TD2 – INTERPOLATION.

Soit $1 \leq p < +\infty$.

$$\boxed{\begin{array}{l} L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable } 2\pi\text{-périodique} \ : \ \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt < +\infty \right\} \\ \text{muni de la norme } \|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \end{array}}$$

Notations: $\cdot\, e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{ikt}$ et

$\mathcal{T}_n = \mathrm{vect}(e_k : k \in [\![-n, n]\!])$

$\mathcal{T} = \mathrm{vect}(e_k : k \in \mathbb{Z})$

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit ses coefficients de Fourier

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

et les sommes partielles de sa série de Fourier

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

BUT : montrer le théorème de Marcel Riesz (1927) :

$$\boxed{\text{Soit } 1 < p < +\infty : \quad \|S_n f - f\|_p \xrightarrow[n\infty]{} 0 \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{T})}$$

Remarques:

- Pour $p = 2$: c'est le théorème de Plancherel.
- Pour n fixé, S_n est continue :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{e^{-ikt} e^{ikx}}_{e^{ik(x-t)}} dt$$

$$= f * \underbrace{\left(\sum_{k=-n}^{n} e_k \right)}_{D_n}(x)$$

i.e. $S_n(f) = f * D_n$ et $\|S_n(f)\|_p \leq \|f\|_p \|D_n\|_1$

or $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)x} \underset{k \to k+n}{=} e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} \overset{\text{si } e^{ix} \neq 1}{=} e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$

et finalement $D_n(x) = \dfrac{2i \sin((n+\frac{1}{2})x)}{2i \sin(\frac{x}{2})}$

"Intégrale de Dirichlet"

et $\|D_n\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right| dx \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{4}{\pi^2} \ln n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$

$= \left|\cos(nx) + \sin(nx)\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

donc $\|S_n\|_{p\to p}$ pas unif^t borné a priori !

- L'application pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé : $Ev_n : L^\infty \cap C^0 \to \mathbb{C}$, $f \longmapsto S_n(f)(x_0)$ — continue car D_n continue + convolution

  a pour norme d'opérateur $\|D_n\|_1$.

  En effet, $|S_n(f)(x_0)| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x_0-t)\, dt\right|$ et prendre $f(t) = \dfrac{\overline{D_n(x_0-t)}}{|D_n(x_0-t)|}$ pour t tq $\neq 0$

Ainsi $Ev_n : (C^0_{2\pi}, \|\ \|_\infty) \to \mathbb{C}$ suite d'appl. linéaires non bornée :

$$\|Ev_n\|_{op} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

D'après le thm de Banach-Steinhaus : $\exists f \in C^0_{2\pi}$ tq $|Ev_n(f)| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$, avec $Ev_n(f) = S_n(f)(x_0)$

↳ la série de Fourier diverge au point x_0

↳ le résultat est FAUX pour $p = +\infty$

- $\mathcal{T}$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$.

ISOMÉTRIE $L^q \to L^p$: (X, ν) espace mesuré σ-fini $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Pour $f \in L^q(X, \mathbb{C}, \nu)$ on définit $L_f : L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \to \mathbb{C}$, $g \longmapsto \int_X f\bar{g}\, d\nu$

  $L_f \in (L^p)'$ (Hölder)

- $\Phi : L^q \longrightarrow (L^p)'$, $f \longmapsto L_f$ est une isométrie (⇒ continue + injective)

Écrire $f = |f|u$, u mesurable et $|u| = 1$, prendre $g = \bar{u}|f|^{q-1}$

$\|f\|_q = \|L_f\|_{L^{p'}} = \sup\left\{\left|\int_X f\bar{g}\, d\nu\right| : g \in L^p,\ \|g\|_p = 1\right\}$

SURJECTIVITÉ : si $\boxed{p < +\infty}$, c'est le théorème de Riesz

EXERCICE 1 – Approximation et interpolation

Pour $1 < p < +\infty$, on considère la pté $(\mathcal{P}_p)$:

$$\exists C_p > 0 \text{ tq } \forall f \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p .$$

1/ – Montrer que $(\mathcal{P}_p)$ équivaut à

$$\forall f \in L^p, \quad \|S_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

• Commençons par supposer $(\mathcal{P}_p)$. Soit $f \in L^p$. On voudrait utiliser $(\mathcal{P}_p)$ pour raisonner par densité de $\mathcal{T}$ dans L^p.

* On remarque dans un premier temps que

$$(\mathcal{P}_p) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall f \in L^p \text{ on a } \|S_n(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

en effet, soit $g_k \xrightarrow[k\infty]{} f$ dans L^p, $g_k \in \mathcal{T}$, on a $\begin{cases} \|g_k\|_p \xrightarrow[k\infty]{} \|f\|_p \\ \|S_n(g_k)\|_p \xrightarrow[k\infty]{} \|S_n(f)\|_p \end{cases}$ car S_n continue $L^p \to L^p$

$$\|S_n(g_k)\|_p \leq C_p \|g_k\|_p \quad \Leftarrow$$

$\downarrow k\infty$ $\qquad \downarrow k\infty$

$$\|S_n(f)\|_p \leq C_p \|g\|_p .$$

* si $g \in \mathcal{T}$, $S_n(g) = g$ pour n assez grand : $[c_k(e_p) = 0 \text{ si } k \neq p]$

et $g = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_{k_j}$

Σ fini

* Soit $\varepsilon > 0$ et par densité soit $g \in \mathcal{T}$ tq $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

On découpe en 3 :

$$\|S_n(f) - f\|_p \leq \|S_n(f) - S_n(g)\|_p + \|S_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\leq C_p \|f - g\|_p + \|g - f\|_p + \|S_n(g) - g\|_p$$

(!) indép. de n, $f - g \in L^p$

$$\leq (C_p + 1)\varepsilon + \|S_n(g) - g\|_p$$

et $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\|S_n(g) - g\|_p = 0$

et donc $\|S_n(f) - f\|_p \leq (C_p + 1)\varepsilon$.

• L'implication réciproque est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus :

On suppose que $\forall f \in L^p,\ \|S_n(f)-f\|_p \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

En particulier, pour chaque $f \in L^p$, $\{|S_n(f)| : n \in \mathbb{N}\}$ borné.

$S_n : L^p \to L^p$ opérateur continu, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ Banach

$\Rightarrow \{\|S_n\|_{p\to p} : n \in \mathbb{N}\}$ borné et on obtient $(\mathcal{P}_p)$ avec $(\forall f \in L^p)$

$C_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\|_{p\to p}$.

2/ Montrer que si $(\mathcal{P}_p)$ est vérifiée (pour $1<p<+\infty$ fixé) alors $(\mathcal{P}_q)$ aussi pour q exposant conjugué $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

• On utilise l'indication, par dualité $L^p - L^q$:

$$\boxed{\|u\|_p = \sup\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\bar{v} : v \in L^q,\ \|v\|_q = 1\right\}}$$

Ici, pour $g \in L^q$, $\|S_n(g)\|_q = \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(g)\bar{f}\right| : \underset{\|f\|_p=1}{f \in L^p}\right\}$

$$\underset{\text{indicat}^\circ}{=} \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\, S_n(\bar{f})\right| : f \in L^p,\ \|f\|_p = 1\right\}$$

et comme $\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\, S_n(\bar{f})\right| \le \|S_n(f)\|_p \|g\|_q \underset{(\mathcal{P}_p)}{\le} C_p \underbrace{\|f\|_p}_{=1} \|g\|_q$

on a finalement $\|S_n(g)\|_q \le \underset{= C_q}{C_p} \|g\|_q$

• Il reste à vérifier l'indication :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}\, S_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}\,(g * D_n) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\,(\bar{f} * D_n(-\cdot))$$

$$\underset{\substack{D_n \text{ paire} \\ D_n(-\cdot)=D_n}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\, \underset{= S_n(\bar{f})}{S_n(\bar{f})}$$

(*) en effet : $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}(x)\, g(t) D_n(x-t)\,dt\,dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} g(t) \underbrace{\int_0^{2\pi} \bar{f}(x) D_n(-(t-x))\,dx}_{= 2\pi\, \bar{f} * D_n(-\cdot)(t)}\, dt$

3/ On suppose qu'il existe une suite d'exposants $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $1 < p_n < +\infty$
- $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
- la propriété $(\mathcal{P}_{p_n})$ est vérifiée ($\rightsquigarrow C_{p_n}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

L'existence d'une telle suite est l'objet de l'exercice 2.

En déduire le théorème

Soit $1 < p < +\infty$.

- Si $p = p_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la question 1/ permet de conclure.
- Si $p > p_0$ alors $p_0 < p < p_{n_0}$ pour n_0 assez grand.
  Si $p < p_0$ alors $\frac{1}{q_{n_0}} < p < p_0$ pour n_0 assez grand où $\frac{1}{q_n} = 1 - \frac{1}{p_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1_+$

dans tous les cas :

$$1 < r_1 < p < r_2 < +\infty \text{ et } (\mathcal{P}_{r_1}), (\mathcal{P}_{r_2}) \text{ vérifiées}$$

- INTERPOLATION COMPLEXE :

$$\begin{cases} S_n : L^{r_1} \longrightarrow L^{r_1} \text{ est linéaire continue } \|S_n\|_{r_1\to r_1} \leq C_{r_1} \\ S_n : L^{r_2} \longrightarrow L^{r_2} \text{ est linéaire continue } \|S_n\|_{r_2\to r_2} \leq C_{r_2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $S_n : L^p \to L^p$ est continue et de plus, avec $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{r_1} + \frac{\theta}{r_2}$, $\theta \in]0,1[$

on a $\boxed{\|S_n\|_{p\to p} \leq \underbrace{C_{r_1}^{1-\theta} C_{r_2}^{\theta}}_{C_p}}$ $\rightsquigarrow$ $(\mathcal{P}_p)$ et donc le théorème pour $p \in]1,+\infty[$.

EXERCICE 2 - Transformée de Hilbert

Pour $f \in \mathcal{T}$, seulement un nombre fini de $C_k(f)$ sont $\neq 0$ comme expliqué précédemment

On définit la transformée de Hilbert sur $\mathcal{T}$:

somme finie

$$\begin{aligned} H : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{T} \\ f &\longmapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-i\,\mathrm{sgn}(k)\, c_k(f)\right) e_k \quad \text{où } \mathrm{sgn}(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k>0 \\ -1 \text{ si } k<0 \\ 0 \text{ si } k=0 \end{cases} \end{aligned}$$

et de même $H_+ f = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>0}} c_k(f) e_k$ et $H_- f = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<0}} c_k(f) e_k$

de sorte que:

$$Hf = -i H_+ f + i H_- f$$

1/- Soit $1 < p < +\infty$. Montrer que

$$\exists K_p > 0,\ \forall f \in \mathcal{T},\ \|Hf\|_p \leq K_p \|f\|_p \Rightarrow (\mathcal{B}_p) \text{ est vérifiée}$$

$H : (\mathcal{T}, \|\ \|_p) \longrightarrow (L^p, \|\ \|_p)$ linéaire continue s'étend à tout L^p par densité

Soit $f \in \mathcal{T}$, on peut écrire $S_n f = \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e_k}_{= f \,\in\, \mathcal{T}} - \sum_{k\geq n+1} c_k(f) e_k - \sum_{k\leq -(n+1)} c_k(f) e_k$

- $c_k(f e_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, \underbrace{e_j(t)\, e^{-ikt}}_{= e^{-i(k-j)t}}\, dt = C_{k-j}(f)$

  $j = -n$: $c_k(f e_{-n}) = c_{k+n}(f)$

- $\sum_{k\geq n+1} c_k(f) e_k \underset{\substack{k' = k-n \geq 1}}{=} \sum_{k'\geq 1} c_{k'+n}(f) e_{k'+n} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k>0}} c_k(f e_{-n}) e_k \cdot e_n$

  i.e. $\boxed{\sum_{k\geq n+1} c_k(f) e_k = H_+(f e_{-n})\, e_n}$

- De même, $\sum_{k\leq -(n+1)} c_k(f) e_k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<0}} C_{k-n}(f) e_{k-n} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<0}} c_k(f e_n) e_k \cdot e_{-n}$

  $k' = k+n$

  $= H_-(f e_n)\, e_{-n}$

D'où $\boxed{S_n f = f - H_+(f e_{-n}) e_n - H_-(f e_n) e_{-n}}$

Il reste à contrôler H_+ et H_- grâce à H.

- On a déjà l'identité $Hf = -iH_+f + iH_-f$

De plus $f = H_+f + H_-f + c_0(f)$ ou encore $H_+f + H_-f = f - c_0(f)$

On en déduit :

$$-2iH_+f = Hf - i(f - c_0(f)) \text{ ou encore } \left[\begin{array}{l} H_+f = \frac{1}{2}iHf + \frac{1}{2}(f - c_0(f)) \\ \text{et } H_-f = -\frac{1}{2}iHf + \frac{1}{2}(f - c_0(f)) \end{array}\right.$$

- $\|f - c_0(f)\|_p \leq \|f\|_p + \|\underset{\text{fonct° constante}}{c_0(f)}\|_p \leq 2\|f\|_p$ et $\|c_0(f)\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right|^p}_{\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt} dx \leqslant \|f\|_p^p$

Hölder ou Jensen

- On obtient en remontant les identités :

$$\|H_+f\|_p \leqslant \frac{1}{2}K_p\|f\|_p + \frac{1}{2}\times 2\|f\|_p = \left(\frac{1}{2}K_p + 1\right)\|f\|_p$$

idem $\|H_-f\|_p \leqslant \left(\frac{1}{2}K_p + 1\right)\|f\|_p$

et finalement $\|S_nf\|_p \leqslant \|f\|_p + \left(\frac{1}{2}K_p + 1\right)\underset{= \|f\|_p}{\|fe_{-n}\|_p} + \left(\frac{1}{2}K_p + 1\right)\underset{= \|f\|_p}{\|fe_n\|_p}$

$$\Rightarrow \boxed{\|S_nf\|_p \leqslant (K_p + 3)\|f\|_p}.$$

21- Montrer qu'il suffit de trouver $K_p' > 0$ telle que $\|Hf\|_p \leqslant K_p'\|f\|_p$ pour tout $f \in T$ et tel que f à valeurs réelles et à moyenne nulle

On suppose qu'on a un tel $K_p' > 0$. Soit $f \in T$, alors $g = f - c_0(f)$ est à moyenne $c_0(g) = 0$.

Et $g_1 = \operatorname{Re} g$, $g_2 = \operatorname{Im} g$ sont à valeurs réelles et à moyenne nulle.

e.g. $c_0(g_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(x)\,dx = \operatorname{Re} c_0(g) \in \mathbb{R}$.

On a par hypothèse $\|Hg_1\|_p \leqslant K_p'\|g_1\|_p$ et $\|Hg_2\|_p \leqslant K_p'\|g_2\|_p$.

$$g = g_1 + ig_2 \Rightarrow Hg = Hg_1 + iHg_2 \Rightarrow \|Hg\|_p \leqslant \|Hg_1\|_p + \|Hg_2\|_p$$
$$\leqslant K_p'(\|g_1\|_p + \|g_2\|_p)$$

et $\quad |g_1(x)| = |\mathrm{Re}\, g(x)| \leq |g(x)|$ d'où $\|Hg\|_p \leq 2K_p^2 \|g\|_p$

On arrive finalement à $Hf = Hg + \underbrace{H_{c_0}(f)}_{=0}$ car $C_0(f) = c_0(f)\, e_0$ constante

et donc $\quad \|Hf\|_p \leq \|Hg\|_p \leq 2K_p^2 \underbrace{\|g\|_p}_{= \|f - C_0(f)\|_p \,\leq\, 2\|f\|_p}$ voir question précédente.

$$\Rightarrow \boxed{\|Hf\|_p \leq 4K_p^2 \|f\|_p}$$

3) On peut maintenant supposer $f \in T$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $C_0(f) = 0$.

(a). Vérifier que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f + iHf)^{2m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

et Hf à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $$f + iHf = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e_k + i.(-i) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underset{\substack{\| \\ \left\{\begin{smallmatrix} 1 & \text{si } k>0 \\ -1 & \text{si } k<0 \end{smallmatrix}\right. ;\ 0 \text{ si } k=0}}{\operatorname{sgn}(k)}\, c_k(f)\, e_k$$

$$= 2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k>0}} c_k(f)\, e_k \quad \text{polynôme trigonométrique}$$

car $C_0(f) = 0$

$$\Rightarrow (f+iHf)(x) = P(e^{ix}) \quad \text{pour } P(T) = 2\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\neq 0}} c_k(f)\, T^k = T.\underbrace{2\sum_{k\in\mathbb{N}} c_{k+1}(f)\, T^k}_{Q(T)}$$

$$= T\, Q(T)$$

et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $\quad (f + iHf)^{2m} = P(T)^{2m} = T^{2m} Q^{2m}(T)$

Comme $T^{2m} Q^{2m}(T)$ a pour coefficient constant 0, on en déduit :

$$C_0\left((f+iHf)^{2m}\right) = 0$$

et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f + iHf)^{2m} = 0$

- Vérifions que Hf est à valeurs réelles dans ce cas : on montre que $\overline{Hf} = Hf$.

$$\overline{Hf} = \overline{-i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)\, c_k(f)\, e_k}$$

somme finie $\quad = i \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(k)\, \overline{c_k(f)}\, \overline{e_k}$ et $\left|\ \begin{array}{l} \overline{c_k(f)} = c_{-k}(f) \text{ car } f \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \overline{e_k} = e_{-k} \end{array}\right.$

$$= i \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underset{\substack{-\operatorname{sgn}(-k) \\ \|}}{\operatorname{sgn}(k)}\, c_{-k}(f)\, e_{-k} = Hf$$

$k' = -k$

(b) - On se donne $0<\varepsilon<1$ et $a,b\geq 0$. On fixe $m\in\mathbb{N}$, $m\neq 0$

$$a^k b^{m-k} \leq \frac{a^m}{\varepsilon^m} + \varepsilon b^m \quad \text{pour } 1\leq k\leq m,\ k\in\mathbb{N}.$$

[Avec la convention $a^m \leq \frac{a^m}{\varepsilon^m}$ OK : si $b=0$ et $k=m$]

$\uparrow \varepsilon\leq 1$

On a tout d'abord $a^k b^{m-k} \leq \begin{cases} a^m & \text{si } b\leq a \\ b^m & \text{si } a\leq b \end{cases} \leq a^m+b^m$

et ensuite avec $a \leftrightarrow a$ et $b \leftrightarrow b\varepsilon$ on obtient

ou $\left| \begin{array}{l} a\leftrightarrow a\varepsilon \\ b\leftrightarrow b \end{array}\right.$ tout pareil

$$a^k b^{m-k}\varepsilon^{m-k} \leq a^m + b^m\varepsilon^m$$

ie. $$a^k b^{m-k} \leq \frac{a^m}{\varepsilon^{m-k}} + b^m \varepsilon^k$$

or
- $0<\varepsilon<1 \Downarrow k\geq 1$: $\varepsilon^k \leq \varepsilon$
- $\varepsilon^{m-k} \geq \varepsilon^m$ ($\Leftarrow m\geq m-k$)

$$\Rightarrow a^k b^{m-k} \leq \frac{a^m}{\varepsilon^m} + b^m\varepsilon$$

(c) Montrer qu'il existe $C_m>0$ (Pour $m\in\mathbb{N}, m\neq 0$) tq $\|Hf\|_{2m} \leq C_m \|f\|_{2m}$ $\forall f\in T$

Soit $m\in\mathbb{N}$, $m\neq 0$. Soit $f\in T$ et on suppose de plus (grâce à la question 2i.)

f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $c_0(f)=0$

- On va développer l'identité $\int_0^{2\pi} (f+iHf)^{2m} = 0$:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} f(x)^k\, i^{2m-k}\, Hf(x)^{2m-k}\, dx$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{2m} i^{-k} \times \underbrace{\int_0^{2\pi} \binom{2m}{k} f(x)^k\, Hf(x)^{2m-k}\, dx}_{\in\mathbb{R} \text{ par la question 3 (a)}} = 0$$

- selon la parité de k, le terme contribue à la partie réelle / imaginaire.
  - k pair : $k=2q$, $i^{-k}=(-1)^q$

et on obtient en prenant la partie réelle de :

$$\sum_{q=0}^{m} \binom{2m}{2q} (-1)^q \int_0^{2\pi} f(x)^{2q}\, Hf(x)^{2(m-q)}\, dx = 0$$

• en mettant le terme $q=0$ de côté, on fait apparaître $\|Hf\|_{2m}^{2m}$:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Hf(x)^{2m}\,dx}_{\|Hf\|_{2m}^{2m}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{m}\binom{2m}{2q}(-1)^{q+1}\int_0^{2\pi}\left[f(x)^2\right]^q\left[Hf(x)^2\right]^{m-q}dx$$

car $Hf\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow Hf^2=|Hf|^2$

$$\|Hf\|_{2m}^{2m} \underset{\text{I.T.}}{\leq} \sum_{q=1}^{m}\binom{2m}{2q}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x)^{2m}}{\varepsilon^m}+\varepsilon\, Hf(x)^{2m}\,dx$$

+ question 3(b)

$a=f(x)^2\geq 0$

$b=Hf(x)^2\geq 0$

$k=q$

$$\leq \sum_{q=1}^{m}\binom{2m}{2q}\left[\frac{1}{\varepsilon^m}\|f\|_{2m}^{2m}+\varepsilon\|Hf\|_{2m}^{2m}\right]$$

• On en déduit $\|Hf\|_{2m}^{2m}\leq \lambda_m\left(\frac{1}{\varepsilon^m}\|f\|_{2m}^{2m}+\varepsilon\|Hf\|_{2m}^{2m}\right)$ pour tout $0<\varepsilon<1$

où $\lambda_m=\sum_{q=1}^{m}\binom{2m}{2q}>0$

on peut "choisir" ε aussi petit qu'on veut : pour $\lambda_m\varepsilon<1$ on a

$$\frac{\varepsilon^m}{\lambda_m}\cdot(1-\lambda_m\varepsilon)\,\|Hf\|_{2m}^{2m}\leq\|f\|_{2m}^{2m}$$

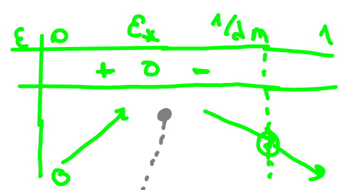
ie. $$\|Hf\|_{2m}^{2m}\leq\frac{\lambda_m}{\varepsilon^m(1-\lambda_m\varepsilon)}\|f\|_{2m}^{2m}$$

· N'importe quel $0<\varepsilon<1$ tel que $1-\lambda_m\varepsilon>0$ convient ...
et on pourrait optimiser sur ε.

Maximiser $\varepsilon^m\times(1-\lambda_m\varepsilon)=\varepsilon^m-\lambda_m\varepsilon^{m+1}$

dérivée ⇝ $m\varepsilon^{m-1}-(m+1)\lambda_m\varepsilon^m=0$

$\underset{\varepsilon>0}{\Leftrightarrow}$ $\varepsilon_*=\frac{m}{(m+1)\lambda_m}<\frac{1}{\lambda_m}$



valeur en ε_* : $\left(\frac{m}{(m+1)\lambda_m}\right)^m\times\frac{1}{m+1}$ ⟵ "C_m"

41- Il reste à conclure.

Grâce à la question 1 et 3 : $(\mathcal{P}_{2m})$ est vérifiée pour tout $m\in\mathbb{N}, m\neq 0$.

La suite $p_m=2m$ convient dans la partie I.