Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 7 – Espaces de Sobolev en plusieurs variables

Exercice 1 ($H^1(B) \not\subseteq L^\infty(B)$ en dimension $d \geqslant 3$)**.** Soit $d \geqslant 3$, on note $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\}$. En dimension 1, l'inégalité de Sobolev montre l'inclusion $H^1(]-1,1[) \subset L^\infty(]-1,1[)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'une telle inclusion est fausse en dimension $d \geqslant 3$, en exhibant une fonction dans $H^1(B) \setminus L^\infty(B)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : x \mapsto |x|^\alpha$ de B dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha > 1 - d$, calculer les dérivées partielles $(\partial_i f_\alpha)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de f_α dans $\mathcal{D}'(B)$.
   Indication. Commencer par calculer la restriction de $\partial_i f_\alpha$ à $B \setminus \{0\}$.
2. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha \in H^1(B) \setminus L^\infty(B)$.

Exercice 2 (Pas de trace sur $L^2(B)$)**.** Soient $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$ et σ la mesure superficielle de S. On a vu en cours que l'application trace $\gamma : \mathcal{C}^\infty(\overline{B}) \to L^2(S, \sigma)$ définie par $\gamma : f \mapsto f_{|S}$ se prolonge uniquement en une application linéaire continue de $H^1(B)$ vers $L^2(S, \sigma)$. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue $\widetilde{\gamma} : L^2(B) \to L^2(S, \sigma)$ telle que $\widetilde{\gamma}_{|\mathcal{C}^\infty(\overline{B})} = \gamma$.

Exercice 3 (Pas de trace sur les ouverts irréguliers)**.** On va donner un exemple d'ouvert borné dont le bord est régulier par morceaux mais pour lequel le théorème de trace est mis en défaut. Soit $p > 2$, on considère l'ouvert borné $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x_1 < 1 \text{ et } 0 < x_2 < x_1^p\right\}$. Il n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Cependant, son bord est la réunion de trois courbes $\mathcal{C}^1$, notées Γ_1, Γ_2 et Γ_3 et paramétrées respectivement par :

$$\gamma_1 : t \mapsto (t, 0), \qquad \gamma_2 : t \mapsto (1, t), \qquad \text{et} \qquad \gamma_3 : t \mapsto (t, t^p)$$

de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit σ_i la mesure superficielle de Γ_i, on définit une mesure superficielle σ sur $\partial\Omega$ par $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Soit $\gamma : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega, \sigma)$ définie par $\gamma : f \mapsto f_{|\partial\Omega}$. Le but de l'exercice est de montrer que γ ne se prolonge pas en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ vers $L^2(\partial\Omega, \sigma)$. Pour tout $\alpha \geqslant 1$ on définit $f_\alpha : (x_1, x_2) \mapsto e^{-\alpha x_1}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\alpha \geqslant 1$, $\|f_\alpha\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C\alpha^{1-p}$.
2. Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que, pour tout $\alpha \geqslant 1$, $\|f_\alpha\|^2_{L^2(\partial\Omega,\sigma)} \geqslant \frac{c}{\alpha}$.
3. Conclure.

Exercice 4 (Régularité de $|u|$ avec $u \in H^1(\Omega)$)**.** Soit $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ la fonction *signe* définie par : $\mathrm{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$, $\mathrm{sgn}(t) = 1$ si $t > 0$ et $\mathrm{sgn}(0) = 0$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide. On se propose de montrer que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles on a $|u| \in H^1(\Omega)$ et $\partial_i|u| = \mathrm{sgn}(u)\partial_i u$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$.

1. Soit $B \subset \Omega$ une boule ouverte. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $\varphi_\varepsilon : t \mapsto \sqrt{t^2 + \varepsilon}$. Montrer que pour tout $u \in H^1(B)$ à valeurs réelles on a $\varphi_\varepsilon \circ u \in H^1(B)$ et
   $$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \qquad \partial_i(\varphi_\varepsilon \circ u) = (\varphi'_\varepsilon \circ u)\partial_i u.$$
   Indication. Approcher u par une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\overline{B})$.
2. Soit $u \in H^1(B)$ à valeurs réelles, montrer que $|u| \in H^1(B)$ et
   $$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \qquad \partial_i|u| = \mathrm{sgn}(u)\partial_i u.$$
3. Conclure par recollement que ce résultat est aussi vrai sur Ω.