Feuille 6 – Mesure superficielle et formule de Gauss–Green

Exercice 1 (Mesure superficielle en dimension 1)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

1. Soit $a \in I$, déterminer la mesure superficielle σ_a de $\{a\}$

   Le singleton $\{a\}$ est une hypersurface $\mathcal{C}^1$ de I, définie comme lieu d'annulation de $f : t \mapsto t-a$. Dans ce cas $\nabla f = f'$ est constante à 1, en particulier c'est bien une submersion. De plus, on aura $\sigma_a = |f'|\delta(f) = \delta(f)$.

   Soit $\rho \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ d'intégrale 1 et $\rho_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\rho\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \rho_\varepsilon \circ f \,, \varphi \rangle = \int_I \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\varphi(a+\varepsilon s)\,\mathrm{d}s \\ = \varphi(a) + \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\big(\varphi(a+\varepsilon s) - \varphi(a)\big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

   Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\rho) \subset [-M, M]$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \rho(s)\big(\varphi(a+\varepsilon s) - \varphi(a)\big)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon \int_{-M}^{M} |\rho(s)||s|\|\varphi'\|_\infty\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon M \|\varphi'\|_\infty \|\rho\|_1.$$

   Donc $\langle \rho_\varepsilon \circ f \,, \varphi \rangle \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(a) = \langle \delta_a \,, \varphi \rangle$. Donc $\sigma_a = \delta(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon \circ f = \delta_a$.

2. Soit Σ une hypersurface (topologiquement) fermée dans I, déterminer sa mesure superficielle σ.

   Soit $a \in \Sigma$. Comme Σ est une hypersurface, il existe $J_a \subset I$ intervalle ouvert et $f_a : J \to \mathbb{R}$ submersion $\mathcal{C}^1$ telle que $\Sigma \cap J_a = f_a^{-1}(0)$. La dérivée de f_a ne s'annule pas sur J_a, donc f_a s'annule au plus une fois sur J_a par la contraposée du théorème de Rolle. Donc $\Sigma \cap J_a = \{a\}$ et a est un point isolé de Σ.

   Comme Σ est topologiquement fermée, la restriction $\sigma_{|J_a}$ de σ à J_a est la mesure superficielle de $\Sigma \cap J_a = \{a\}$ (voir le cours prop. 2.4.10 et def. 2.4.11). Par la question 1, on a donc $\sigma_{|J_a} = \sigma_a = \delta_a$.

   On a montré que Σ est discrète et fermée dans I. En particulier tout compact de I contient un nombre fini de points de Σ (mais attention Σ peut s'accumuler vers une borne de I). Cela prouve que $\nu = \sum_{b \in \Sigma} \delta_b$ définit bien une distribution sur I. En effet, si $K \subset I$ est compact et $\varphi \in \mathcal{D}_K(I)$ alors $\langle \nu \,, \varphi \rangle = \sum_{b \in K \cap \Sigma} \varphi(b)$ est une somme finie donc bien définie et $|\langle \nu \,, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{Card}(K \cap \Sigma)\|\varphi\|_\infty$.

   Montrons que $\sigma = \nu$. Soit $a \in \Sigma$, comme $\Sigma \cap J_a = \{a\}$, on a $\sigma_{|J_a} = \delta_a = \nu_{|J_a}$. Par ailleurs, $\mathrm{supp}(\sigma) = \Sigma = \mathrm{supp}(\nu)$ donc $\sigma_{|I\setminus\Sigma} = 0 = \nu_{|I\setminus\Sigma}$. Ainsi, σ et ν coïncident sur chaque élément du recouvrement ouvert $(I \setminus \Sigma) \cup \bigcup_{a \in \Sigma} J_a$ de I. Par l'unicité dans le principe de recollement on a donc $\sigma = \nu = \sum_{b \in \Sigma} \delta_b$.

3. Soient a et $b \in I$ tels que $a < b$. Calculer $\big(\mathbf{1}_{]a,b[}\big)'$, naïvement puis par la formule des sauts.

   D'une part on peut calculer la dérivée naïvement. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\Big\langle \big(\mathbf{1}_{]a,b[}\big)' \,, \varphi \Big\rangle = -\big\langle \mathbf{1}_{]a,b[} \,, \varphi' \big\rangle = -\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d} = \varphi(a) - \varphi(b) = \langle \delta_a - \delta_b \,, \varphi \rangle.$$

Donc $\left(\mathbf{1}_{]a,b[}\right)' = \delta_a - \delta_b$.
D'autre part, on peut calculer cette dérivée par la formule des sauts (thm. 2.4.14 du cours). On a $\partial(]a,b[) = \{a,b\}$. Soit $\varepsilon \in]0, b-a[$, on pose $f : t \mapsto t-a$ de $J_a =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$ et $g : t \mapsto b-t$ de $J_b =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont des submersions $\mathcal{C}^1$ et

$$]a,b[\,\cap J_a = f^{-1}(]0,+\infty[) \qquad \text{et} \qquad]a,b[\,\cap J_b = g^{-1}(]0,+\infty[).$$

Donc $]a,b[$ est un ouvert $\mathcal{C}^1$ bordé par l'hypersurface fermée $\{a,b\}$. Par la question 2, la mesure superficielle de $\partial(]a,b[)$ est $\sigma_{\{a,b\}} = \delta_a + \delta_b$. Notons $N : \{a,b\} \to \{-1,1\}$ le champ de vecteurs unitaires normal à $\{a,b\}$ et rentrant dans $]a,b[$. La formule des sauts affirme que

$$\left(\mathbf{1}_{]a,b[}\right)' = N\sigma_{\{a,b\}} = N(a)\delta_a + N(b)\delta_b.$$

Il est assez intuitif que $N(a) = 1$ et $N(b) = -1$. On peut le prouver à partir des fonctions f et g définissant localement le bord de $]a,b[$. Par définition (def. 2.4.13 du cours), on a :

$$N(a) = \frac{f'(a)}{|f'(a)|} = 1 \qquad \text{et} \qquad N(b) = \frac{g'(b)}{|g'(b)|} = -1.$$

On retrouve bien que $\left(\mathbf{1}_{]a,b[}\right)' = \delta_a - \delta_b$.

4. Écrire la formule de Gauss–Green sur $]a,b[$. Constater qu'on retrouve une formule bien connue.
   On vient de voir que $]a,b[$ est un ouvert $\mathcal{C}^1$ bordé par $\{a,b\}$. En reprenant les notations utilisées précédemment, le champ de vecteurs unitaires normal à $\{a,b\}$ et sortant de $]a,b[$ est $-N$. La formule de Gauss–Green (thm. 2.4.15 du cours) affirme alors que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(I)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial(]a,b[)} -N(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma_{\{a,b\}}(t) = \left\langle \sigma_{\{a,b\}}\,, -N\varphi \right\rangle \\ = -N(a)\varphi(a) - N(b)\varphi(b) = \varphi(b) - \varphi(a).\end{aligned}$$

   On retrouve le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ au voisinage de I.

Exercice 2 (Mesure superficielle en dimension 2)**.** Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une hypersurface (i.e. une courbe) de classe $\mathcal{C}^1$ et topologiquement fermée, de sorte que sa mesure superficielle $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est bien définie. On se donne un paramétrage local de Γ, i.e. une fonction $\gamma : I \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

- I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,
- γ est un homéomorphisme de I sur $\Gamma \cap \Omega$,
- γ' ne s'annule pas.

Remarque. Pour tout $a \in \Gamma$, il existe un voisinage Ω de a et un paramétrage γ de Γ comme ci-dessus.

Le but de l'exercice est de vérifier que $\sigma_{|\Omega} = T$, où $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est la forme linéaire définie par :

$$T : \varphi \longmapsto \int_I \varphi(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En d'autres termes, la mesure superficielle σ de Γ coïncide avec la notion d'intégration définie par la longueur d'arc, qui rappelons-le est indépendante du choix du paramétrage.

1. Vérifier que T définit une distribution.
   On vérifie sur la définition que T est bien linéaire en φ. Un argument rapide est de remarquer de T est une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est donc une distribution d'ordre 0, et même une mesure de Radon.

À la main, notons $\gamma^{-1} : \Gamma \cap \Omega \to I$ l'homéomorphisme inverse de γ. Soit $K \subset \Omega$ compact. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ on a :

$$|\langle T\,,\varphi\rangle| \leqslant \int_I |\gamma'(t)||\varphi(\gamma(t))|\,\mathrm{d}t \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{\gamma^{-1}(K)} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Notons que l'intégrale dans le terme de droite est la longueur d'arc de $\Gamma \cap K$.

2. Notons (γ_1, γ_2) les composantes de γ. Soit $a \in \Gamma \cap \Omega$, montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ de a et un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ tels que $\Gamma \cap V$ soit l'un des deux graphes suivants :

$$\Gamma \cap V = \left\{\left(x_1, \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(x_1)\right) : x_1 \in J\right\} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma \cap V = \left\{\left(\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}(x_2), x_2\right) : x_2 \in J\right\},$$

   Notons $a = (a_1, a_2) \in \Omega \cap \Gamma$ et $t = \gamma^{-1}(a) \in I$. Comme γ est un paramétrage régulier, on a $\gamma_1'(t) \neq 0$ ou $\gamma_2'(t) \neq 0$. Dans la suite on traite le cas $\gamma_1'(t) \neq 0$ (i.e. la tangente à Γ en a n'est pas verticale), l'autre cas étant symétrique.

   Comme $\gamma_1'(t) \neq 0$, il existe un intervalle ouvert $J' \subset I$ contenant t tel que γ_1 réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de J' sur $J = \gamma_1(J')$. C'est par exemple une conséquence du théorème d'inversion locale. Étant donné que γ est un homéomorphisme, $\gamma(J')$ est un ouvert de $\Gamma \cap \Omega$ pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. Il existe donc un ouvert $V \subset \Omega$ tel que $\gamma(J') = \Gamma \cap V$.

   Soit $x = (x_1, x_2) \in \Gamma \cap V$, il existe $s \in J'$ tel que $x = \gamma(s)$. En particulier $x_1 = \gamma_1(s) \in J$, donc $s = \gamma_1^{-1}(x_1)$ et finalement $x = \gamma \circ \gamma_1^{-1}(x_1) = (x_1, \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(x_1))$ avec $x_1 \in J$. Inversement, si $x_1 \in J$, il existe $s \in J'$ tel que $x_1 = \gamma_1(s)$ et donc $(x_1, \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(x_1)) = \gamma(s) \in \Gamma \cap V$.

3. En déduire que $\sigma_{|V} = T_{|V}$.

   Par le cours, on sait que si $\Gamma \cap V$ est le graphe de la fonction $q = \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} : J \to \mathbb{R}$, alors la mesure superficielle σ est définie dans V par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(V), \quad \langle \sigma\,, \varphi\rangle = \int_J \varphi(t, q(t))\sqrt{1 + |\nabla q(t)|^2}\,\mathrm{d}t$$

   Ici, comme $q : J \to \mathbb{R}$ on a $\nabla q = q'$. Comme $\gamma_1 : J' \to J$ est un difféomorphisme, on peut effectuer le changement de variable $t = \gamma_1(s)$, qui donne :

$$\langle \sigma\,, \varphi\rangle = \int_{J'} \varphi(\gamma(s))\sqrt{1 + (\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1})'(\gamma_1(s))^2}|\gamma_1'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

   En dérivant $\gamma_2 = (\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}) \circ \gamma_1$ on obtient $\gamma_2'(t) = (\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1})'(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)$ pour tout $t \in J'$. Finalement,

$$\langle \sigma\,, \varphi\rangle = \int_{J'} \varphi(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{J'} \varphi(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

   Comme $J' = \gamma^{-1}(V)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, on peut en fait étendre le domaine d'intégration à I tout entier sans modifier le terme de droite. Donc $\langle \sigma\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \varphi\rangle$, et finalement $\sigma_{|V} = T_{|V}$.

4. Conclure que $\sigma_{|\Omega} = T$.

   Pour tout $a \in \Gamma \cap \Omega$, il existe un voisinage ouvert $V_a \subset \Omega$ de a comme à la question 2. Par la question 3, on a alors $\sigma_{|V_a} = T_{|V_a}$. On sait par ailleurs que $\mathrm{supp}(\sigma_{|\Omega}) = \Omega \cap \Gamma$, donc $\sigma_{\Omega \setminus \Gamma} = 0$. Par définition de T, on a également $T_{\Omega \setminus \Gamma} = 0$.

   Ainsi $\sigma_{|\Omega}$ et T coïncident sur chacun des éléments du recouvrement ouvert

$$(\Omega \setminus \Gamma) \cup \bigcup_{a \in \Omega \cap \Gamma} V_a \supset \Omega.$$

   Donc $\sigma_{|\Omega} = T$ par unicité dans le principe de recollement.

Exercice 3 (Une extension de la formule de coaire)**.** Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une submersion $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\Sigma_t = f^{-1}(t)$ qui est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω, éventuellement vide. On note également σ_t pour la mesure superficielle de Σ_t. La formule de coaire énoncée dans le cours affirme que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la formule (1) est en fait valable pour toute fonction-test φ continue et positive, et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.

1. Construire une suite croissante $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions positives dans $\mathcal{C}^0_0(\Omega)$ qui convergent simplement vers $\mathbf{1}_\Omega$.

   Indication. Commencer par traiter le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, puis le cas Ω borné et enfin le cas général.

   Commençons par traiter le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, où $\partial\Omega = \emptyset$. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, 1]$ définie par :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}.$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_k : x \mapsto f\left(\frac{|x|}{k}\right)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, 1]$. La fonction α_k est continue et supportée dans la boule fermée de rayon $2k$ centrée en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite $\left(\frac{|x|}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0. Comme f est continue décroissante et $f(0) = 1$, on a donc

$$\alpha_k(x) = f\left(\frac{|x|}{k}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$$

   en croissant. Donc $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions positives et dans $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$, qui converge simplement vers 1. Dans ce cas, il suffit de poser $\psi_k = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Passons maintenant au cas $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Dans ce cas, $F = \mathbb{R}^d \backslash \Omega$ est un fermé non vide de $\mathbb{R}^d$. Notons $d_F : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ la fonction distance à F. Cette fonction est bien définie, continue (même 1-lipschitzienne) et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d_F(x) > 0\}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\beta_k : x \mapsto 1 - f\big(k\, d_F(x)\big)$ de $\mathbb{R}^d$ vers $[0, 1]$. Cette fonction est continue. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\beta_k(x) = 0 \iff f(k\, d_F(x)) = 1 \iff k\, d_F(x) \leqslant 1 \iff d_F(x) \leqslant \frac{1}{k}$$

   donc $\mathrm{supp}(\beta_k) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, d_F(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\} \subset \Omega$.
   Comme f est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, la fonction $1 - f$ est croissante et tend vers 1 en $+\infty$. Soit $x \in \Omega$, on a $d_F(x) > 0$ donc la suite $(k\, d_F(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers l'infini. Donc $\beta_k(x) = 1 - f\big(k\, d_F(x)\big) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ en croissant. Finalement $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives et continues sur $\mathbb{R}^d$ qui converge simplement vers $\mathbf{1}_\Omega$.
   Si Ω est borné, il suffit de poser $\psi_k = (\beta_k)_{|\Omega}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{supp}(\psi_k) = \mathrm{supp}(\beta_k) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, d_F(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}$ est borné et fermé dans $\mathbb{R}^d$ donc compact. Comme de plus $\mathrm{supp}(\psi_k) \subset \Omega$ on a bien $\psi_k \in \mathcal{C}^0_0(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. C'est la seule propriété de la suite $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qu'il restait à établir.
   Dans le cas général, on peut définir pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi_k = (\alpha_k \beta_k)_{|\Omega}$. Pour tout $x \in \Omega$, les suites $(\alpha_k(x))$ et $(\beta_k(x))$ sont à valeurs dans $[0, 1]$ et tendent vers 1 en croissant. C'est donc

aussi le cas de la suite $(\psi_k(x))$. Les ψ_k sont donc des fonctions continues et positives sur Ω, et la suite converge simplement vers $\mathbf{1}_\Omega$ en croissant. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\psi_k(x) > 0 \iff \begin{cases} \alpha_k(x) > 0, \\ \beta_k(x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| < 2k, \\ d_F(x) > \frac{1}{k} \end{cases}$$

donc $\operatorname{supp}(\psi_k) = \operatorname{supp}(\alpha_k\beta_k) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |x| \leqslant 2k \text{ et } d_F(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\}$ donc $\operatorname{supp}(\psi_k)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^d$, donc compact, contenu dans $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d_F(x) > 0\}$. On a donc bien $\psi_k \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ comme attendu.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ positive, prouver l'égalité (1) où les deux membres peuvent être finis ou infinis.

   Indication. Utiliser un argument d'approximation et le théorème de convergence monotone.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi\psi_k \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ vérifie les hypothèses de la formule de coaire (1) telle qu'énoncée dans le cours prop. 2.4.7. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_\Omega \varphi(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)\psi_k(x)}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t. \tag{i}$$

   Comme φ est à valeurs positives, la suite $(\varphi\psi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge simplement vers φ sur Ω. Le théorème de convergence monotone montre alors que

$$\int_\Omega \varphi(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

   la limite pouvant être finie ou infinie.
   Soit $t \in \mathbb{R}$, on a de même que la suite $\left(\frac{\varphi\psi_k}{|\nabla f|}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge simplement vers $\frac{\varphi}{|\nabla f|}$ sur Σ_t. En appliquant le théorème de convergence monotone sur (Σ_t, σ_t), on obtient :

$$I_k(t) := \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)\psi_k(x)}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) =: I(t)$$

   où $I(t) \in [0,+\infty]$ et la suite $(I_k(t))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en croissant. Ainsi, la suite de fonction $(I_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $I : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$. En appliquant une dernière fois le théorème de convergence monotone, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)\psi_k(x)}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} I_k(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} I(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t.$$

   On obtient donc la formule de coaire (1) pour φ en passant à la limite dans (i).

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, montrer que $\frac{\varphi}{|\nabla f|} \in L^1(\Sigma_t, \sigma_t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Prouver que φ satisfait la formule (1).
   Comme $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, on a $|\varphi| \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ à valeurs positives. D'après la question 2, on peut lui appliquer la formule (1). On a donc :

$$\int_\Omega |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{|\varphi(x)|}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t.$$

   Comme $\varphi \in L^1(\Omega)$ le terme de gauche est fini, donc le terme de droite aussi. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{|\varphi(x)|}{|\nabla f(x)|}\,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t < +\infty. \tag{ii}$$

Donc, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\Sigma_t} \frac{|\varphi(x)|}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) < +\infty,$$

c'est-à-dire $\frac{\varphi}{|\nabla f|} \in L^1(\Sigma_t, \sigma_t)$.
Notons $\varphi_+ = \max(0, \varphi)$ la partie positive de φ et $\varphi_- = \max(0, -\varphi)$ sa partie négative. Comme $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, les fonctions φ_+ et φ_- sont continues et positives sur Ω, on peut donc leur appliquer la formule (1), d'après la question 2. Comme par ailleurs $\varphi \in L^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x) \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \varphi_+(x) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi_-(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_+(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_-(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Les fonctions $\frac{\varphi_+}{|\nabla f|}$ et $\frac{\varphi_-}{|\nabla f|}$ sont respectivement les parties positives et négatives de $\frac{\varphi}{|\nabla f|}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\varphi}{|\nabla f|} \in L^1(\Sigma_t, \sigma_t)$ on pose

$$I(t) = \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x), \quad I_+(t) = \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_+(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \quad \text{et} \quad I_-(t) = \int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_-(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x).$$

Ces trois intégrales sont alors bien définies et on a $I(t) = I_+(t) - I_-(t)$. Les trois fonctions I, I_+ et I_- sont donc bien définies presque partout sur $\mathbb{R}$ et vérifient $I = I_+ - I_-$ presque partout. Par ailleurs, ces trois fonctions sont dominées par la fonction

$$t \longmapsto \int_{\Sigma_t} \frac{|\varphi(x)|}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x)$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après (ii). Donc I, I_+ et $I_- \in L^1(\mathbb{R})$ et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} I(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} I_+(t) \,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} I_-(t) \,\mathrm{d}t.$$

Finalement on a donc :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x) \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_+(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi_-(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{\varphi(x)}{|\nabla f(x)|} \,\mathrm{d}\sigma_t(x) \right) \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

Exercice 4 (Changement de variable sphérique)**.** Pour tout $r > 0$, notons $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$, $\overline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leqslant r\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = r\}$ et σ_r la mesure superficielle de S_r.

1. Soient $0 \leqslant R_1 \leqslant R_2 \leqslant +\infty$ et $\varphi \in \mathcal{C}^0(B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}})$ une fonction positive ou intégrable, montrer la *formule de changement de variable sphérique* suivante :

$$\int_{B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}} \varphi(x) \,\mathrm{d}x = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{S_1} \varphi(r\theta) \,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) \right) r^{d-1} \,\mathrm{d}r. \tag{2}$$

Il s'agit simplement d'étendre les fonctions auxquelles on peut appliquer le corollaire 2.4.8 du cours. On va suivre la même méthode de preuve.

La fonction $f : B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto |x|$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ telle que $S_r = f^{-1}(r)$ pour tout $r \in]R_1, R_2[$. Pour tout $x \in B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$ on rappelle que $\nabla f(x) = \frac{x}{|x|}$ et donc $|\nabla f(x)| = 1$. D'après l'exercice 3 on peut appliquer la formule de coaire (1) pour φ. On a donc :

$$\int_{B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}} \varphi(x) \,\mathrm{d}x = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{S_r} \varphi(\omega) \,\mathrm{d}\sigma_r(\omega) \right) \mathrm{d}r.$$

D'après la formule (2.4.4) du cours, pour tout $r \in]R_1, R_2[$ on a :

$$\int_{\omega \in S_r} \varphi(\omega) \,\mathrm{d}\sigma_r(\omega) = r^{d-1} \int_{\theta \in S_1} \varphi(r\theta) \,\mathrm{d}\sigma_1(\theta), \tag{iii}$$

ce qui prouve la formule recherchée (2).

Notons que dans le cours la formule (iii) est énoncée pour $\varphi \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$ ce qui n'est pas le cas ici. Cependant, à $r \in]R_1, R_2[$ fixé, on peut appliquer la formule du cours à $\chi\varphi$ où $\chi \in \mathcal{C}^0_0(B_R \setminus \{0\})$ est constante à 1 au voisinage de S_r. Cela établit la relation (iii) dans le cas qui nous intéresse.

2. Montrer que $\sigma_1(S_1) = d \cdot \mathrm{Vol}(B_1)$, où on a noté $\mathrm{Vol}(B_1)$ la mesure de Lebesgue de B_1.

   On va appliquer la formule (2) avec φ constante à 1 sur $B_1 \setminus \{0\}$. On a :

$$\mathrm{Vol}(B_1) = \int_{B_1} \mathrm{d}x = \int_{B_1 \setminus \{0\}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{S_1} \mathrm{d}\sigma_1(\theta) \right) r^{d-1} \,\mathrm{d}r = \sigma_1(S_1) \int_0^1 r^{d-1} \,\mathrm{d}r = \frac{\sigma_1(S_1)}{d}.$$

   Remarque. En particulier, pour tout $r > 0$, $\sigma_r(S_R) = r^{d-1}\sigma_1(S_1) = dr^{d-1}\,\mathrm{Vol}(B_1) < +\infty$.

Soit γ la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, qui admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu = \pi_*\gamma$ la mesure image de γ par la projection radiale $\pi : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$. On a montré dans l'exercice 4 de la feuille 5 que μ définit une distribution positive dont le support est S_1, et c'est en fait la mesure de probabilité uniforme sur S_1.

3. Comparer μ et σ_1. En déduire les valeurs de $\sigma_1(S_1)$ et $\mathrm{Vol}(B_1)$.

   Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$, par définition de la mesure image on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \,\mathrm{d}\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi \circ \pi(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

   Comme φ est bornée, la fonction $x \mapsto \varphi \circ \pi(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Par la question 1, on peut donc lui appliquer la formule (2) avec $R_1 = 0$ et $R_2 = +\infty$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \varphi \circ \pi(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_1} \varphi(\theta) e^{-\frac{r^2}{2}} \,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) \right) r^{d-1} \,\mathrm{d}r \\
&= \left(\frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{r^2}{2} \right)^{\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{r^2}{2}} r \,\mathrm{d}r \right) \left(\int_{S_1} \varphi(\theta) \,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \,\mathrm{d}\sigma_1(x) \right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \,\mathrm{d}\sigma_1(x).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\theta)\,\mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Donc $\sigma_1 = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\mu$ en tant que mesures de Radon et donc en tant que distributions sur $\mathbb{R}^d$.

Comme μ est une mesure de probabilité supportée par S_1, on a $\sigma_1(S_1) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\mu(S_1) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$.

On déduit alors de la question 2 que $\mathrm{Vol}(B_1) = \frac{2}{d}\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer les deux équivalences suivantes :

$$\int_{B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha > -d \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha < -d.$$

On va appliquer (2) à la fonction continue $x \mapsto |x|^\alpha$ sur $B_1 \setminus \{0\}$ et sur $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_1}$ respectivement. D'une part on a :

$$\int_{B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x = \int_{B_1\setminus\{0\}} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x = \sigma_1(S_1) \int_0^1 r^{\alpha+d-1}\,\mathrm{d}r.$$

Comme on a vu que $\sigma_1(S_1) < +\infty$, le terme de droite est fini si et seulement si $\alpha + d > 0$, i.e. $\alpha > -d$. Ceci prouve la première équivalence. D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d\setminus \overline{B_1}} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x = \sigma_1(S_1) \int_1^{+\infty} r^{\alpha+d-1}\,\mathrm{d}r.$$

Le terme de droite est fini si et seulement si $\alpha + d < 0$, i.e. $\alpha < -d$, ce qui prouve la seconde équivalence.

Définition (Laplacien)**.** On appelle *laplacien* l'opérateur différentiel $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ agissant sur distributions sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite *harmonique* si $\Delta T = 0$.

Exercice 5 (Formules de Green pour Δ)**.** 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide et σ la mesure superficielle de $\partial\Omega$. On note $N : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ la normale unitaire sortante de Ω. Prouver les formules suivantes, appelées respectivement première et seconde formule de Green.

$$\forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ \forall v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \qquad \int_\Omega u\ \Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle u\ \nabla v\,,N\rangle\,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \langle \nabla u\,,\nabla v\rangle\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\forall u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}),\ \forall v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \qquad \int_\Omega (u\ \Delta v - v\ \Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle u\ \nabla v - v\ \nabla u\,,N\rangle\,\mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

Commençons par prouver la formule (3). Soient $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. On a

$$\int_\Omega u\ \Delta v\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^d \int_\Omega u(x)\partial_i^2 v(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'après la formule de Green, sous la forme de la remarque 2.4.17 du cours, on a pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$,

$$\int_\Omega u(x)\partial_i^2 v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} N_i(x)u(x)\partial_i v(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_\Omega \partial_i u(x)\partial_i v(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient la formule (3) en sommant cette relation sur $i \in \{1, \cdots, d\}$.
Si maintenant u et $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, on peut faire la différence entre la formule (3) et la même formule où les rôles de u et v sont échangés. Les intégrales de $\langle \nabla u \,, \nabla v \rangle$ sur U se compensent, et on obtient exactement (4).

2. Soit $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\Delta v = 0$ si et seulement si pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide :
$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla v \,, N \rangle \,\mathrm{d}\sigma = 0.$$
Si v est harmonique, pour tout ouvert $\mathcal{C}^1$ borné $\Omega \neq \emptyset$, on peut appliquer (3) avec v et $u \equiv 1$. On obtient :
$$0 = \int_\Omega u \Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \langle \nabla v \,, N \rangle \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \langle \nabla u \,, \nabla v \rangle \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla v \,, N \rangle \,\mathrm{d}\sigma.$$
Inversement, si $\int_{\partial\Omega} \langle \nabla v \,, N \rangle \,\mathrm{d}\sigma = 0$ pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide, le même calcul montre que $\int_\Omega \Delta v(x) \,\mathrm{d}x = 0$ pour tout tel Ω. Comme v est $\mathcal{C}^2$, la fonction Δv est continue. Si elle n'était pas nulle, il existerait une boule ouverte sur laquelle elle est de signe strict constant et d'intégrale nulle, ce qui est absurde. Donc v est harmonique.

3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $\mathcal{C}^1$ borné non vide et $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique telle que $v_{|\partial\Omega} = 0$. Montrer que $v = 0$.
On applique la formule (3) avec $u = v$. On obtient :
$$0 = \int_\Omega v \;\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla v \,, N \rangle \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \langle \nabla v \,, \nabla v \rangle \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x.$$
Donc ∇v est nulle, et donc v est constante sur chaque composante connexe de Ω.
Soit Ω_0 l'une des composantes connexes de Ω. Comme Ω est borné non vide, Ω_0 aussi. Vérifions que Ω_0 est ouvert (c'est une conséquence de la locale connexité de $\mathbb{R}^d$).
Soit $x \in \Omega_0$ et soit $B \subset \Omega$ une boule ouverte contenant x. Comme B et Ω_0 sont connexes et $x \in B \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, il vient que $B \cup \Omega_0$ connexe et de plus $\Omega_0 \subset B \cup \Omega_0 \subset \Omega$, par maximalité de Ω_0 pour l'inclusion, $B \subset \Omega_0$ est un voisinage de x dans Ω_0.
Vérifions à présent que $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$. Comme Ω_0 est ouvert, $\partial\Omega_0 = \overline{\Omega_0} \setminus \Omega_0$ et si on avait $\partial\Omega_0 = \emptyset$, on aurait $\Omega_0 = \overline{\Omega_0}$ ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^d$ connexe donc $\Omega_0 \in \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$ ce qui est impossible puisque Ω_0 est borné et non vide.
Il nous reste à vérifier que $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$ (c'est à nouveau une conséquence de la locale connexité de $\mathbb{R}^d$). Soit $x \in \overline{\Omega_0} \cap \Omega$ et soit $B \subset \Omega$ une boule ouverte contenant x. On a alors $B \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ (sinon $\Omega_0 \subset \Omega \setminus B$ qui est fermé et par définition de l'adhérence, $\overline{\Omega_0} \subset \Omega \setminus B$ incompatible avec $x \in \overline{\Omega_0} \cap B$) et par conséquent $B \cup \Omega_0$ est connexe, par maximalité de Ω_0, $B \cup \Omega_0 \subset \Omega$ implique $B \subset \Omega_0$ et donc $x \in \Omega_0$. Par contraposée, si $x \in \overline{\Omega_0} \setminus \Omega_0$, alors $x \notin \Omega$ et donc $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$ ($\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega}$).
Comme v est constant sur Ω_0, continue sur $\overline{\Omega_0}$ et nulle sur $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$, $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$, on a $v_{|\Omega_0} = 0$. Comme Ω_0 est une composante connexe quelconque de Ω, on en déduit que $v = 0$.

Exercice 6 (Formules de la moyenne)**.** Pour tout $r > 0$, notons encore $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = r\}$ et σ_r la mesure superficielle de S_r. On note $N : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans S_1 le champ de vecteurs radial unitaire issu de 0. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, on définit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ par :
$$g : r \longmapsto \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} u(x) \,\mathrm{d}\sigma_r(x).$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g' : r \mapsto \dfrac{1}{r^{d-1}} \displaystyle\int_{S_r} \langle \nabla u(x) \,, N(x) \rangle \, \mathrm{d}\sigma_r(x)$.

   Comme on l'a déjà remarqué dans la solution de l'exercice 4, on peut appliquer la formule (iii) avec $\varphi = u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $r > 0$, $g(r) = \int_{S_1} u(r\theta) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta)$, ce qui permet de se ramener à un domaine d'intégration indépendant de r.
   Soit $h :]0, +\infty[\times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $h : (r, \theta) \mapsto u(r\theta)$. On veut dériver l'intégrale à paramètre $g : r \mapsto \int_{S_1} h(r, \theta) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta)$.

   - pour tout $r > 0$, $h(r, \cdot)$ est continue donc mesurable ;
   - pour tout $\theta \in S_1$, $h(\cdot, \theta) : r \mapsto u(r\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\partial_r h : (r, \theta) \mapsto D_{r\theta} u \cdot \theta = \langle \nabla u(r\theta) \,, \theta \rangle$;
   - soit $M > 0$, sur $]0, M[\times S_1$, on a $|\partial_r h| \leqslant \|\nabla u\|_{\infty, \overline{B_M}}$ et cette constante est intégrable.

   Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, M[$ de dérivée

$$g' : r \mapsto \int_{S_1} \langle \nabla u(r\theta) \,, \theta \rangle \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r} \left\langle \nabla u(x) \,, \frac{x}{|x|} \right\rangle \mathrm{d}\sigma_r(x).$$

   Ceci étant valable pour tout $M > 0$, la fonction g est $\mathcal{C}^1$ avec la dérivée annoncée.

On suppose désormais que la fonction u est harmonique.

2. Montrer que g constante dans ce cas, et établir la première formule de la moyenne :

$$\forall r > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\sigma_r(S_r)} \int_{S_r} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_r(x). \tag{5}$$

   Soit $r > 0$, on applique la première formule de Green (3) sur B_r, en gardant en mémoire que le champ de vecteurs unitaires normal à S_r et sortant de B_r est N :

$$0 = \int_{B_r} \Delta u \, \mathrm{d}x = \int_{S_r} \langle \nabla u \,, N \rangle \, \mathrm{d}\sigma_r = r^{d-1} g'(r).$$

   Ainsi si u est harmonique, g' est nulle et donc g est constante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, il est naturel de penser que :

$$g(r) = \int_{S_1} u(r\theta) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta)$$

   converge vers $u(0)\sigma_1(S_1)$ lorsque $r \to 0$, prouvons-le. Pour tout $r < 1$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_1} u(r\theta) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) - u(0)\sigma_1(S_1) \right| = \left| \int_{S_1} (u(r\theta) - u(0)) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) \right| &\leqslant \int_{S_1} |u(r\theta) - u(0)| \, \mathrm{d}\sigma_1(x) \\ &\leqslant r \|\nabla u\|_{\infty, \overline{B_1}} \sigma_1(S_1) \xrightarrow[r \to 0]{} 0, \end{aligned}$$

   par le théorème des accroissements finis. Ainsi, $g(r) \xrightarrow[r \to 0]{} u(0)\sigma_1(S_1)$ et, pour tout $r > 0$,

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_1(S_1)} \int_{S_1} u(r\theta) \, \mathrm{d}\sigma_1(\theta) = \frac{1}{\sigma_r(S_r)} \int_{S_r} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_r(x),$$

   où on a de nouveau utilisé (iii) et le fait que $\sigma_r(S_r) = r^{d-1}\sigma_1(S_1)$.

3. En déduire la seconde formule de la moyenne :

$$\forall r > 0, \qquad u(0) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \int_{B_r} u(x) \, \mathrm{d}x. \tag{6}$$

Indication. Utiliser la seconde formule de Green (4) avec $v : x \mapsto |x|^2$, de laplacien constant.

Suivant l'indication on considère $v : x \mapsto |x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$. On a $\nabla v : x \mapsto 2x$ et $\Delta v : x \mapsto 2d$. Soit $r > 0$, appliquons la formule (4) à u harmonique et v sur la boule ouvert B_r :

$$\begin{aligned} 2d \int_{B_r} u \,\mathrm{d}x = \int_{B_r} (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{d}x &= \int_{S_r} \langle u\nabla v - v\nabla u \,, N\rangle \,\mathrm{d}\sigma_r \\ &= \int_{S_r} 2ru - r^2 \langle \nabla u \,, N\rangle \,\mathrm{d}\sigma_r = 2r \int_{S_r} u \,\mathrm{d}\sigma_r - r^{d+1} g'(r) \\ &= 2r \int_{S_r} u \,\mathrm{d}\sigma_r, \end{aligned}$$

d'après la question (2). Donc, en utilisant (5),

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \int_{B_r} u \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r)} \frac{r}{d} \int_{S_r} u \,\mathrm{d}\sigma_r = \frac{\sigma_r(S_r)}{\mathrm{Vol}(B_r)} \frac{r}{d} u(0) = \frac{\sigma_1(S_1)}{d \,\mathrm{Vol}(B_1)} u(0) = u(0),$$

où on a utilisé la question 2 de l'exercice 4.

Exercice 7 (Solution fondamentale de Δ)**.** Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$ et $f_d : x \mapsto |x|^{2-d}$. Pour $R > 0$, on note $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\}$, $S_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = R\}$ et σ_R la mesure superficielle de S_R. On note aussi $N : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans S_1 le champ de vecteurs radial unitaire issu de 0.

1. Vérifier que f_d définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
   La fonction f_d est $\mathcal{C}^\infty$ donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Par ailleurs, la question 4 de l'exercice 4 montre que f_d est intégrable au voisinage de 0. On a donc $f_d \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, calculer $\nabla f_d(x)$ et $\Delta f_d(x)$, au sens de la dérivation usuelle.
   Sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ la fonction f_d est $\mathcal{C}^\infty$. On peut donc bien calculer ses dérivées partielles au sens usuel. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a :

$$f_d(x) = |x|^{2-d} = \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{1-\frac{d}{2}},$$

$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \qquad \partial_i f_d(x) = (2-d) x_i \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-\frac{d}{2}} = (2-d) x_i |x|^{-d},$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \cdots, d\}, \qquad \partial_i^2 f_d(x) &= (2-d) \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-\frac{d}{2}} - d(2-d) x_i^2 \left(\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^{-1-\frac{d}{2}} \\ &= (2-d)\big(|x|^2 - d x_i^2\big)|x|^{-2-d}. \end{aligned}$$

   On obtient donc $\nabla f_d(x) = (2-d) x |x|^{-d}$ et $\Delta f_d(x) = (2-d)|x|^{-(d+2)} \sum_{i=1}^d (|x|^2 - d x_i^2) = 0$.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\langle \Delta f_d \,, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \langle \varphi \,\nabla f_d - f_d \,\nabla \varphi \,, N \rangle \,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon$.
   La forme du terme de droite suggère qu'il va falloir utiliser la seconde formule de Green (4) sur un domaine bordé par S_ε. La fonction f_d n'est pas régulière sur B_ε, ce qui exclu de considérer ce domaine. La formule (4) est valable sur un ouvert borné, ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Pour pallier à ce problème on va utiliser le fait que φ est nulle hors d'une grande boule pour se ramener à appliquer (4) sur un domaine de la forme $B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$.

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R$. L'opérateur différentiel Δ étant d'ordre 2, on a :

$$\langle \Delta f_d \,, \varphi \rangle = \langle f_d \,, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f_d(x)\ \Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B_R} f_d(x)\ \Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $f_d \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a $f_d\ \Delta\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui justifie l'égalité :

$$\langle \Delta f_d \,, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} f_d(x)\ \Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Les fonctions φ et f_d sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \supset \overline{B_R} \setminus B_\varepsilon$. On peut donc leur appliquer (4) sur l'ouvert borné $B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$ qui est $\mathcal{C}^1$ et dont le bord est l'hypersurface $S_R \sqcup S_\varepsilon$. Notons que si $x \in S_R$, le vecteur unitaire normal sortant de $B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}$ en x est $N(x)$. Si $x \in S_\varepsilon$, ce vecteur est $-N(x)$.

D'après la question 2, on $\Delta f_d = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Par ailleurs, par définition de R, la fonction φ s'annule au voisinage de S_R. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} f_d\ \Delta\varphi\,\mathrm{d}x &= \int_{B_R \setminus \overline{B_\varepsilon}} \big(f_d\ \Delta\varphi - \varphi\ \Delta f_d\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{S_R} \langle f_d\ \nabla\varphi - \varphi\ \nabla f_d \,, N \rangle\,\mathrm{d}\sigma_R + \int_{S_\varepsilon} \langle f_d\ \nabla\varphi - \varphi\ \nabla f_d \,, -N \rangle\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon \\
&= \int_{S_\varepsilon} \langle \varphi\ \nabla f_d - f_d\ \nabla\varphi \,, N \rangle\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui établit la formule souhaitée.

4. Calculer Δf_d dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Commençons par remarquer que sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la fonction f_d est $\mathcal{C}^\infty$. Sur ce domaine, ses dérivées partielles au sens des distributions coïncident avec celles au sens usuel. D'après la question 2, on a donc $(\Delta f_d)_{|\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} = 0$. En particulier, Δf_d est supportée en 0 et est donc une combinaison linéaire de dérivées partielles de δ_0.

Pour calculer Δf_d, on va s'appuyer sur la formule prouvée à la question 3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon > 0$, d'après les calculs effectués à la question 2,

$$\begin{aligned}
\int_{S_\varepsilon} \langle \varphi\ \nabla f_d - f_d\ \nabla\varphi \,, N \rangle\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon &= \int_{S_\varepsilon} \left((2-d)\varphi(x) \left\langle \frac{x}{|x|^d} \,, \frac{x}{|x|} \right\rangle - \frac{1}{|x|^{d-2}} \left\langle \nabla\varphi(x) \,, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right) \mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x) \\
&= \frac{2-d}{\varepsilon^{d-1}} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x) - \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \int_{S_\varepsilon} \left\langle \nabla\varphi(x) \,, \frac{x}{|x|} \right\rangle \mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x).
\end{aligned} \tag{iv}$$

Commençons par traiter le second terme dans le membre de droite de l'équation (iv). Pour tout $x \neq 0$, on a $\left| \left\langle \nabla\varphi(x) \,, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right| \leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty$. Donc

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \left\langle \nabla\varphi(x) \,, \frac{x}{|x|} \right\rangle \mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x) \right| \leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty \sigma_\varepsilon(S_\varepsilon).$$

Par ailleurs, en utilisant la formule (2.4.4) du cours (ou de façon équivalente (iii)),

$$\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} 1\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} 1\,\mathrm{d}\sigma_1 = \varepsilon^{d-1}\sigma_1(S_1).$$

Finalement,
$$\left|\frac{1}{\varepsilon^{d-2}}\int_{S_\varepsilon}\left\langle\nabla\varphi(x)\,,\frac{x}{|x|}\right\rangle\mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x)\right|\leqslant\|\nabla\varphi\|_\infty\varepsilon\sigma_1(S_1)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0.$$
Concernant le premier terme dans le membre de droite de (iv), on applique de nouveau (iii) :
$$\frac{1}{\varepsilon^{d-1}}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x)=\int_{S_1}\varphi(\varepsilon x)\,\mathrm{d}\sigma_1(x).$$
On a déjà vu que ce terme converge vers $\varphi(0)\sigma_1(S_1)$, rappelons l'argument.
$$\begin{aligned}\left|\int_{S_1}\varphi(\varepsilon x)\,\mathrm{d}\sigma_1(x)-\varphi(0)\sigma_1(S_1)\right|=\left|\int_{S_1}(\varphi(\varepsilon x)-\varphi(0))\,\mathrm{d}\sigma_1(x)\right|&\leqslant\int_{S_1}|\varphi(\varepsilon x)-\varphi(0)|\,\mathrm{d}\sigma_1(x)\\&\leqslant\varepsilon\|\nabla\varphi\|_\infty\sigma_1(S_1)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0,\end{aligned}$$
par le théorème des accroissements finis. Finalement, le membre de droite de (iv) converge vers $(2-d)\sigma_1(S_1)\varphi(0)$ lorsque $\varepsilon\to0$. Par la question 3, on obtient donc pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,
$$\langle\Delta f_d\,,\varphi\rangle=(2-d)\sigma_1(S_1)\langle\delta_0\,,\varphi\rangle.$$
Donc $\Delta f_d=(2-d)\sigma_1(S_1)\delta_0$, et par l'exercice 4 question 3, on a $\Delta f_d=-4\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)^{-1}\delta_0$. Pour $d\geqslant3$ la constante est négative, mais pour $d=1$ on a $\Delta f_1=(x\mapsto|x|)''=2\delta_0$.

5. (*facultatif*) Pour $d=2$, on pose $f_2:x\mapsto\ln|x|$. Calculer Δf_2 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ par la même méthode que ci-dessus.

   La fonction f_2 est $\mathcal{C}^\infty$ donc L^1_{loc} sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Au voisinage de 0, on a $|\ln|x||=O\left(|x|^{-1}\right)$. Comme $x\mapsto|x|^{-1}$ est intégrable au voisinage de 0 d'après l'exercice 4 question 4, c'est aussi le cas de f_2. Donc $f_2\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\subset\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, on obtient par des calculs directs similaires à ceux de la question 2 :
$$\begin{aligned}\forall i\in\{1,2\},\qquad&\partial_i f_2(x)=\frac{x_i}{|x|^2},&&\partial_i^2 f_2(x)=\frac{|x|-2x_i^2}{|x|^4},\\&\nabla f_2(x)=\frac{x}{|x|^2},&&\Delta f_2(x)=\frac{1}{|x|^4}\left(2|x|^2-2x_1^2-2x_2^2\right)=0.\end{aligned}$$
   La preuve de la question 3 reste vraie sans modification. On a donc pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$$\langle\Delta f_2\,,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{S_\varepsilon}\langle\varphi\;\nabla f_d-f_d\;\nabla\varphi\,,N\rangle\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon.$$
   Puis, pour tout $\varepsilon>0$,
$$\begin{aligned}\int_{S_\varepsilon}\langle\varphi\;\nabla f_d-f_d\;\nabla\varphi\,,N\rangle\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x)-\ln|\varepsilon|\int_{S_\varepsilon}\langle\nabla\varphi\,,N\rangle\,\mathrm{d}\sigma_\varepsilon\\&=\int_{S_1}\varphi(\varepsilon x)\,\mathrm{d}\sigma_1(x)+O(\ln|\varepsilon|\sigma_\varepsilon(S_\varepsilon))\\&=\varphi(0)\sigma_1(S_1)+\int_{S_1}(\varphi(\varepsilon x)-\varphi(0))\,\mathrm{d}\sigma_1(S_1)+O(\varepsilon\ln|\varepsilon|)\\&\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}2\pi\varphi(0).\end{aligned}$$
   Donc $\Delta f_2=2\pi\delta_0$.

Remarque. On vient de montrer que f_d est (à une constante multiplicative près qu'on va oublier dans cette remarque) une solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^d$. Ce n'est pas la seule, les autres solutions fondamentales de Δ sont de la forme $f_d + T$ avec $\Delta T = 0$. En prenant un peu d'avance sur le cours, on a $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ (voir thm. 3.5.7 dans les notes), et on verra que T n'est bornée que si elle est nulle (voir feuille de TD 8). Lorsque $d \geqslant 3$, la fonction f_d est donc la seule solution fondamentale de Δ qui tend vers 0 à l'infini, ce qui en fait la solution fondamentale la plus sympathique pour les problèmes issus de la physique.

Remarque. En dimension $d = 3$, on peut faire un lien avec la physique. Si on considère une distribution (Coïncidence ? Je ne pense pas !) de charges ρ dans le vide, l'équation de Maxwell–Gauss nous dit que le champ électrique créé par ces charges vérifie $\operatorname{div}(E) = \rho$. Par ailleurs, les physiciens nous disent que le champ $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dérive d'un potentiel $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini à une constante additive près, au sens où $E = -\nabla V$. On a donc $\Delta V = \operatorname{div}(\nabla V) = -\operatorname{div}(E) = -\rho$.
Pour $\rho = \delta_0$, ce qui correspond à une charge ponctuelle positive placée à l'origine, on obtient un potentiel $V_0 = -\frac{1}{4\pi} f_3 : x \mapsto \frac{1}{4\pi|x|}$ (c'est le seul choix de normalisation pour lequel $V_0(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$).
On retrouve ainsi la forme du potentiel coulombien, notamment sa décroissance en $\frac{1}{|x|}$.
Si $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est à support compact, le principe de superposition cher aux physiciens est juste une traduction du fait que $V = \rho * V_0$ est solution de $\Delta V = -\rho$ (voir l'exercice 5 de la feuille 5, question 11). En particulier, le potentiel électrique créé par $\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)$ à support compact est

$$V = \rho * V_0 : x \longmapsto \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} \, \mathrm{d}y.$$

Un raisonnement semblable s'applique au potentiel gravitationnel et explique sa décroissance en $\frac{1}{|x|}$.