions de l'équation avec terme de source $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, voir exercice 5 question 11.
- On voit ici apparaître certaines caractéristiques intéressantes de l'équation de la chaleur. Elle est régularisante : pour tout $t > 0$, $F(t,\cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$ bien que le terme de source soit une masse de Dirac, donc au mieux une mesure. Elle envoie instantanément de l'énergie à l'infini : pour tout $t > 0$, le support de $F(t,\cdot)$ est $\mathbb{R}$, alors que le terme de source est à support compact. Enfin, $F(t,\cdot)$ est la gaussienne de variance $2t$, en particulier $(F(t,\cdot))_{t>0}$ est une famille de noyaux régularisants telle que $F(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{\mathcal{D}'} \delta_0$ et $F(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{D}'} 0$.