TD3 - ESPACES DE SOBOLEV

EXERCICE 1 - Discontinuité ponctuelle

Notation : $B(x,r)$ boule ouverte

Rappel : $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $u, v \in L^1_{loc}(U)$:

$u = v$ dans $\mathcal{D}'(U) \Leftrightarrow u = v$ p.p.

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0. Enlever hyp "Ω connexe"

On suppose $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$.

On note • $\nabla_p u$ le gradient ponctuel de u, bien défini p.p sur Ω (partout sauf en 0)

• Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$: ∇u le gradient de u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

1- Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $\nabla_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$

Si on considère $v = u|_{\mathcal{U}}$ avec $\mathcal{U} = \Omega \setminus \{0\}$ et $v \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$, $v = u|_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})}$

Ainsi, $\nabla v = \nabla u|_{\mathcal{D}'(\mathcal{U})}$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$

Par ailleurs $\nabla v = \nabla_p u$ puisque $v \in C^1(\mathcal{U})$.

Finalement $\nabla u = \nabla_p u$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{U}) \underset{\text{Localisation}}{\Rightarrow} \nabla_p u = \nabla u$ p.p. dans $\mathcal{U}$

$\Rightarrow \nabla_p u = \nabla u$ pp. dans Ω

$\Rightarrow \nabla_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$

2- Si $\boxed{n=1}$, donner un exemple de telle fonction $u \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ telle que

• $u' \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$

• la dérivée ponctuelle est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, p.ex nulle p.p.

Il suffit de créer un "saut" en 0 $\leadsto$ masse de Dirac dans u' :

$u = H$ où H Heaviside, $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$, on a $u' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$

pourtant la dérivée ponctuelle est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

On va maintenant montrer que pour $\boxed{n \geq 2}$: si $\nabla_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$

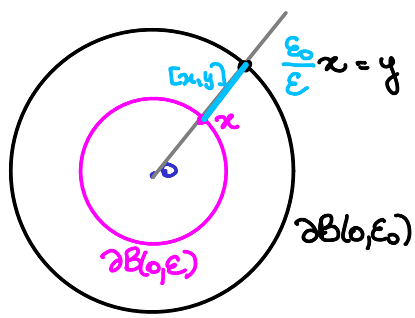
alors :

- $u \in L^1_{loc}(\Omega)$: c'est la partie "difficile".
- $\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$
- $\nabla_p u = \nabla u$ p.p. dans Ω

On suppose désormais $\nabla_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

31_ Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(0,\varepsilon_0) \subset \Omega$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon \to 0_+ \\ \varepsilon \leq \varepsilon_0}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |u| \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0$

Dans cette question on "oublie" le $\nabla_p u$



On fixe la sphère $\partial B(0,\varepsilon_0)$ et on utilise le que $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ pour "contrôler"

$u(x)$ pour $x \in \partial B(0,\varepsilon)$

en fonction de $u(y)$, $y = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} x \in \partial B(0,\varepsilon_0)$

et $\underset{(p)}{\nabla u}$ sur le segment $[x,y]$

Soit $x \in \partial B(0,\varepsilon)$, $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ donc A-F :

pour $y = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} x$, $\quad u(x) = u(y) + \displaystyle\int_{t=\varepsilon}^{\varepsilon_0} \nabla u\left(\frac{t}{\varepsilon} x\right) \cdot \frac{x}{\varepsilon} \, dt$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} v(t) = u\left(\frac{t}{\varepsilon} x\right) \\ v'(t) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla u\left(\frac{t}{\varepsilon} x\right) \cdot x \end{array} \right.$

En intégrant sur $\partial B(0,\varepsilon)$:

$$\int_{x \in \partial B(0,\varepsilon)} |u(x)| \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \int_{x \in \partial B(0,\varepsilon)} \left|u\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} x\right)\right| d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \int_{t=\varepsilon}^{\varepsilon_0} \int_{x \in \partial B(0,\varepsilon)} \left|\nabla u\left(t \frac{x}{\varepsilon}\right)\right| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \, dt$$

$$y = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} x \qquad = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{n-1} \int_{y \in \partial B(0,\varepsilon_0)} |u(y)| \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ (n>1)} + \int_{t=\varepsilon}^{\varepsilon_0} \int_{z \in \partial B(0,t)} |\nabla u(z)| \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}(z) \, . dt$$

$z = \frac{t}{\varepsilon} x$ $\qquad t = |z|$

et on se concentre sur le $2^{\text{ème}}$ terme :

$$\int_{B(0,\varepsilon_0) \setminus B(0,\varepsilon)} \varepsilon^{n-1} \frac{|\nabla u(z)|}{|z|^{n-1}} \, dz$$

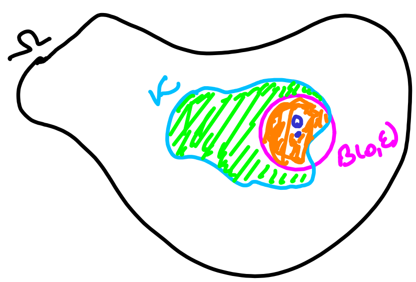
On peut conclure par convergence dominée :

- Convergence simple : $\varepsilon^{n-1} \mathbb{1}_{B(0,\varepsilon_0)\setminus B(0,\varepsilon)}(z) \cdot \dfrac{|\nabla u(z)|}{|z|^{n-1}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0_+]{} 0$ $\quad n>1$ (!)
- Domination $L^1(B(0,\varepsilon_0))$: $|z| \geq \varepsilon$

$$\left| \varepsilon^{n-1} \mathbb{1}_{B(0,\varepsilon_0)\setminus B(0,\varepsilon)}(z) \cdot \frac{|\nabla u(z)|}{|z|^{n-1}} \right| \leq |\nabla_{(p)} u(z)| \in L^1 \text{ par hypothèse}$$

4/ - En déduire que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Soit $K \subset \Omega$ compact, $u \in C(\Omega \setminus \{0\})$ donc $u \in L^1(K \cap \Omega \setminus B(0,\varepsilon))$, $\forall \varepsilon > 0$.



Il reste à regarder ce qui se passe sur $K \cap B(0,\varepsilon)$:

$$\int_{K\cap B(0,\varepsilon)} |u| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |u| = \int_{r=0}^{\varepsilon} \int_{\partial B(0,r)} |u(x)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, dr$$

$$= \int_{r=0}^{\varepsilon} f(r)\, dr$$

et $\lim\limits_{r\to 0_+} f(r) = 0 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0, \forall r \leq \varepsilon_1, |f(r)| \leq 1$ $\quad$ ($\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$)

$$\Rightarrow \int_{K\cap B(0,\varepsilon_1)} |u| \leq \int_{r=0}^{\varepsilon_1} 1 = \varepsilon_1 < +\infty$$

$$\text{et} \int_K |u| \leq \|u\|_{L^1(K \cap \Omega\setminus B(0,\varepsilon_1))} + \varepsilon_1 < +\infty.$$

5/ - Montrer que $\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\nabla u = \nabla_p u$ p.p. dans Ω.

Comme $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et son gradient distributionnel $\nabla u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est bien défini.

En reprenant l'ouvert $U = \Omega \setminus \{0\}$, $u \in C^1(U) \Rightarrow \nabla u = \nabla_p u$ dans $\mathcal{D}'(U)$

[Prendre $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\langle \nabla u, \varphi \rangle = -\langle u, \nabla\varphi \rangle = -\int_U u \nabla\varphi \underset{\substack{IPP\\C^1}}{=} \int_U \varphi \nabla_p u = \langle \nabla_p u, \varphi \rangle$]

Mais on doit vérifier que ∇u ne contient pas de partie $c\,\delta_0$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\chi \in \mathcal{D}(B(0,1))$, $0 \leq \chi \leq 1$ et $\chi = 1$ au vois de 0, sur $B(0,\frac{1}{2})$ p.ex

et $\chi_\varepsilon(x) = \chi(\frac{x}{\varepsilon})$: $\operatorname{supp} \chi_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$, $\chi_\varepsilon = 1$ au vois de 0

$\Rightarrow (1-\chi_\varepsilon) \in \mathcal{D}(U)$

On décompose $\varphi = \underbrace{(1-\chi_\varepsilon)\varphi}_{\in \mathcal{D}(U)} + \underbrace{\chi_\varepsilon \varphi}_{\in \mathcal{D}(B(0,\varepsilon))}$

On a alors $\langle \nabla u, \varphi \rangle = \langle \nabla u, (1-\chi_\varepsilon)\varphi \rangle + \langle \nabla u, \chi_\varepsilon \varphi \rangle$

$= \langle \nabla_p u, (1-\chi_\varepsilon)\varphi \rangle + \langle \nabla u, \chi_\varepsilon \varphi \rangle$

Il reste à regarder la limite $\varepsilon \to 0_+$

- $\langle \nabla_p u, (1-\chi_\varepsilon)\varphi \rangle = \int_\Omega \nabla_p u (1-\chi_\varepsilon)\varphi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_\Omega \nabla_p u \varphi$

par convergence dominée : convergence p.p car $1-\chi_\varepsilon(x)$ converge vers 1 quand $\varepsilon \to 0$. pour $x \neq 0$

et domination $|\nabla_p u (1-\chi_\varepsilon)\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{|\nabla_p u|}_{\in L^1(\operatorname{supp}\varphi) \text{ car } \nabla_p u \in L^1_{loc}(\Omega)} \mathbb{1}_{\operatorname{supp}\varphi}$

- $|\langle \nabla u, \chi_\varepsilon \varphi \rangle| = |\langle u, \nabla(\chi_\varepsilon \varphi) \rangle|$

$\leq \underbrace{\int_\Omega |u \varphi \nabla \chi_\varepsilon|}_{\leq \frac{1}{\varepsilon} \|\varphi\|_\infty \|\nabla \chi\|_\infty \times \int_{B(0,\varepsilon)} |u|} + \underbrace{\int_\Omega |u \chi_\varepsilon \nabla \varphi|}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0_+]{} 0}$

à nouveau par CVD $\chi_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \quad \forall x \neq 0$

domination $\|\nabla \varphi\|_\infty \mathbb{1}_{\operatorname{supp}\varphi} |u|$

$\nabla \chi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ imp

et $\nabla \chi_\varepsilon = 0$ pour $x > \varepsilon$

et $\frac{1}{\varepsilon} \int_{B(0,\varepsilon)} |u| = \frac{1}{\varepsilon} \int_{r=0}^{\varepsilon} \underbrace{\int_{\partial B(0,r)} |u| \, d\mathcal{H}^{n-1}}_{f(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \text{ donc } |f(r)| \leq \delta \text{ pour } r \leq \varepsilon_\delta} dr \xrightarrow[\varepsilon \to 0_+]{} 0 \quad (\leq \delta \quad \forall r \leq \varepsilon_\delta)$