BMO — $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

$f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ $\boxed{\text{ssi}}$ $\exists M \geq 0$ tq $\forall B \subset \mathbb{R}^n$ boule, (ouverte ou fermée)

$\exists C_B \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ si f est à valeurs complexes)

t.q. $\boxed{\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - C_B|\,dx \leq M}$

EXERCICE 1 : $\ln|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$

1/ On définit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ boule, $B = B(a,r)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

a/ Montrer qu'on peut se ramener au cas où $r = 1$.

On suppose qu'on a $M > 0$ tel que $\forall B \subset \mathbb{R}^n$ boule de rayon 1, $\exists C_B \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - C_B|\,dx \leq M$$

On a alors

$$|B(a,r)| = [\omega_n r^n] \qquad \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(a,r)} |\ln|x| - \underbrace{\alpha}_{\text{on le cherche}}|\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\omega_n r^n}\, r^n \int_{B(a,1)} |\ln|ry| - \alpha|\,dy$$

chgt. var dans $\mathbb{R}^n$

- $x = ry \Leftrightarrow y = \frac{x}{r}$
- $x \in B(a,r) \Leftrightarrow y \in B(a,1)$
- "$dx = r^n dy$"

$$= \frac{1}{|B(a,1)|}\int_{B(a,1)} |\ln|y| - \underbrace{(\alpha - \ln r)}_{\text{"}C_B\text{" pour } B = B(a,1) \text{ de rayon 1.}}|\,dy$$

$\leq M$ en choisissant $\boxed{\alpha = \ln r + C_{B(a,1)}}$

On peut maintenant supposer $B = B(a,1)$ boule de rayon 1.

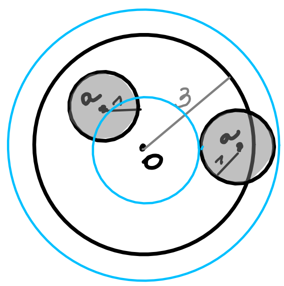
b/ On distingue les cas $|a|\leq 2$ et $|a|>2$

- Si $|a|\leq 2$, on a $B(a,1)\subset B(0,3)$ et on peut prendre

$M_1 = \frac{\|F\|_{L^1(B(0,3))}}{\omega_n}$ et $C_B = 0$:

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - 0|\,dx \leq M_1$$

- si $|a|>2$, on a $B(a,1)\subset\{x\in\mathbb{R}^n : |a|-1<|x|<|a|+1\}$



On remarque que $\forall x\in B(a,1)$, $|x|>|a|-1>1$

$\Rightarrow$ F est 1-Lip sur $B(a,1)$

$\frac{1}{|x|}\leq 1$

$\Rightarrow$ $|\ln|x| - \ln|a|| \leq ||x|-|a|| \leq |x-a| < 1$

et on peut prendre $C_B = \ln|a|$ et $M_2 = 1$:

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - \ln|a|| \leq M_2$$

Rque, on a aussi :

$|\ln|x| - \ln|a|| = \left|\ln\frac{|x|}{|a|}\right|$

$\leq \max\left(\ln\frac{|a|+1}{|a|}, -\ln\frac{|a|-1}{|a|}\right) \leq \ln 2.$

$\nabla F(x) = \frac{\nabla(|x|)}{|x|} = \frac{x}{|x|^2} \Rightarrow |\nabla F(x)| = \frac{1}{|x|}$

2/ Soit $f\in BMO(\mathbb{R}^n)$ and $0<\alpha\leq 1$. Montrer que $|f|^\alpha\in BMO(\mathbb{R}^n)$

- La fonction $|\cdot|^\alpha$ est α-Höldérienne (étude de fonction de $(t-1)^\alpha - t^\alpha + 1$)
- $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\left||f(x)|^\alpha - |C|^\alpha\right| \leq |f(x) - C|^\alpha$
- Soit $B\in\mathbb{R}^n$ boule,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left||f(x)|^\alpha - |C|^\alpha\right| dx \leq \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - C|^\alpha\, dx$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - C|\,dx\right)^\alpha$$

ou Jensen $t\mapsto t^\alpha$ concave

$$\leq M^\alpha \text{ on choisissant } C = C_B$$

$$\int_B |f(x)-C|^\alpha dx \leq \left(\int_B |f(x)-C|\,dx\right)^\alpha \times \underbrace{\left(\int_B 1^q\right)^{1-\alpha}}_{\frac{|B|}{|B|^\alpha}}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\begin{cases} p = \frac{1}{\alpha} \\ q = \frac{1}{1-\alpha} \end{cases}$

$\alpha + \frac{1}{q} = 1$

31- Soit $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

<u>NJW</u> : $f \notin BMO(\mathbb{R})$

EXERCICE 2 - Les normes BMO,p sont équivalentes

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\|f\|_{BMO,p} := \sup_{\substack{B \\ \text{boule (ouverte)}}} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - m_B f|^p \, dx \right\}^{1/p}}$$

où $m_B f = \frac{1}{|B|} \int_B f$ moyenne de f sur B

On va montrer que toutes les normes $\| \ \|_{BMO,p}$ sont équivalentes à $\| \ \|_{BMO} := \| \ \|_{BMO,1}$

• "Facile" : $\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO,p}$

C'est une conséquence de l'inégalité de Jensen :

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - m_B f|^p \, dx \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - m_B f| \, dx \right)^p$$

on prend la $(\ )^{1/p}$ puis $\sup_B$.

• Conséquence du théorème de John et Nirenberg :

Théorème [John-Nirenberg]. Soit $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Il existe deux constantes dimensionnelles $\begin{cases} C_n > 0 \\ \lambda_n > 0 \end{cases}$ telles que

$$\frac{1}{|B|} \int_B \exp\left(\frac{\lambda_n}{\|f\|_{BMO}} |f(x) - m_B f| \right) dx \leq C_n$$

C_n et $\lambda_n = \frac{1}{10n}$ pour les cubes

On prend le plus petit cube Q qui contient B

$$\frac{1}{|B|} \int_B \dots \leq \frac{1}{|B|} \int_Q \leq \frac{|Q|}{|B|} \cdot C_n$$

$B = B(x, r) \to Q = Q(x, r) \to \frac{|Q|}{|B|} = \frac{2^n r^n}{\omega_n r^n} = \frac{2^n}{\omega_n}$

NON $m_Q f \leftrightarrow m_B f$

À partir de là c'est simple : on compare t^p à e^t pour $t \geq 0$

on sait que $t^p \leq M_p e^t$ où $M_p = \sup_{t \geq 0} t^p e^{-t}$

on en déduit :

avec $t = \frac{\lambda_n}{\|f\|_{BMO}} |f(x) - m_B f|$

$$\frac{\lambda_n^p}{\|f\|_{BMO}^p}|f(x)-m_Bf|^p \leq M_p \exp\left(\frac{\lambda_n}{\|f\|_{BMO}}|f(x)-m_Bf|\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_n^p}{\|f\|_{BMO}^p}\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-m_Bf|^p \leq M_p C_n$$

$\frac{1}{|B|}\int_B$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-m_Bf|^p \leq M_p C_n \lambda_n^{-p} \cdot \|f\|_{BMO}^p$$

$\Rightarrow$ sup B ball.

$$\boxed{\|f\|_{BMO,p} \leq \frac{(M_pC_n)^{1/p}}{\lambda_n}\|f\|_{BMO}}$$