Équation de transport et lois de conservation scalaires - discrétisation par volumes finis.

L'équation de transport est l'équation linéaire

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}\big(v(t,x)u(t,x)\big)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,$$

où la vitesse v est une fonction de classe C^1 donnée. Cette équation décrit des phénomènes de transport à vitesse v : d'un fluide, d'une nuage de fumée, d'une densité de véhicules,.... Si la vitesse v est constante, supposons connue la configuration de u à l'instant initial $t=0$: $u(0,x)=u_0(x)$, avec u_0 fonction de classe C^1 donnée. Alors la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)+\dfrac{\partial}{\partial x}\big(vu(t,x)\big)=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u_{|t=0}=u_0, & x\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{1}$$

est donnée par

$$u(t,x)=u_0(x-vt),\ x\in\mathbb{R},\ t>0.$$

Une loi de conservation est une équation non linéaire de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u+\frac{\partial}{\partial x}f(u)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\tag{2}$$

où la fonction f, appelée le flux, est une fonction de classe C^1 donnée. Cette équation peut être vue comme une équation de transport où la vitesse dépend de la solution. Une des caractéristiques principales de cette équation est que ses solutions peuvent devenir discontinues, même lorsque la donnée initiale est continue. On doit alors chercher des solutions faibles de cette équation, au sens des distributions, autrement dit des solutions u vérifiant

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}(u\varphi_t+f(u)\varphi_x)dt\,dx=0,$$

pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{C}_C^\infty(]0,+\infty\times\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode des volumes finis pour approcher les solutions de ce type d'équations est de diviser le domaine $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en des volumes de contrôle, d'« intégrer la solution u dans ces volumes », en prenant comme fonction test φ une fonction approchant la fonction indicatrice des volumes, et d'approcher les flux au bord. Ici on va considérer des volumes associés à un maillage cartésien de $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, c'est-à-dire des volumes de la forme

$$[t^n,t^{n+1}[\times[x_j,x_{j+1}[,$$

avec $t^n=nk$ et $x_j=jh$, k et h étant respectivement les pas de temps et d'espace. Dans ce cadre, l'écriture d'un schéma de volumes fines est analogue à celle d'un schéma de différences finies.

1 Résolution approchée de l'équation de transport à vitesse constante

On s'intéresse à la résolution approchée de l'équation de transport (1) dans un intervalle $[a,b]$. Pour cela on introduit :

— $M>0$ le nombre de points de la discrétisation de l'intervalle $[a,b]$, $h=(b-a)/(M+1)$ le pas de la discrétisation et $x_j=a+jh,\ j=0,\dots,M+1$ les points du maillage spatial ;

— le pas de temps $k > 0$ et $t^n = nk,\ n \in \mathbb{N}$, les instants temporels ;
— le nombre $\lambda = v\frac{k}{h}$, appelé nombre de Courant-Friedrichs-Levy (CFL).

On cherche alors des valeurs u_j^n approchant

$$\frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} u(t^n, x)\, dx$$

et pour ce faire on va considérer les schémas numériques suivantes :

— *Schéma centré explicite*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \ ;$$

— *Schéma décentré amont*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \ \ (\text{si } v > 0 \ ; \text{ ce serait } \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \text{ au lieu de } \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \text{ si } v < 0) \ ;$$

— *Schéma de Lax-Friedrichs*

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} + v\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \ ;$$

— *Schéma de Lax-Wendroff*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + v\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - v^2 k\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2} = 0.$$

On remarque que la solution exacte de (1) vérifie

— $u_0 \geq 0 \Longrightarrow u \geq 0$;
— $\|u\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}$.

Notre objectif est d'analyser le comportement des schémas suggérés vis à vis ces propriétés.

On considère dans la suite une donnée initiale gaussienne centrée en le milieu du segment $[a, b]$:

$$u_0(x) = \exp(-5(x - (b + a)/2)^2),\ x \in \mathbb{R}.$$

Tans que le temps reste petit, il est raisonnable d'imposer dans ce cas la condition aux limites $u_0^n = u_{M+1}^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1. Programmer les deux premiers schémas. Vérifier numériquement que le schéma décentré amont est stable sous la condition, dite CFL,

$$\lambda = v\frac{k}{h} \leq 1.$$

Tester le schéma décentré avec des pas h et k ne respectant pas cette condition. Montrer que, sous cette condition, le schéma décentré amont vérifie

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \max_j |u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^n|.$$

Exercice 2. [Conditions aux limites périodiques]
Lorsque u_0 est une fonction T-périodique, à $t \geq 0$ fixé, la solution de (1) $x \in \mathbb{R} \longmapsto u(x, t)$ est également T-périodique. Dans ce cas, quand on approche numériquement la solution, on prend souvent $[a, b] = [0, T]$ et des conditions aux limites *périodiques* $u_0^n = u_{M+1}^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Programmer le schéma décentré dans ce cas et le tester avec $u_0(x) = \cos(\pi x)$.

Dans la suite on considère $[a, b] = [-1, 2]$ et deux données initiales, une continue donnée par $u_0(x) = e^{-25x^2}$, l'autre discontinue donnée par la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, 0]$. La condition aux limites à gauche s'écrit donc $u_0^n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. **[Instabilité du schéma centré explicite]**
L'objectif de cet exercice est de remarquer par l'expérience que le schéma centré explicite ne semble pas converger. Considérer $v = 1$, $T = 1$ et $\lambda \in \{0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.7,\ 1,\ 2,\ 5\}$. Représenter pour chaque valeur de λ la solution exacte et la solution approchée fournie par le schéma centré explicite. Faire ceci pour différentes valeurs de M de plus en plus grandes et vérifier que ce schéma ne fournit pas une bonne solution approchée.

Remarque : Le schéma centré est instable, quelque soit le choix de k.

Exercice 4. **[Diffusion numérique]** L'objectif de cet exercice est d'observer la *diffusion numérique* générée par le schéma décentré. Considérer $M = 99$, $v = 1$, $T = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$ et $\lambda \in \{0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7,\ 0.9,\ 1\}$. Représenter pour chaque valeur de λ la solution exacte et la solution approchée fournie par le schéma décentré pour la donnée initiale créneau.

On peut montrer que si u est une solution régulière de (1), on a

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{k} + v\frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})}{h} = \frac{vh}{2}(1-\lambda)\partial_{xx}u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(k^2).$$

Cela montre que le schéma décentré est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace avec l'équation

$$\partial_t u + v\partial_x u - \frac{vh}{2}(1-\lambda)\partial_{xx}u.$$

Le terme d'ordre 2 est un terme de diffusion si $\lambda < 1$.

Exercice 5.

1. Mettre en évidence une condition de stabilité pour les schémas de Lax-Friedrichs et Lax-Wendroff. Pour cela, observez le comportement de la solution lorsque M augmente, pour différentes valeurs de λ.
2. Considérer $M = 99$, $v = 1$, $T = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$ et $\lambda = 0.5$ Comparer les solutions numériques fournies par les schémas décentré, de Lax-Friedrichs et de Lax-Wendroff pour les deux données initiales.

2 Résolution approchée d'une équation de trafic routier.

On considère maintenant la loi de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3}$$

avec

$$f(u) = uv(u), \quad v(u) = v_{max}\Big(1 - \frac{u}{u_{max}}\Big),$$

v_{max} et u_{max} donnés.

Il s'agit d'un modèle pour le trafic routier. L'inconnue u représente une densité de véhicules dans une route. Le modèle suppose qu'il n'y a pas d'autres voitures qui rentrent ou sortent de la route et que celles qui y sont ne se dépassent pas.

La fonction $v(u)$ représente une vitesse moyenne des voitures. Elle décroît de v_{max} à 0. Si $u = 0$, la route est vide, la vitesse est maximale égale à v_{max}. Si la route est saturée ($u = u_{max}$), la vitesse a descendu à 0.

On suppose par la suite $u_{max} = v_{max} = 1$ et une densité initiale $u_0(x) \in [0, 1]$, $\forall\ x$.

Si la fonction u_0 est décroissante, initialement il y a plus de véhicules à gauche qu'à droite, les véhicules de gauche vont moins vite que ceux de droite et ne pourront pas les rattraper. Le trafic continuera fluide.

Si la fonction u_0 est croissante, des véhicules à grande vitesse arrivent de gauche en une zone à plus grande densité et faible vitesse. Un *choc* va se produire, la solution C^1 cesse d'exister.

Exercice 6. Proposer un schéma pour discrétiser l'équation (3) dans le cas d'une solution u telle que $v(u) \geq 0$. Construire deux données initiales représentant les situations décrites ci-dessus (on pourra penser à des fonctions C^1 par morceaux) et tester votre schéma dans les deux cas. Représenter la solution $x \mapsto u(t, x)$ à différents instants de temps.

Exercice 7. Considérer aussi comme donnée initiale les fonctions discontinues suivantes :

—
$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Cette situation décrit le cas d'un bouchon à droite ($u = 1$ donc $v = 0$). Les véhicules venant de la gauche s'immobilisent au fur et à mesure.

—
$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & x > 0. \end{cases}$$

Cette situation décrit le cas où les véhicules de gauche vont plus vite (à gauche la circulation est moins dense) que ceux de droite, ils doivent alors freiner pour rouler à la même vitesse de la zone dense, à droite.