TD7 - AUTOUR DU THÉORÈME D'EXTENSION DE WHITNEY

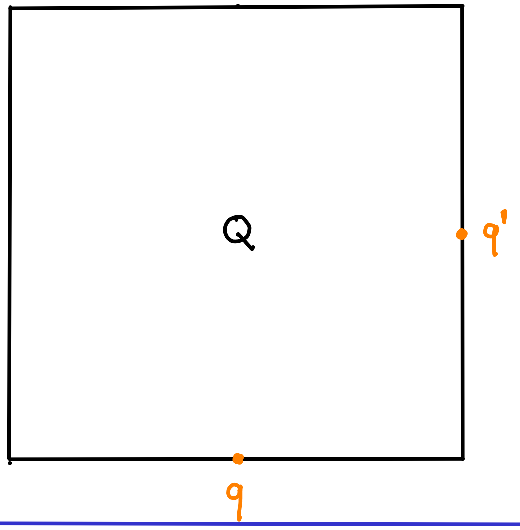
Construction de la courbe de Whitney

n = 0

- $Q \subset \mathbb{R}^2$ carré unité
- q milieu du côté "du bas" $[0,1] \times \{0\}$

  q' milieu du côté "de droite" $\{1\} \times [0,1]$

q point d'entrée
q' point de sortie

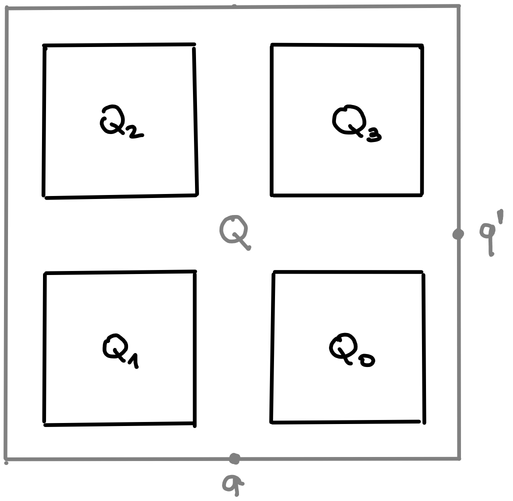


n = 1

On coupe Q en 4 cases en joignant les milieux des côtés opposés.

- Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 carrés de côté $\frac{1}{3}$

  ↳ au centre de ces cases
  ↳ en ordre cyclique en partant de la case commune à q et q'



- On relie les carrés par des segments joignant les milieux de côtés se faisant face :

  sortie de Q_0 entrée dans Q_1

  $Q_0 \to Q_1$: $A_1 = [q_0' q_1]$

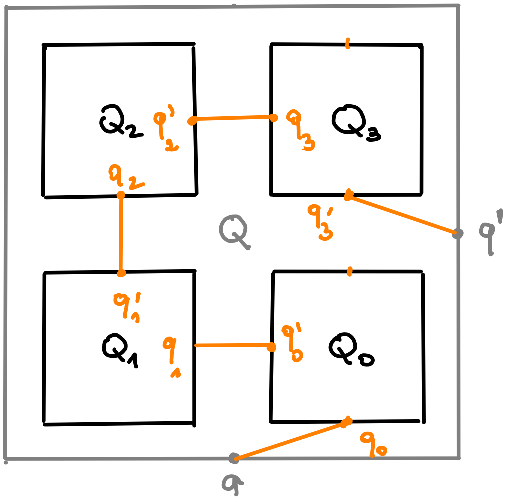
  $Q_1 \to Q_2$: $A_2 = [q_1' q_2]$

  $Q_2 \to Q_3$: $A_3 = [q_2' q_3]$

  <u>Mais</u> : on ne relie pas Q_3 et Q_0.

- On place q_0 milieu adjacent à q_0' et le plus proche de q

  q_3' milieu adjacent à q_3 et le plus proche de q'



- On définit les segments

  $Q^c \to Q_0$: $A_0 = [q, q_0]$

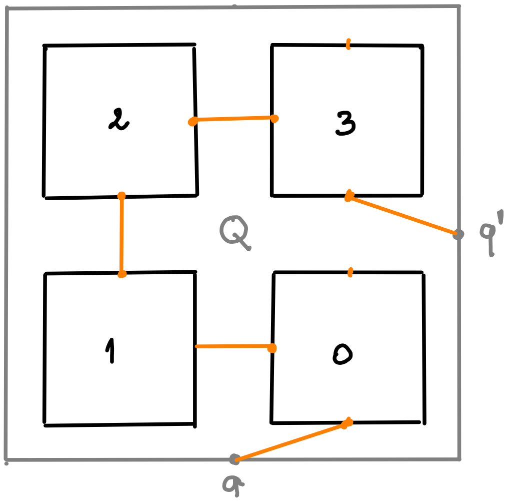
  $Q_3 \to Q^c$: $A_4 = [q_3, q']$

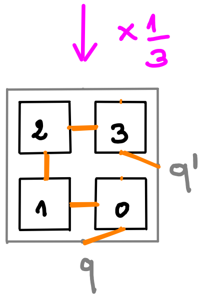
Principe de l'itéartion : l'exemple de Q_0

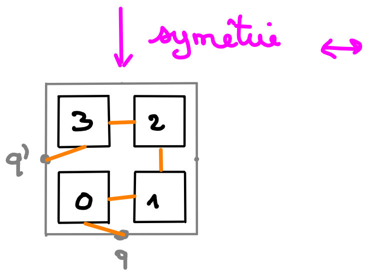
- On réduit par une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ la brique élémentaire obtenue $(n=1)$ afin de pouvoir la placer dans Q_0
- On insère la brique dans Q_0 et on effectue rotation/symétrie afin de superposer "entrée" et "sortie" correctement

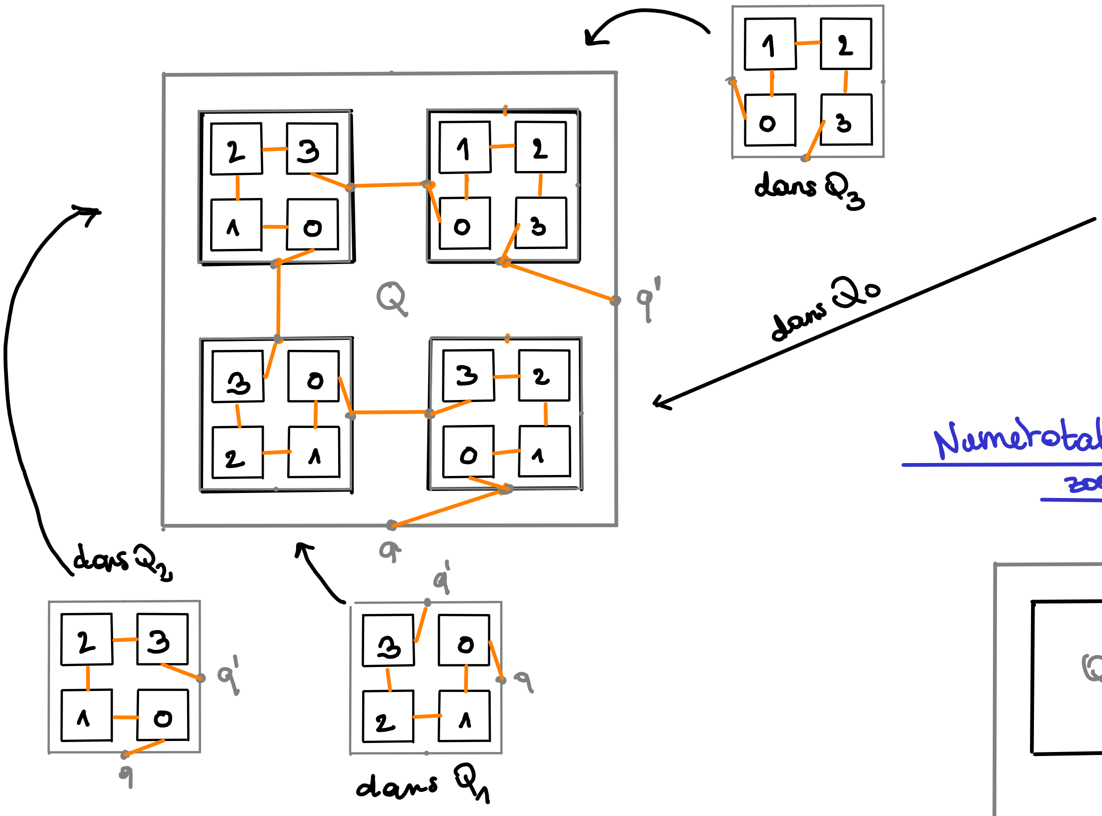
$$q \downarrow q_0 \qquad q' \downarrow q'_0$$

- De même pour les 3 autres carrés : bien superposer entrée et sortie



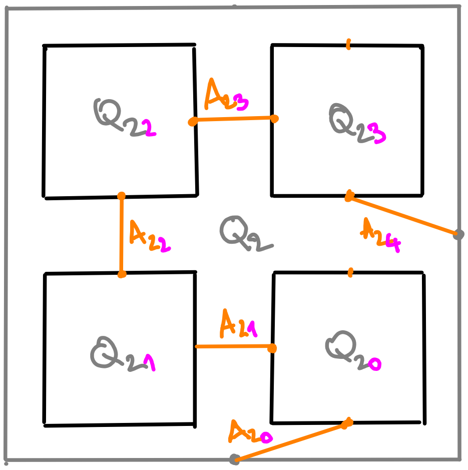






Numérotation des nouveaux éléments

zoom sur Q_2



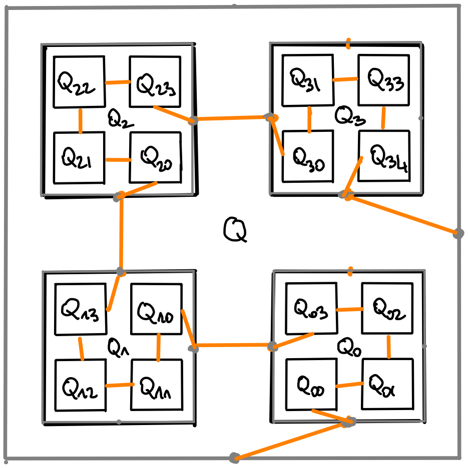
- À l'étape $n \in \mathbb{N}^*$, on a 4^m cubes indexés par $\{0,1,3,4\}^m$:

$$\left\{ Q_{i_1,i_2\dots i_m} : i_1,\dots,i_m \in \{0,1,2,3\}^m \right\}$$

- À l'étape $n \in \mathbb{N}^*$, on ajoute $5 \times 4^{n-1}$ segments

$$\left\{ A_{i_1\dots i_{n-1}, i_n} : \begin{array}{l} i_1,\dots,i_{n-1} \in \{0,1,2,3\} \\ i_n \in \{0,1,2,3,4\} \end{array} \right\}$$

Numérotations des cubes



- À chaque étape $n \in \mathbb{N}$, on relie 4^m carrés par des unions de segments.

↳ on note K_n l'union des 4^n carrés et $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ leur intersection décroissante

$$K \xrightarrow{\sim} \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}^*}$$

$$x \longmapsto (i_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} Q_{i_1\dots i_n}$$

$\parallel$

Q_ι pour $\iota = (i_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Courbe de Whitney Γ :

- Γ est l'union de K et de tous les segments $A_{i_1\dots i_n}$: $\left| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ (i_k)_{k=1,\dots,n-1} \in \{0,1,2,3\}^{n-1} \\ i_n \in \{0,1,2,3,4\} \end{array} \right.$

  On a relié les points du Cantor K par des arcs affines par morceaux.

- Paramétrisation $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Gamma$

  * On subdivise $I = [0,1]$ en 9 segments de même longueur

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{9}\right] ; \quad I_1 = \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] ; \quad I_2 = \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right] ; \quad I_3 = \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{8}\right] ; \quad I_4 = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$\downarrow$ A_0 $\quad$ $\downarrow$ A_1 $\quad$ $\downarrow$ A_2 $\quad$ $\downarrow$ A_3 $\quad$ $\downarrow$ A_4

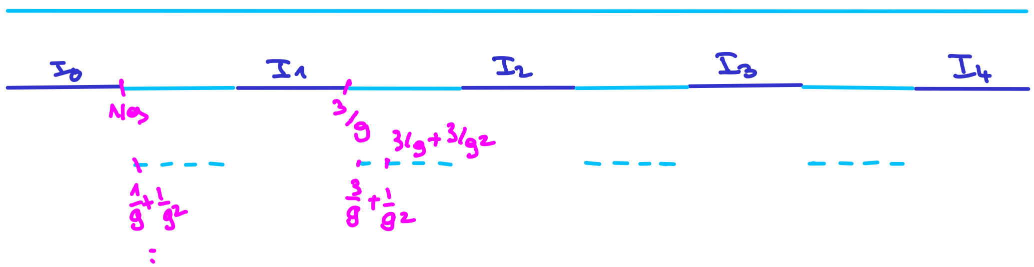
  * On a laissé de côté (aux extrémités près) 4 segments : 1 par cube et on itère : pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{pour } \begin{array}{l} i_1,\dots,i_{n-1} \in \{0,1,2,3\}^{n-1} \\ i_n \in \{0,1,2,3,4\} \end{array} \left| \; I_{i_1\dots i_n} := \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2i_k+1}{9^k} \right) + \frac{2i_n}{9}, \sum_{k=1}^{n} \frac{2i_k+1}{9} \right] \right.$$

$$\Big\downarrow \gamma$$

$$A_{i_1\dots i_n}$$

  * Il reste dans $[0,1]$ les points d'un Cantor :



$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9^k} \iff i_k \equiv 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\overset{1,3,5 \text{ ou } 7}{\uparrow}}{9^k}$$

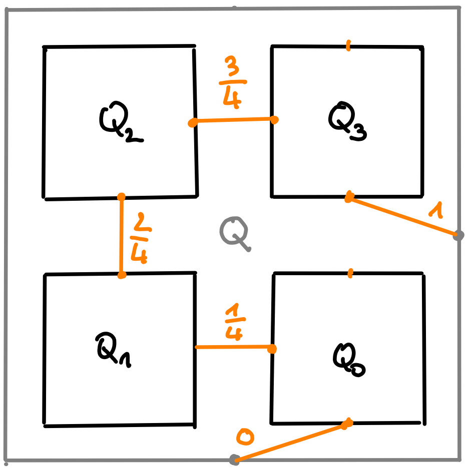
$$\gamma\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2i_k+1}{9^k}\right) = Q_c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} Q_{i_1\dots i_k}$$

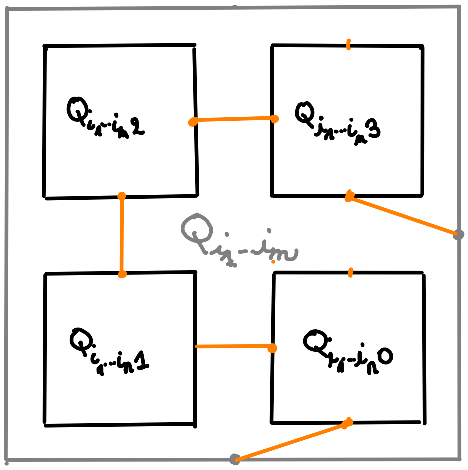
La paramétrisation γ ainsi définie est un homéo $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Gamma$

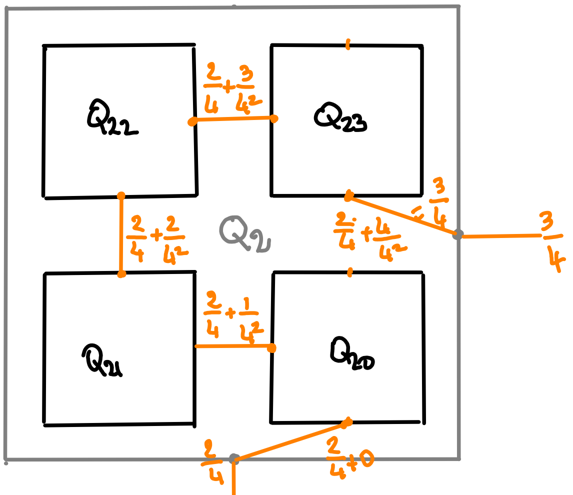
Attention : γ pas Lipschitz, même localement.
↳ Γ contient K qui est de dimension de Hausdorff ...

$$\dim_H K = \dim_H K_{1/3} \times \overset{\text{Cantor triadique}}{K_{1/3}}$$
$$= 2\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

Construction de $f : \Gamma \longrightarrow [0,1]$







5 segments : $A_{i_1\dots i_n 0} \rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k} + \frac{0}{4^{k+1}}$

1 1
2 2
3 3
4 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k} & \text{si } (x,y) \in A_{i_1 \cdots i_n} \ : \ i_1, \dots, i_{n-1} \in \{0,1,2,3\},\ i_n \in \{0,1,2,3,4\} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i_k}{4^k} & \text{si } (x,y) = Q_\iota \text{ où } \iota = (i_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}^*} \end{cases}$$

1/ Si (x,y), $(x',y') \in \Gamma$ sont dans un même carré $Q_{i_1 \cdots i_n}$ alors

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \frac{1}{4^n}$$

- si $(x,y) = Q_\iota$ pour $\iota = (j_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ alors $i_1 = j_1 \cdots i_n = j_n$

$$Q_\iota = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} Q_{j_1 \cdots j_k}$$

$$\frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

et $$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{j_k}{4^k}}$$

$$\underset{j_k \leq 3}{\leq} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} \times 3 = 3 \times \frac{1}{4^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^n}$$

$$\leq \frac{1}{4^n}$$

- si $(x,y) \in A_{j_1 \cdots j_p}$ alors $p \geq n$ et $j_1 = i_1 \cdots j_n = i_n$

et de même $$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k} + \sum_{k=n+1}^{\cancel{p} \to +\infty} \frac{j_k}{4^k}$$ quitte à poser $j_k = 0$ pour $k > p$

Cela vaut pour (x',y') également et donc

$$|f(x,y) - f(x',y')| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{j_k}{4^k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{j'_k}{4^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\overset{\in\{0,1,2,3,4\}}{|j_k - j'_k|}}{4^k}$$

$$\leq 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$$

En fait on peut faire mieux : à l'entrée f vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k}$ sur $A_{i_1 \cdots i_n 0}$

à la sortie f vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k} + \frac{4}{4^{n+1}}$ sur $A_{i_1 \cdots i_n 4}$

$$| \ominus | = \frac{1}{4^n}$$

et f est “croissante le long de Γ”

21- Soient $(x,y), (x',y') \in \Gamma$ deux points séparés par un points Q_ι [$\iota = (j_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$]

Soit $Q_{i_1\cdots i_m}$ le plus petit carré qui les contient tous les deux.

Mq:

$$|(x,y)-(x',y')| > \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$$

- L'existence de $Q_{i_1\cdots i_n}$ est assurée : • Q contient tous les points
  • s'ils appartiennent au même carré à chaque étape alors ils sont égaux $(x,y)=(x',y')$

↳ L'un de (x,y) ou (x',y') peut être égal au Q_ι qui les sépare.

Il faut distinguer 3 cas :

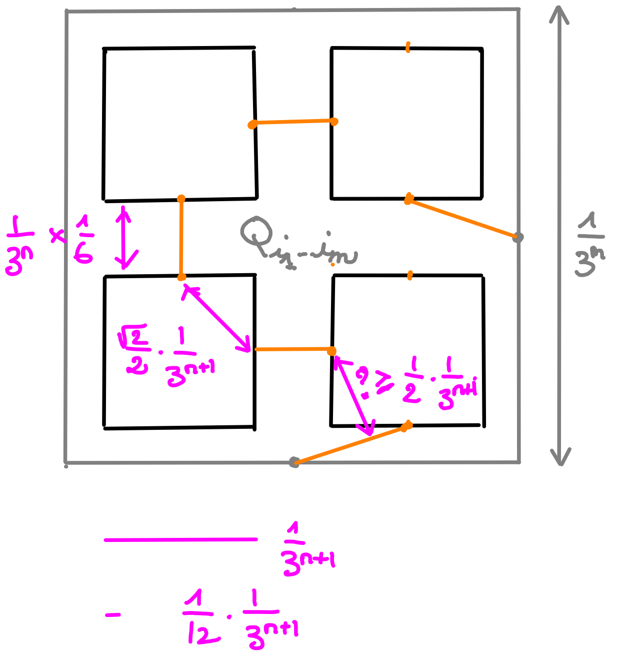
(i). $(x,y) \in$ carré génération n+1 et $(x',y') \in$ segment génération n+1

(ii). (x,y) et $(x',y') \in$ carré génération n+1

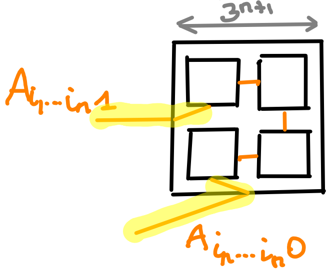
(iii). (x,y) et $(x',y') \in$ segment génération n+1

- (ii) : le plus facile ; deux carrés $\neq$ sont à distance au moins $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n}$

- (iii) : la plus petite distance est entre $A_{i_1\cdots i_n 0}$ et $A_{i_1\cdots i_n 1}$ et est $> \frac{1}{2}$ côté de $Q_{i_1\cdots i_n 0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$



- (i) : c'est plus compliqué si le segment et le cube sont adjacents



pas de point de la forme Q_ι entre

- $A_{i_1\cdots i_n 0}$ et $A_{i_1\cdots i_n 00}$
- $A_{i_1\cdots i_m 04}$ et $A_{i_1\cdots i_n 1}$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$

$\|$

la distance est $\geq$ distance entre $A_{i_1\cdots i_n 0}$ et $Q_{i_1\cdots i_n 00} >$ distance carré au bord

Rque : on pourrait prendre un rapport $\lambda < \frac{1}{2}$ à la place de $\frac{1}{3}$ $\rightsquigarrow$ $\lambda^\alpha = \frac{1}{4}$ ie $\alpha = \frac{\ln 4}{\ln 1/\lambda}$

$< \frac{\ln 4}{\ln 2}$
$= 2$

3/- Montrer que f est α-Hölder et expliciter α.

- Soit $(x,y), (x',y') \in \Gamma$ tq dans la question 2-

alors en posant α tq. $\frac{1}{3^\alpha} = \frac{1}{4}$ $\left[4 \cdot \frac{1}{3^\alpha} = 1 \right]$

on obtient

$$|f(x,y) - f(x',y')| \overset{\downarrow 1-}{\leq} \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{3^n}\right)^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{3^n} \overset{\downarrow 2-}{\leq} 3.12.|(x,y)-(x',y')|$$

$$\leq (3 \times 12)^\alpha \, |(x,y) - (x',y')|^\alpha$$

- Si maintenant (x,y) et (x',y') ne sont séparés par aucun point de la forme Q_i :

ils sont sur une même suite de segments

* entrants : $A_{i_1 \cdots i_m}$ et $A_{i_1 \cdots i_m 0 \cdots 0}$

un peu pénible à écrire

carré juste avant génératᵒ n+…

* sortants : $A_{i_1 \cdots i_m}$ et $A_{\underbrace{i_1 \cdots (i_n - 1)}_{} 4}$ ou $A_{i_1 \cdots (i_n - 1) 3 \cdots 3 4}$

$\uparrow$ $i_m \neq 0$

carré juste avant génération n

4 → dernier segment

et f est constante sur de telles suites de segment adjacents

* cas " entrants " facile : on ajoute des zéros dans la $\sum \frac{i_k}{4^k}$

voir construction →

* cas "sortant" : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{4^k} + \frac{i_n - 1}{4^n} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{3}{4^k} + \frac{4}{4^{n+p+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{4^k}$

Comme f est constante, l'estimation Hölder est en particulier vraie.

$\alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ ($\leftarrow$ dim K)

4/- On rappelle une variante du théorème d'extension de Whitney (12.d) avec $G = 0$ (plus facile en fait)

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$
On suppose :

Ici $\alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} - 1$

$$\forall \xi \in F, \ \forall y \in F, \ |f(y) - f(\xi)| \leq |y-\xi| \, \mathcal{E}(|y-\xi|)$$

où $\mathcal{E}(r)$ croît avec $r \geq 0$ et $\mathcal{E}(r) \xrightarrow[r \to 0_+]{} 0$: **ex** : $\mathcal{E}(r) = Cr^{\alpha}$

ALORS il existe g extension de f à $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$
de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus F$

telle que
$$|Dg(x) - Dg(y)| \leq C\,\mathcal{E}(M|x-y|) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

voir preuve →
"Dg existe et est donnée par G sur F"

et $\quad Dg(y) = 0 \quad \forall y \in F$

Rque. on aurait pu s'en sortir avec le théorème 12c (sa preuve...).