

Géométrie ergodique à l'infini de
 $\text{Out}(F_N)$, équivalence mesurée,
rigidité

Habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris-Saclay

présentée et soutenue à Orsay, le 17 janvier 2024, par

Camille HORBEZ

Composition du jury

Yoshikata KIDA Professeur, The University of Tokyo	Rapporteur
Frédéric PAULIN Professeur, Université Paris-Saclay	Rapporteur
Karen VOGTMANN Professeure, University of Warwick	Rapporteuse
Pierre-Emmanuel CAPRACE Professeur, UCLouvain	Examineur
Damien GABORIAU Directeur de recherches, ENS Lyon	Examineur
Ursula HAMENSTÄDT Professeure, Universität Bonn	Examinatrice
Cyril HOUDAYER Professeur, École Normale Supérieure	Examineur

Géométrie ergodique à l'infini de
 $\text{Out}(F_N)$, équivalence mesurée,
rigidité

Habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris-Saclay

présentée et soutenue à Orsay, le 17 janvier 2024, par

CAMILLE HORBEZ

Composition du jury

Yoshikata KIDA Professeur, The University of Tokyo	Rapporteur
Frédéric PAULIN Professeur, Université Paris-Saclay	Rapporteur
Karen VOGTMANN Professeure, University of Warwick	Rapporteuse
Pierre-Emmanuel CAPRACE Professeur, UCLouvain	Examineur
Damien GABORIAU Directeur de recherches, ENS Lyon	Examineur
Ursula HAMENSTÄDT Professeure, Universität Bonn	Examinatrice
Cyril HOUDAYER Professeur, École Normale Supérieure	Examineur

Liste des travaux

Publications et prépublications présentées dans ce mémoire

- D. Gaboriau, Y. Guerch, et C. Horbez. On the homology growth and the ℓ^2 -Betti numbers of $\text{Out}(W_n)$. *arXiv :2209.02760*, 2022.
- C. Horbez et J. Huang. Measure equivalence rigidity among the Higman groups. *arXiv :2206.00884*, 2022.
- S. Hensel et C. Horbez. Measure equivalence rigidity of the handlebody groups. *arXiv :2111.10064*, 2021.
- C. Horbez, J. Huang, et A. Ioana. Orbit equivalence rigidity of irreducible actions of right-angled Artin groups. *Compos. Math.*, 159(4) :860–887, 2023.
- V. Guirardel et C. Horbez. Measure equivalence rigidity of $\text{Out}(F_N)$. *arXiv :2103.03696*, 2021.
- C. Horbez et J. Huang. Measure equivalence classification of transvection-free right-angled Artin groups. *J. Éc. polytech. Math.*, 9 :1021–1067, 2022.
- C. Horbez, J. Huang, et J. Lécureux. Proper proximality in non-positive curvature. *arXiv :2005.08756*, 2020. Accepté dans *Amer. J. Math.*
- V. Guirardel, C. Horbez, et J. Lécureux. Cocycle superrigidity from higher rank lattices to $\text{Out}(F_N)$. *J. Mod. Dyn.*, 18 :291–344, 2022.
- C. Horbez et J. Huang. Boundary amenability and measure equivalence rigidity among two-dimensional Artin groups of hyperbolic type. *arXiv :2004.09325*, 2020.
- A. Genevois et C. Horbez. Acylindrical hyperbolicity of automorphism groups of infinitely ended groups. *J. Topol.*, 14(3) :963–991, 2021.
- S. Hensel, C. Horbez, et R.D. Wade. Rigidity of the Torelli subgroup in $\text{Out}(F_N)$. *arXiv :1910.10189*, 2019.
- C. Horbez et R.D. Wade. Commensurations of subgroups of $\text{Out}(F_N)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(4) :2699–2742, 2020.
- V. Guirardel et C. Horbez. Boundaries of relative factor graphs and subgroup classification for automorphisms of free products. *Geom. Topol.*, 26(1) :71–126, 2022.
- V. Guirardel et C. Horbez. Algebraic laminations for free products and arational trees. *Algebr. Geom. Topol.*, 19(5) :2283–2400, 2019.
- M. Bestvina, V. Guirardel, et C. Horbez. Boundary amenability of $\text{Out}(F_N)$. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 55(5) :1379–1431, 2022.
- M. Bestvina, C. Horbez, et R.D. Wade. On the topological dimension of the Gromov boundaries of some hyperbolic $\text{Out}(F_N)$ -graphs. *Pacific J. Math.*, 308(1) :1–40, 2020.
- V. Guirardel and C. Horbez. Morphisms from higher rank lattices to $\text{Out}(F_N)$. Appendice à l'article *Hyperbolic rigidity of higher rank lattices* par Thomas Hattael. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 53(2) :439–468, 2020.
- M. Bestvina et C. Horbez. A compactification of outer space which is an absolute retract. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 69(6) :2395–2437, 2019.

Autres publications et prépublications

- C. Horbez et Y. Qing et K. Rafi. Big mapping class groups with hyperbolic actions : classification and applications. *J. Inst. Math. Jussieu*, 21(6) :2173–2204, 2022.
- C. Horbez Central limit theorems for mapping class groups and $\text{Out}(F_N)$. *Geom. Topol.*, 22(1) :105–156, 2018.
- F. Dahmani et C. Horbez Spectral theorems for random walks on mapping class groups and $\text{Out}(F_N)$. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 9 :1693–2744, 2018.
- C. Horbez. The Tits alternative for the automorphism group of a free product. *arXiv :1408.0546*, 2014.
- C. Horbez. Hyperbolic graphs for free products, and the Gromov boundary of the graph of cyclic splittings. *J. Topol.*, 9(2) :401–450, 2016.
- C. Horbez. The boundary of the outer space of a free product. *Israel J. Math.*, 1 :179–234, 2017.
- C. Horbez. The horoboundary of outer space, and growth under random automorphisms. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(5) :1075–1123, 2016.
- C. Horbez et R.D. Wade. Automorphisms of graphs of cyclic splittings of free groups. *Geom. Dedicata*, 178 :171–187, 2015.
- C. Horbez. The Poisson boundary of $\text{Out}(F_N)$. *Duke Math. J.*, 165(2) :341–369, 2016.
- C. Horbez. Spectral rigidity for primitive elements of F_N . *J. Group Theory*, 19(1) :55–123, 2016.
- C. Horbez. A short proof of Handel and Mosher’s alternative for subgroups of $\text{Out}(F_N)$. *Groups Geom. Dyn.*, 10(2) :709–721, 2016.
- A. Hilion et C. Horbez. The hyperbolicity of the sphere complex via surgery paths. *J. Reine Angew. Math.*, 730 :135–161, 2017.
- C. Horbez. Sphere paths in outer space. *Algebr. Geom. Topol.*, 12(4) :2493–2517, 2012.

Travaux en cours évoqués dans ce mémoire

- A. Escalier et C. Horbez. Graph products and measure equivalence : classification, rigidity, and quantitative aspects.
- V. Guirardel et C. Horbez. A strong Tits alternative for $\text{Out}(F_N)$.
- V. Guirardel et C. Horbez. Acylindrical hyperbolicity of the outer automorphism group of a free product.
- C. Horbez et J. Huang. Integrable measure equivalence rigidity of right-angled Artin groups via quasi-isometry.
- C. Horbez et J. Huang. On the measure and orbit equivalence classification of right-angled Artin groups.
- C. Horbez et M. Joseph. Isometric orbit equivalent actions of right-angled Artin groups.

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement Yoshikata Kida, Frédéric Paulin et Karen Vogtmann pour avoir accepté de rapporter sur ce texte. Merci en particulier à Frédéric et à Karen pour avoir été les premiers à m'avoir initié aux automorphismes de groupes libres, avant même le début de ma thèse. Merci également à Pierre-Emmanuel Caprace, Damien Gaboriau, Ursula Hamenstädt et Cyril Houdayer d'avoir accepté de faire partie du jury. Merci aussi pour toutes les discussions mathématiques que j'ai pu avoir avec vous.

Je remercie également mes collaborateurs et collaboratrices, sans qui ce travail n'aurait pu avoir lieu. Merci à Vincent Guirardel de m'avoir soutenu depuis ma thèse, et pour notre riche collaboration qui n'a cessé depuis. Merci à Mladen Bestvina pour m'avoir accueilli lors de mon post-doctorat à Salt Lake City. Merci à Ric Wade avec qui j'ai commencé à m'intéresser aux questions de rigidité dans $\text{Out}(F_N)$, à Jingyin Huang de m'avoir initié aux groupes d'Artin–Tits, et plus généralement à toutes celles et ceux avec qui j'ai eu l'occasion de travailler au cours de ces dernières années : Rémi Coulon, François Dahmani, Amandine Escalier, Damien Gaboriau, Anthony Genevois, Yassine Guerch, Thomas Haettel, Sebastian Hensel, Arnaud Hilion, Adrian Ioana, Matthieu Joseph, Anders Karlsson, Jean Lécureux, Gilbert Levitt, Yulan Qing, Kasra Rafi, Jing Tao.

Merci aussi à toutes les autres personnes avec qui j'ai pu avoir de nombreux échanges mathématiques à Orsay, notamment Bruno Duchesne, Agnès Gadbled, Rémi Leclercq et Anne Vaugon. Le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay est un endroit formidable, tant sur le plan humain que mathématique. Merci à tous les membres de l'équipe Topologie et Dynamique pour leur accueil, et pour toutes les amitiés que j'ai pu y former.

Enfin, je souhaiterais remercier toute ma famille, et en premier lieu mes parents, pour leur soutien constant.

Table des matières

Liste des travaux	3
Introduction	9
1 Espaces associés à $\text{Out}(F_N)$, courbure négative	17
1.1 Outre-espace, graphes hyperboliques, laminations algébriques	17
1.2 Bords de Gromov de $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\text{ZF}(G, \mathcal{F})$	24
1.3 Topologie de complexes associés à $\text{Out}(G, \mathcal{F})$	27
1.4 Questions et perspectives	29
2 Décomposition et classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$	31
2.1 L’alternative de Handel et Mosher pour les sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$. . .	31
2.2 Scindements canoniques associés à un sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$	34
2.3 Une alternative de Tits forte pour $\text{Out}(F_N)$ (travail en cours)	37
2.4 Questions et perspectives	41
3 Moyennabilité à l’infini de $\text{Out}(F_N)$ et de groupes d’Artin–Tits	43
3.1 Moyennabilité à l’infini : définition, enjeux, propriétés, exemples	43
3.2 Moyennabilité à l’infini de $\text{Out}(F_N)$	45
3.3 Moyennabilité à l’infini parmi les groupes d’Artin–Tits	48
3.4 Questions et perspectives	50
4 Premiers phénomènes de rigidité dans $\text{Out}(F_N)$	53
4.1 Commensurateur abstrait	53
4.2 Morphismes et cocycles de réseaux vers $\text{Out}(F_N)$	56
5 Théorèmes de rigidité en équivalence mesurée	59
5.1 Introduction à l’équivalence mesurée	59
5.2 Rigidité de $\text{Out}(F_N)$	63
5.3 Rigidité des groupes modulaires de corps en anses	65
5.4 Rigidité parmi les groupes d’Artin–Tits	65
5.5 Rigidité parmi les groupes de Higman	66
5.6 Questions et perspectives	68
6 Théorie mesurée des groupes d’Artin–Tits à angles droits	71
6.1 Les groupes d’Artin–Tits à angles droits et leur géométrie	71
6.2 Groupes mesurablement équivalents à G_Γ	74
6.3 Rigidité en équivalence mesurée intégrable	77
6.4 Superrigidité des actions irréductibles	79
6.5 Projets en cours, questions et perspectives	79
7 Rigidité et algèbres de von Neumann	83
7.1 Algèbres de von Neumann de groupes et d’actions	83
7.2 Groupes dont toutes les actions sont W^* -superrigides	83
7.3 Proximalité propre	84
7.4 Questions et perspectives	87
Bibliographie	89

Introduction

Ce texte présente l'essentiel de mes travaux depuis mon arrivée à Orsay en 2016. Le contexte général est la théorie géométrique, ergodique et mesurée des groupes – avec des emprunts variés, aux algèbres d'opérateurs, à la théorie des marches aléatoires sur les groupes, ou à la topologie, entre autres. Deux thématiques centrales se dégagent.

La première est la géométrie asymptotique du groupe $\text{Out}(F_N)$ des automorphismes extérieurs d'un groupe libre F_N de type fini – défini comme le quotient de $\text{Aut}(F_N)$ par le sous-groupe distingué $\text{Int}(F_N)$ formé des automorphismes intérieurs. L'étude de ce groupe a été initiée au début du vingtième siècle dans le cadre de la *théorie combinatoire des groupes*. Dans ce cadre, Nielsen a par exemple démontré en 1924 que $\text{Out}(F_N)$ est de présentation finie, et en a donné une présentation explicite [Nie24]. Au cours du vingtième siècle, sous l'impulsion successive des travaux de Dehn, Stallings, Gromov, et bien d'autres, le point de vue s'est peu à peu déplacé de la combinatoire vers la géométrie des groupes. La découverte par Culler et Vogtmann en 1986 de l'*oultre-espace* d'un groupe libre [CV86], un espace contractile sur lequel $\text{Out}(F_N)$ agit avec stabilisateurs finis, est un *big bang* dans la théorie. L'étude de $\text{Out}(F_N)$ a alors bénéficié d'influences multiples. Citons en premier lieu celle de la géométrie hyperbolique, et notamment des travaux de Thurston portant sur l'*espace de Teichmüller* d'une surface, dont l'oultre-espace est un analogue – dès lors, la théorie des groupes modulaires de surfaces a été une source d'influence permanente dans l'étude de $\text{Out}(F_N)$. Un exemple emblématique de cette influence étant la quête d'*hyperbolicité*, c'est-à-dire de courbure négative, dans $\text{Out}(F_N)$, après la démonstration par Masur–Minsky de l'hyperbolicité du complexe des courbes d'une surface [MM99] – mentionnons notamment les travaux de Bestvina–Feighn [BF14b] ou de Handel–Mosher [HM13a] à ce sujet. Dans ce mémoire, nous utiliserons ces phénomènes de courbure négative pour aborder, entre autres, des questions concernant la classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$, sa géométrie asymptotique, ou divers phénomènes de rigidité.

La deuxième thématique majeure de ce mémoire est l'équivalence mesurée, notion centrale en théorie mesurée des groupes. Cette théorie trouve ses racines dans les travaux de Dye [Dye59, Dye63], démontrant que deux actions libres, ergodiques et préservant la mesure de \mathbb{Z} sur un espace de probabilité standard X sont toujours *orbitalement équivalentes*, i.e. il existe un automorphisme de l'espace mesuré X qui envoie presque partout les orbites de la première action sur celles de la seconde. Les questions autour de la classification à équivalence orbitale près des actions ergodiques de groupes mettent en jeu de nombreuses notions issues de la théorie ergodique comme l'entropie, et sont aussi intimement reliées à des problèmes de classification d'algèbres d'opérateurs, notamment d'algèbres de von Neumann [MvN36]. Plus tard, Gromov introduit la notion d'*équivalence mesurée*, analogue mesurable à celle de quasi-isométrie [Gro93]. Deux groupes dénombrables G_1 et G_2 sont *mesurablement équivalents* s'il existe un espace mesuré standard (de mesure non nulle) Ω , muni d'une action de $G_1 \times G_2$ par automorphismes boréliens préservant la mesure, tel que pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'action de G_i sur Ω soit libre et admette un domaine fondamental borélien de mesure finie. Comme exemple emblématique, deux réseaux dans un même groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts sont toujours mesurablement équivalents. Par ailleurs, un célèbre théorème d'Ornstein–Weiss affirme que tous les groupes moyennables infinis dénombrables sont mesurablement équivalents [OW80]. Dans [Fur99b], Furman a établi un dictionnaire entre équivalence orbitale et équivalence mesurée. Cette approche crée un pont entre théorie ergodique et théorie géométrique des groupes, qui sera particulièrement exploité dans ce mémoire.

De même qu'une quête centrale en géométrie des groupes est de classer les groupes de type fini à quasi-isométrie près, on peut chercher en théorie mesurée des groupes à les classer à équivalence mesurée près – et en particulier à établir des phénomènes de

rigidité. La théorie de la rigidité, qui trouve ses sources dans les travaux, entre autres, de Tits [Tit74], Mostow [Mos73], Prasad [Pra73], Margulis [Mar91], Zimmer [Zim80], et fait souvent intervenir des techniques au carrefour de la géométrie et de la théorie ergodique, sera un angle d’attaque majeur dans ce mémoire.

Les thématiques présentées ci-dessus se rencontrent dans le théorème de rigidité suivant, obtenu avec Vincent Guirardel, qui est en quelque sorte le point culminant de ce travail.

Théorème 1 (Guirardel–Horbez [GH21b]). *Soit $N \geq 3$, et soit H un groupe dénombrable qui est mesurablement équivalent à $\text{Out}(F_N)$.*

Alors H est commensurable à $\text{Out}(F_N)$ à un noyau fini près.

Ceci signifie que H possède un sous-groupe d’indice fini H^0 pour lequel il existe un morphisme $H^0 \rightarrow \text{Out}(F_N)$ dont l’image est d’indice fini dans $\text{Out}(F_N)$ et de noyau fini.

Ce théorème est central dans le mémoire. Les quatre premiers chapitres mettent en place les outils issus de la géométrie de $\text{Out}(F_N)$ qui entrent dans sa démonstration – et je présenterai au passage d’autres théorèmes obtenus sur $\text{Out}(F_N)$, concernant la classification de ses sous-groupes, sa géométrie asymptotique ou encore d’autres phénomènes de rigidité plus algébriques. Le chapitre 5 présente ce théorème ; puis, dans ce même chapitre et le suivant, nous présentons des théorèmes de rigidité obtenus dans d’autres cadres, avec une attention particulière sur le cas des groupes d’Artin–Tits, étudiés en détail dans ma collaboration avec Jingyin Huang. Le cas des groupes d’Artin–Tits à angles droits est particulièrement intéressant à mes yeux, et nous permettra de mêler la géométrie et la combinatoire des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, à des arguments de nature ergodique. Le mémoire se referme sur quelques applications à la théorie des algèbres de von Neumann. Je vais maintenant donner un aperçu du contenu de chacun de ses sept chapitres.

Chapitre 1. Espaces associés à $\text{Out}(F_N)$, courbure négative.

L’étude de $\text{Out}(F_N)$ se fait via son action sur plusieurs espaces, notamment l’outre-espace de Culler–Vogtmann [CV86], et des graphes hyperboliques comme le graphe des facteurs libres [BF14b], analogues au graphe des courbes d’une surface. Dans ce premier chapitre, je présenterai ces espaces et leur géométrie. Nous étudierons plus généralement le groupe des automorphismes extérieurs d’un produit libre $G = G_1 * \cdots * G_k * F_r$ de groupes dénombrables : ce cadre est important même dans l’étude de $\text{Out}(F_N)$ car il permet des arguments inductifs. Dans ce cadre, je présenterai notamment une description du bord de Gromov du graphe des facteurs libres en termes d’arbres arationnels (théorème 1.9), ainsi qu’une description de ses isométries loxodromiques (théorème 1.2). Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Vincent Guirardel. Je présenterai au passage quelques théorèmes sur la topologie et la géométrie de ces espaces, obtenus dans diverses collaborations, avec Mladen Bestvina, Damien Gaboriau, Yassine Guerch, Vincent Guirardel, Jean Lécureux, Richard D. Wade, notamment.

Chapitre 2. Décomposition et classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$.

Ce chapitre est centré autour de trois théorèmes de classification et de décomposition des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$, obtenus en combinant, entre autres, les outils géométriques introduits en partie précédente, et des arguments de marches aléatoires. Le premier, présenté en partie 2.1 (théorème 2.1) généralise un théorème de Handel–Mosher [HM20, Theorem C].

Théorème 2 (Guirardel–Horbez [GH22]). *Soit G un groupe dénombrable, soit \mathcal{F} un système de facteurs libres non sporadique de G , et soit $H \subseteq \text{Out}(G, \mathcal{F})$ un sous-groupe de type fini.*

Alors soit H contient un automorphisme extérieur complètement irréductible relativement à \mathcal{F} , soit H fixe virtuellement la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) .

Ici $G = G_1 * \cdots * G_k * F_N$ comme ci-dessus, \mathcal{F} est l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes G_i , et $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ désigne le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ préservant \mathcal{F} .

Ce théorème est une version, pour les groupes d'automorphismes de produits libres, d'un théorème d'Ivanov [Iva92] portant sur le groupe modulaire $\text{Mod}(\Sigma)$ d'une surface connexe, compacte, orientable Σ , qui est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de Σ qui en préservent l'orientation. Le théorème d'Ivanov affirme que pour tout sous-groupe $H \subseteq \text{Mod}(\Sigma)$, soit H contient une classe pseudo-anosovienne, soit H fixe virtuellement la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle sur Σ . Les facteurs libres de (G, \mathcal{F}) (voir la définition en partie 1.1.1, de même pour la notion de *système de facteurs libres non sporadique*) jouent pour nous le rôle des courbes sur Σ . Les automorphismes *complètement irréductibles* sont les analogues des homéomorphismes pseudo-anosoviens : Φ est *complètement irréductible* si aucune puissance Φ^k , avec $k \neq 0$, ne fixe la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) .

Ivanov associe aussi à tout sous-groupe $H \subseteq \text{Mod}(\Sigma)$ ne contenant aucune classe pseudo-anosovienne, une décomposition H -invariante de Σ en sous-surfaces qui est canonique, c'est-à-dire invariante par le normalisateur de H . Donc, si H fixe virtuellement une classe d'isotopie de courbe fermée simple essentielle sur Σ , alors son normalisateur aussi. De même, à tout sous-groupe H de $\text{Out}(F_N)$, nous parvenons à associer un scindement (autrement dit, une décomposition de F_N en graphes de groupes) canonique, invariant par le normalisateur de H – mais ceci nécessite de travailler avec la bonne classe de scindements. Nous introduisons la notion de *scindement modéré* de F_N (voir la définition en partie 2.2), et démontrons le théorème suivant.

Théorème 3 (Guirardel–Horbez [GH21b]). *Soit $N \in \mathbb{N}$, et soit H un sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$.*

1. *Si H fixe un scindement modéré de F_N , alors son normalisateur aussi.*
2. *Si H préserve virtuellement la classe de conjugaison d'un facteur libre propre non trivial de F_N , alors son normalisateur aussi.*

Notre démonstration combine la théorie des décompositions JSJ de groupes qui émane des travaux de Sela [Sel97] et a été développée entre autres par Rips–Sela [RS97], Bowditch [Bow98], Dunwoody–Sageev [DS99], Fujiwara–Papasoglu [FP06], Guirardel–Levitt [GL11, GL17], avec la dynamique de $\text{Out}(F_N)$ sur le bord du complexe des facteurs libres, et notamment les idées présentées au chapitre 1.

Enfin, dans un travail avec Vincent Guirardel dont l'écriture est en cours de finalisation, présenté en partie 2.3, nous démontrons le théorème suivant, qui renforce l'alternative de Tits pour $\text{Out}(F_N)$ due à Bestvina–Feighn–Handel [BFH00, BFH05].

Théorème 4 (Guirardel–Horbez [GHb]). *Soit $N \in \mathbb{N}$, et $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ un sous-groupe non virtuellement abélien. Alors tout groupe dénombrable se plonge dans un quotient de H .*

Les théorèmes de cette forme ont une longue histoire, qui commence avec un théorème de Tits [Tit72] démontrant que tout groupe linéaire de type fini non virtuellement résoluble contient un sous-groupe libre non abélien. Un ingrédient-clé de notre démonstration est l'*hyperbolicité acylindrique* de $\text{Aut}(F_N)$, obtenue avec Anthony Genevois [GH21a]. L'*hyperbolicité acylindrique* d'un groupe G (qui affirme l'existence d'une action acylindrique non élémentaire de G sur un espace hyperbolique) est une propriété cruciale en géométrie des groupes introduite par Osin [Osi16] et largement étudiée par Dahmani–Guirardel–Osin [DGO17]. En particulier elle entraîne que tout groupe dénombrable se

plonge dans un quotient de G . Avec Genevois, nous obtenons plus généralement le théorème suivant.

Théorème 5 (Genevois–Horbez [GH21a]). *Soit G un groupe de type fini ayant une infinité de bouts. Alors $\text{Aut}(G)$ est acylindriquement hyperbolique.*

Chapitre 3. Moyennabilité à l’infini de $\text{Out}(F_N)$ et de groupes d’Artin–Tits.

Le théorème principal du troisième chapitre est le suivant.

Théorème 6 (Bestvina–Guirardel–Horbez [BGH22]). *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le groupe $\text{Out}(F_N)$ est moyennable à l’infini.*

Ceci signifie qu’il existe une action de $\text{Out}(F_N)$ par homéomorphismes sur un espace compact K non vide, et une suite d’applications mesurables $\nu_n : K \rightarrow \text{Prob}(\text{Out}(F_N))$ telle que pour tout $\varphi \in \text{Out}(F_N)$ et tout $k \in K$, nous ayons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nu_n(\varphi k) - \varphi \nu_n(k)\|_1 = 0.$$

Cette propriété, largement étudiée par Anantharaman–Delaroché–Renault dans [ADR00] (voir aussi [AD02]), a plusieurs conséquences, en topologie et en algèbres d’opérateurs : elle entraîne la conjecture de Novikov pour $\text{Out}(F_N)$ issue de la K -théorie, et l’exactitude de sa C^* -algèbre réduite. De plus, la moyennabilité de l’action de $\text{Out}(F_N)$ sur le bord de Gromov du graphe des facteurs libres sera un ingrédient-clé dans la démonstration de la rigidité de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée.

Je présenterai aussi la moyennabilité à l’infini d’autres familles importantes de groupes, comme certains groupes d’Artin–Tits, obtenue en collaboration avec Jingyin Huang [HH20] comme conséquence du théorème suivant, présenté en partie 3.3.

Théorème 7 (Horbez–Huang [HH20]). *Soit X un complexe simplicial connexe $\text{CAT}(-1)$ hyperbolique par morceaux, avec un nombre dénombrable de simplexes ayant un nombre fini de types d’isométrie. Soit G un groupe dénombrable agissant sur X par isométries simpliciales.*

Si le G -stabilisateur de tout sommet de X est moyennable à l’infini, alors G est moyennable à l’infini.

Chapitre 4. Premiers phénomènes de rigidité dans $\text{Out}(F_N)$.

Le théorème de rigidité suivant, dans la veine du célèbre théorème de rigidité de Mostow [Mos73], est dû à Farb–Handel pour $N \geq 4$; nous en avons donné une nouvelle démonstration avec Richard D. Wade, qui nous a permis d’inclure le cas où $N = 3$.

Théorème 8 (Farb–Handel [FH07], Horbez–Wade [HW20]). *Soit $N \geq 3$. Tout isomorphisme $\theta : H_1 \rightarrow H_2$ entre sous-groupes d’indice fini $H_1, H_2 \subseteq \text{Out}(F_N)$ coïncide avec la restriction à H_1 d’une conjugaison dans $\text{Out}(F_N)$.*

Ce théorème peut se reformuler en disant que le morphisme naturel de $\text{Out}(F_N)$ dans son commensurateur abstrait est un isomorphisme. Le théorème 8, tel qu’énoncé ci-dessus, découle aussi de notre démonstration avec Guirardel du théorème 1 qui l’étend. Mais les méthodes développées avec Wade nous permettent aussi de calculer le commensurateur abstrait de nombreux sous-groupes importants de $\text{Out}(F_N)$, comme son *sous-groupe de Torelli*, i.e. le noyau IA_N du morphisme $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{Z})$ donné par l’action en abélianisation. En fait, avec Sebastian Hensel et Richard D. Wade [HHW19], nous avons démontré que pour tout $N \geq 4$, tout morphisme injectif de IA_N dans $\text{Out}(F_N)$ diffère de l’inclusion par une conjugaison, ce qui entraîne aussi que IA_N est co-hopfien. Ces résultats

sont présentés en partie 4.1. Leurs démonstrations reposent, entre autres, sur l'étude des automorphismes de l'outre-espace et de graphes associés, initiée par Bridson–Vogtmann [BV01].

D'autres phénomènes de rigidité sont présentés en partie 4.2. Un théorème de Bridson–Wade [BW11] entraîne que si Γ est un réseau dans un groupe de Lie simple connexe de rang réel au moins 2 à centre fini, alors tout morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Out}(F_N)$ est d'image finie. Ce théorème peut être retrouvé, et généralisé au cas où $\text{Out}(F_N)$ est remplacé par $\text{Out}(H)$ avec H un groupe hyperbolique sans torsion, à l'aide d'un théorème d'Haettel affirmant que Γ n'admet aucune action non élémentaire sur un espace hyperbolique au sens de Gromov [Hae20]. Avec Vincent Guirardel et Jean Lécureux, nous généralisons cet énoncé en un théorème de rigidité de cocycles dans l'esprit des travaux de Zimmer [Zim80] et de Bader–Furman [BF14a], qui sera notre premier pas dans la théorie ergodique des groupes.

Théorème 9 (Guirardel–Horbez–Lécureux [GHL22]). *Soit G un groupe algébrique simple connexe de rang supérieur sur un corps local, et soit Γ un réseau dans G . Soit X un espace de probabilité standard muni d'une action ergodique de Γ préservant la mesure, et soit H un groupe hyperbolique sans torsion.*

Alors tout cocycle borélien $c : \Gamma \times X \rightarrow \text{Out}(H)$ est cohomologue à un cocycle prenant ses valeurs dans un sous-groupe fini de $\text{Out}(H)$.

Chapitre 5. Théorèmes de rigidité en équivalence mesurée.

Le cinquième chapitre est consacré à la rigidité en équivalence mesurée pour plusieurs classes emblématiques de groupes, et ses conséquences. Les premiers théorèmes de rigidité en équivalence mesurés sont dus à Furman dans le cadre des réseaux en rang supérieur [Fur99a], s'inspirant de travaux de Zimmer [Zim80, Zim91], puis à Kida pour les groupes modulaires de surfaces [Kid10]. Ces travaux sont l'analogue en équivalence mesurée aux nombreux développements autour de la rigidité quasi isométrique, par exemple [KL97, EF97, Esk98, BKMM12, Ham07].

Disons qu'un groupe G est *superrigide en équivalence mesurée* si tout groupe dénombrable H qui est mesurablement équivalent à G , est en fait commensurable à G à un noyau fini près. En plus de la superrigidité de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée énoncée au théorème 1, je présenterai le théorème suivant. Le premier point a été démontré en collaboration avec Sebastian Hensel, les deux suivants avec Jingyin Huang.

Théorème 10 (Hensel–Horbez [HH21b], Horbez–Huang [HH20, HH22b]). *Les groupes suivants sont superrigides en équivalence mesurée.*

1. *Les groupes modulaires de corps en anses de dimension 3, de genre au moins 3.*
2. *Pour $n \geq 4$, le groupe d'Artin–Tits donné par la présentation*

$$A_n = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \ \forall i \pmod{n} \rangle.$$

3. *Pour $n \geq 5$, le groupe de Higman donné par la présentation*

$$\text{Hig}_n = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_i a_{i+1} a_i^{-1} = a_{i+1}^2 \ \forall i \pmod{n} \rangle.$$

Les deux derniers points s'appliquent à des classes plus grandes de groupes qui seront présentées. Nous verrons comment l'étude de l'équivalence mesurée pour une plus grande famille de groupes d'Artin–Tits que celle apparaissant dans l'énoncé ci-dessus, fait surgir des questions subtiles regardant les réseaux dans le groupe des automorphismes d'un complexe polyédral naturellement associé.

Je présenterai aussi dans ce chapitre quelques conséquences du théorème ci-dessus et de sa démonstration, à la fois géométriques (concernant les automorphismes des graphes de Cayley de ces groupes) et ergodiques (concernant la rigidité en équivalence orbitale de leurs actions préservant une mesure de probabilité). Voir le théorème 5.1.

Chapitre 6. Théorie mesurée des groupes d’Artin–Tits à angles droits.

Rappelons qu’étant donné un graphe simplicial fini Γ , le groupe d’Artin–Tits à angles droits G_Γ est défini comme le quotient du groupe libre sur $V\Gamma$ par le sous-groupe distingué engendré par les commutateurs $[v, w]$, avec $vw \in E\Gamma$. Ces groupes ont été beaucoup étudiés du point de vue de la géométrie des groupes, étant des exemples emblématiques de groupes agissant proprement et cocompactement sur des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$.

Dans une collaboration avec Jingyin Huang, nous avons entrepris d’étudier les groupes d’Artin–Tits à angles droits du point de vue de la théorie mesurée des groupes. Contrairement aux groupes étudiés au chapitre précédent, ils ne sont jamais superrigides en équivalence mesurée : par exemple G_Γ est toujours mesurablement équivalent à tout produit graphé de groupes moyennables infinis dénombrables sur Γ .

La partie 6 a trois énoncés centraux. Le premier est un théorème de classification.

Théorème 11 (Horbez–Huang [HH22a]). *Soit G, H deux groupes d’Artin–Tits à angles droits, à groupes d’automorphismes extérieurs finis.*

Alors G et H sont mesurablement équivalents si et seulement s’ils sont isomorphes.

Le deuxième énoncé phare, présenté en partie 6.3, est un théorème de superrigidité sous une condition d’intégrabilité du cocycle d’équivalence mesurée. Il est inspiré d’un travail de Bader–Furman–Sauer [BFS13], qui démontrent que tout groupe dénombrable qui est intégrablement mesurablement équivalent à un réseau dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ avec $n \geq 3$, est commensurable, à un noyau fini près, à un réseau dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$. Nous dirons qu’un groupe H est à torsion bornée s’il existe une borne sur le cardinal des sous-groupes finis de H .

Théorème 12 (Horbez–Huang [HHa]). *Soit G un groupe d’Artin–Tits à angles droits tel que $|\text{Out}(G)| < +\infty$. Soit H un groupe dénombrable à torsion bornée.*

S’il existe un couplage d’équivalence mesurée intégrable de H vers G , alors H est de type fini et quasi isométrique à G . Dans ce cas, H agit proprement discontinûment et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ qui est quasi isométrique à G .

De manière importante – c’est en fait une différence cruciale avec les travaux de Bader–Furman–Sauer, le complexe cubique qui apparaît dépend essentiellement du groupe H : il n’existe pas de groupe localement compact à base dénombrable d’ouverts dans lequel tous les groupes H de l’énoncé se représentent comme réseaux, avec noyau fini.

Ce théorème et sa démonstration combinent des idées venant de la théorie ergodique et mesurée des groupes, avec les travaux de Huang–Kleiner [HK18] et Huang [Hua18] sur la rigidité quasi isométrique de ces groupes. Ces derniers font intervenir une étude très fine de la géométrie et de la combinatoire des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, issue des travaux de Haglund–Wise [HW08].

Enfin, dans la veine d’un article de Monod–Shalom qui établissent des phénomènes de rigidité pour des produits de groupes à courbure négative [MS06], nous établissons un théorème de rigidité en imposant des conditions d’ergodicité plus fortes. Je renvoie à la partie 6.4 pour plus de précisions sur l’énoncé suivant.

Théorème 13 (Horbez–Huang–Ioana [HHI23]). *Soit G un groupe d’Artin–Tits à angles droits à un bout, à centre trivial. Soit H un groupe dénombrable.*

Soit $\alpha_G : G \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ et $\alpha_H : H \rightarrow \text{Aut}(Y, \mu)$ des actions libres sur des espaces de probabilité standard. Supposons que chaque générateur standard de G agisse ergodiquement pour α_G , et que α_H soit mélangeante.

Si les actions α_G et α_H sont orbitalement équivalentes, alors elles sont virtuellement conjuguées.

Chapitre 7. Rigidité et algèbres de von Neumann.

Si la théorie de l'équivalence orbitale est intimement reliée dès ses débuts à des problèmes de classification d'algèbres de von Neumann associées à des groupes et leurs actions [MvN36, MvN43], les interfaces avec la théorie géométrique des groupes se sont particulièrement renforcées au cours des dernières décennies. La théorie de la déformation/rigidité de Popa [Pop06a, Pop06b] a permis d'aborder des problèmes de rigidité dans ce domaine.

Le dernier chapitre de ce mémoire gravite autour de ces questions. Une des notions étudiées est la *proximalité propre* d'un groupe dénombrable, une notion introduite par Boutonnet–Ioana–Peterson [BIP21], inspirée de la dynamique topologique et des travaux de Furstenberg sur les frontières de groupes [Fur63]. Nous l'établissons dans plusieurs cadres, avec comme conséquence des théorèmes de rigidité et de structure pour des algèbres de von Neumann associées à des actions de groupes. Avec Jingyin Huang et Jean Lécureux, nous montrons en particulier le théorème suivant, qui répond à une question de Boutonnet–Ioana–Peterson.

Théorème 14 (Horbez–Huang–Lécureux [HHL20]). *Soit $g, n \geq 0$, avec $3g + n - 4 \geq 0$. Soit Σ une surface obtenue à partir d'une surface fermée connexe orientable de genre g en retirant n points.*

Alors $\text{Mod}(\Sigma)$ est proprement proximal au sens de Boutonnet–Ioana–Peterson.

Nous établissons aussi la proximalité propre de nombreux groupes agissant sur des espaces $\text{CAT}(0)$, voir le théorème 7.3. Je présenterai également d'autres théorèmes de rigidité, notamment de nouveaux exemples de groupes dont toutes les actions libres, ergodiques, préservant une mesure de probabilité sont W^* -superrigides.

1 Espaces associés à $\text{Out}(F_N)$, courbure négative

Ce chapitre est consacré à la géométrie de $\text{Out}(F_N)$ et d'espaces associés, notamment l'outre-espace de Culler–Vogtmann [CV86], et divers graphes hyperboliques. Une question importante, initiée dans [AK11, BF10], est la recherche de courbure négative dans $\text{Out}(F_N)$.

Je vais présenter ces espaces, en me plaçant dans le cadre plus général des produits libres. Soit G_1, \dots, G_k des groupes dénombrables, soit F_N un groupe libre de rang $N \geq 0$, et soit $G = G_1 * \dots * G_k * F_N$. Notons \mathcal{F} l'ensemble des G -classes de conjugaison des sous-groupes G_i . Nous dirons que \mathcal{F} est un *système de facteurs libres* de G . Nous nous intéresserons dans tout ce mémoire au sous-groupe $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ de $\text{Out}(G)$ consistant en les automorphismes extérieurs de G qui préservent \mathcal{F} . Un *outre-espace* adapté à ce cadre, généralisant la construction de Culler–Vogtmann, a été introduit par Guirardel–Levitt [GL07b].

Lorsque $G = F_N$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, nous retrouvons le groupe $\text{Out}(F_N)$. Cette plus grande généralité n'est pas pure coquetterie : dans l'étude de $\text{Out}(F_N)$, il arrive régulièrement que des arguments inductifs nous amènent à comprendre des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$ préservant la classe de conjugaison d'un facteur libre, ou plus généralement un système $\mathcal{F} = \{[G_1], \dots, [G_k]\}$ de facteurs libres comme ci-dessus. Considérer les groupes d'automorphismes de produits libres est donc un cadre naturel, même si l'on s'intéresse principalement à $\text{Out}(F_N)$.

L'objectif de ce premier chapitre est d'introduire les espaces permettant d'étudier la géométrie de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ (outre-espace, graphes hyperboliques, espaces de laminations notamment). Au gré de notre exposé, nous mentionnerons quelques résultats que nous avons obtenus à ce sujet. Notre présentation sera forcément partielle (et partielle), et nous renvoyons aux excellents survols [Vog02, Bes02, Pau11, Vog18] pour plus d'informations.

1.1 Outre-espace, graphes hyperboliques, laminations algébriques

1.1.1 Produits libres, scindements et facteurs

Comme ci-dessus, soit $G = G_1 * \dots * G_k * F_N$ un produit libre de groupes dénombrables, et soit \mathcal{F} l'ensemble des G -classes de conjugaison des G_i .

Nous dirons qu'un élément (ou un sous-groupe) de G est *\mathcal{F} -périphérique* s'il est trivial ou a un conjugué contenu dans l'un des G_i .

Nous dirons que le système de facteurs libres \mathcal{F} est *sporadique* si l'une des situations suivantes est vérifiée :

- $G = G_1$ et $\mathcal{F} = \{[G_1]\}$, ou $G = \{1\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, ou $G = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$,
- $G = G_1 * G_2$ et $\mathcal{F} = \{[G_1], [G_2]\}$,
- $G = G_1 * \mathbb{Z}$ et $\mathcal{F} = \{[G_1]\}$.

Plus généralement, la *complexité* de (G, \mathcal{F}) est $\xi(G, \mathcal{F}) = (k + N, N)$. Les complexités sont ordonnées lexicographiquement, de sorte que \mathcal{F} est sporadique si et seulement si $\xi(G, \mathcal{F}) \leq (2, 1)$.

Un *scindement* de (G, \mathcal{F}) est un arbre simplicial S non vide et non réduit à un point, muni d'une action minimale de G , pour laquelle chacun des sous-groupes G_i fixe un point. Ici la minimalité de l'action signifie que S ne contient aucun sous-arbre propre non vide G -invariant. Nous dirons que S est

- un *scindement libre* de (G, \mathcal{F}) si ses stabilisateurs d'arêtes sont triviaux ;
- un *\mathcal{Z} -scindement* de (G, \mathcal{F}) si le stabilisateur de toute arête de S est soit trivial, soit isomorphe à \mathbb{Z} et non \mathcal{F} -périphérique ;
- un *\mathcal{Z}_{\max} -scindement* de (G, \mathcal{F}) si le stabilisateur de toute arête de S est soit trivial, soit isomorphe à \mathbb{Z} , stable par racines (i.e. si $g^k y$ appartient pour $k > 0$, alors g aussi) et non \mathcal{F} -périphérique.

Étant donné deux scindements S, \hat{S} de (G, \mathcal{F}) , nous dirons que \hat{S} *raffine* S s'il existe une application G -équivariante $\pi : \hat{S} \rightarrow S$ qui préserve l'alignement (de manière équivalente, S est obtenu à partir de \hat{S} en écrasant une forêt G -invariante). Deux scindements S_1, S_2 de (G, \mathcal{F}) sont *compatibles* s'ils admettent un raffinement commun.

Rappelons que $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ est le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ formé des automorphismes extérieurs qui préservent \mathcal{F} . Nous considérerons aussi le sous-groupe $\text{Out}(G, \mathcal{F}^{(t)})$ formé des automorphismes extérieurs φ pour lesquels pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, il existe $g_i \in G$ tel que $\varphi|_{G_i}$ soit la conjugaison par g_i .

Le groupe $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ agit sur l'ensemble des classes d'homéomorphisme G -équivariant de scindements libres (ou de \mathcal{Z} -scindements, ou de \mathcal{Z}_{\max} -scindements) de (G, \mathcal{F}) par précomposition. Notons que dans les deux derniers cas de la définition d'un système de facteurs libres sporadique, le groupe $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ tout entier préserve (à homéomorphisme G -équivariant près) un scindement libre de (G, \mathcal{F}) : si $G = G_1 * G_2$, alors $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ préserve l'arbre de Bass–Serre associé à cette décomposition, et si $G = G_1 * \mathbb{Z}$, alors $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ préserve l'arbre de Bass–Serre de la décomposition $G = G_1 *_{\{1\}}$ en extension HNN.

Un *facteur libre* de (G, \mathcal{F}) est un sous-groupe $A \subseteq G$ qui est égal à un stabilisateur de sommet dans un scindement libre de (G, \mathcal{F}) . Il est *propre* s'il est non \mathcal{F} -périphérique (en particulier non trivial) et distinct de G .

Étant donné un sous-groupe $A \subseteq G$, nous notons $\mathcal{F}|_A$ l'ensemble des A -classes de conjugaison de sous-groupes de la forme $A \cap F$, où F est conjugué dans G à l'un des G_i . Lorsque $\mathcal{F}|_A$ est fini, c'est un système de facteurs libres de A (ceci est toujours le cas par exemple si A est un facteur libre de (G, \mathcal{F})).

1.1.2 L'outre-espace d'un produit libre

Nous introduisons ici l'*outre-espace*, dont la construction, due à Culler–Vogtmann [CV86] pour les groupes libres, a été généralisée aux produits libres par Guirardel–Levitt [GL07b].

Définition et compactification. Un *scindement de Grushko* de (G, \mathcal{F}) est un scindement libre de (G, \mathcal{F}) dans lequel tous les stabilisateurs de sommets sont périphériques. Un *arbre de Grushko* de (G, \mathcal{F}) est l'espace métrique obtenu à partir d'un scindement de Grushko de (G, \mathcal{F}) en donnant une longueur strictement positive $\ell(e)$ à toute arête e de S , de manière G -invariante, puis en identifiant l'arête e à l'intervalle $[0, \ell(e)]$ et en considérant l'espace de longueur ainsi formé.

L'*outre-espace non projectifié* $\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ est l'espace des classes d'isométrie G -équivariante d'arbres de Grushko de (G, \mathcal{F}) . Il est muni de la *topologie de Gromov–Hausdorff équivariante* introduite par Paulin [Pau88], pour laquelle, informellement, deux arbres T, T' sont proches si les actions d'un gros sous-ensemble fini de G coïncident à ε (petit) près sur de gros sous-ensembles finis $K \subseteq T$ et $K' \subseteq T'$. Formellement, une base de voisinages ouverts d'un arbre T est donné par les ensembles $\mathcal{V}_{K, F, \varepsilon}$, où $K \subseteq T$ est un sous-ensemble fini, où $F \subseteq G$ est un ensemble fini, et $\varepsilon > 0$, définis comme suit : $\mathcal{V}_{K, F, \varepsilon}$ est l'ensemble des arbres $T' \in \mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ tels qu'il existe un sous-ensemble fini $K' \subseteq K$ et une bijection $\theta : K \rightarrow K'$ tels que pour tous $x, y \in K$ et tout $g \in F$, nous ayons $|d_{T'}(\theta(x), g\theta(y)) - d_T(x, gy)| < \varepsilon$. Cette topologie est aussi équivalente à la topologie donnée par les fonctions longueur de translation, c'est-à-dire la topologie induite par le plongement

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(G, \mathcal{F}) &\rightarrow \mathbb{R}_+^G \\ T &\mapsto (\|g\|_T)_{g \in G} \end{aligned}$$

où $\|g\|_T = \inf_{x \in T} d(x, gx)$, voir [Pau89]. L'*outre-espace* $\mathbb{PO}(G, \mathcal{F})$ est le quotient de $\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ par la relation d'équivalence identifiant deux arbres de Grushko S_1, S_2 s'ils dif-

font d'une homothétie G -équivariante, c'est-à-dire s'il existe une application G -équivariante $h : S_1 \rightarrow S_2$ qui multiplie toutes les distances par un même réel $\lambda > 0$. Il est muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$. Le groupe $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ agit sur $\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ par précomposition, cette action descend en une action sur $\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$. Dans le cas classique où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, l'outre-espace $\mathbb{P}\mathcal{O}(F_N, \emptyset)$ sera noté CV_N , et l'outre-espace non projectifié $\mathcal{O}(F_N, \emptyset)$ sera noté cv_N .

Le *simplexe ouvert* $\sigma(S)$ d'un arbre de Grushko S de (G, \mathcal{F}) est l'image dans $\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ de l'ensemble des arbres obtenus à partir de S en faisant varier les longueurs d'arêtes, tout en les maintenant strictement positives. Le *simplexe fermé* $\bar{\sigma}(S)$ est son adhérence dans $\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$, dans laquelle on autorise certaines arêtes à avoir longueur nulle. Il est possible de donner à $\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ une structure de "complexe simplicial à faces manquantes", en le construisant à partir de l'union disjointe de ses simplexes fermés, modulo identifications de faces. Toutefois, la topologie (dite faible) ainsi décrite sur l'outre-espace n'est pas équivalente en général à la topologie de Gromov–Hausdorff équivariante, sauf si tous les sous-groupes dans \mathcal{F} sont finis – nous renvoyons à [GL07a, partie 5] pour une comparaison fine de ces diverses topologies.

Rappelons qu'un *arbre réel* est un espace métrique géodésique uniquement connexe par arcs. L'adhérence $\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ de $\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ dans l'espace des actions minimales et non triviales de G par isométries sur des arbres réels a été décrite par Bestvina–Feighn [BF92b] dans le cas classique où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, et généralisée au cas des produits libres par l'auteur [Hor17] (la description des arbres simpliciaux dans $\overline{\text{CV}}_N$ est due à Cohen–Lustig [CL95]). L'espace $\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ s'identifie à l'espace des classes de G -isométrie équivariante d'actions *très petites* de (G, \mathcal{F}) sur des arbres réels non vides, c'est-à-dire pour lesquelles le stabilisateur de tout tripode non dégénéré est trivial, et le stabilisateur de tout arc non dégénéré est soit trivial, soit isomorphe à \mathbb{Z} , stable par racines et non \mathcal{F} -périphérique. Sa version projectifiée $\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est un espace compact.

Remarques sur la topologie de $\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$. L'espace $\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est de dimension topologique finie : Gaboriau et Levitt ont démontré dans [GL95] que lorsque $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, il est de dimension $3N - 4$, et le bord est de dimension $3N - 5$. Ce théorème a été étendu par l'auteur dans [Hor17] : la dimension de $\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est $3N + 2k - 4$, et $\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F}) \setminus \mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ est de dimension $3N + 2k - 5$. Par ailleurs, Guirardel et Levitt ont montré que $\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est contractile, voir [GL07b] et [GL07a, Proposition 5.6].

Cependant, la topologie de ces espaces reste très mystérieuse. Avec Mladen Bestvina [BH19], nous avons démontré que pour tout $N \geq 4$, l'espace $\overline{\text{CV}}_N$ n'est pas localement 4-connexe : il existe $T \in \overline{\text{CV}}_N$, et un voisinage ouvert U de T , tel que pour tout voisinage ouvert $V \subseteq U$ de T , il existe une application continue f de la sphère S^4 dans V qui ne soit pas homotopiquement triviale dans U (autrement dit, il n'existe pas d'homotopie $H : S^4 \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que $H|_{S^4 \times \{0\}} = f$, et $H(S^4 \times \{1\})$ soit un singleton). Les arbres T problématiques sont construits comme des graphes d'actions ayant des morceaux d'arcs à des feuilletages mesurés sur des surfaces à bord non orientables. Nous renvoyons à la partie 1.3 de [BH19] pour plus d'informations.

Mentionnons malgré tout que dans ce même article [BH19], nous construisons aussi une nouvelle compactification $\widehat{\text{CV}}_N$ de CV_N qui est un rétract absolu : pour tout espace compact métrisable Y dans lequel $\widehat{\text{CV}}_N$ se plonge, $\widehat{\text{CV}}_N$ est un rétract de Y . Ceci entraîne en particulier que $\widehat{\text{CV}}_N$ est localement contractile : pour tout $x \in \widehat{\text{CV}}_N$ et tout voisinage ouvert U de x , il existe un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de x tel que l'inclusion $V \rightarrow U$ soit homotopiquement triviale. L'idée de notre construction est de considérer des arbres dans lesquels chaque arc non dégénéré à stabilisateur non trivial est muni d'une orientation, et ce de manière F_N -invariante. Nous renvoyons aux parties 2 et 3 de [BH19] pour plus d'informations.

1.1.3 Graphes hyperboliques associés à $\text{Out}(G, \mathcal{F})$

Graphes de scindements et de facteurs. Le graphe des courbes, introduit par Harvey [Har81], joue un rôle prépondérant dans l'étude des groupes modulaires de surfaces compactes orientables. En particulier, la démonstration par Masur–Minsky de son hyperbolicité [MM99] a été une pierre angulaire dans cette théorie. Plusieurs analogues du graphe des courbes adaptés à l'étude de $\text{Out}(F_N)$ ont été étudiés, avec des avantages respectifs, voir par exemple [KL09]. Nous allons comparer la géométrie de quatre d'entre eux, dans le cadre des produits libres :

- le *graphe des scindements libres* $\text{FS}(G, \mathcal{F})$, dont les sommets sont les classes d'homéomorphisme G -équivariant de scindements libres de (G, \mathcal{F}) , où deux scindements sont reliés par une arête s'ils sont compatibles ;
- le *graphe des \mathcal{Z} -scindements* $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$, dont les sommets sont les classes d'homéomorphisme G -équivariant de \mathcal{Z} -scindements de (G, \mathcal{F}) , où deux scindements sont reliés par une arête s'ils sont compatibles ;
- le *graphe des facteurs libres* $\text{FF}(G, \mathcal{F})$, dont les sommets sont les classes d'homéomorphisme G -équivariant de scindements libres de (G, \mathcal{F}) , où deux scindements S_1, S_2 sont reliés par une arête s'ils sont compatibles ou s'il existe un élément non \mathcal{F} -périphérique de G qui fixe un point dans S_1 et dans S_2 ;
- le *graphe des \mathcal{Z} -facteurs* $\mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$, dont les sommets sont les classes d'homéomorphisme G -équivariant de \mathcal{Z} -scindements de (G, \mathcal{F}) , où deux scindements S_1, S_2 sont reliés par une arête s'ils sont compatibles ou s'il existe un élément non \mathcal{F} -périphérique de G qui fixe un point dans S_1 et dans S_2 .

Dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, nous les noterons simplement $\text{FS}_N, \mathcal{ZS}_N, \text{FF}_N$ et \mathcal{ZF}_N . Nous donnons à la fin de cette partie quelques exemples illustratifs dans ce cadre.

L'action de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ par précomposition sur l'ensemble des scindements de (G, \mathcal{F}) induit une action de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ par automorphismes de graphe sur chacun des quatre graphes ci-dessus.

Les définitions des graphes de facteurs trouvées dans la littérature [HV98, HM14] diffèrent parfois de celles proposées ci-dessus. Par exemple, pour FF , il est fréquent de considérer le graphe dont les sommets sont les classes de conjugaison de facteurs libres propres de (G, \mathcal{F}) , avec une arête s'il existe des représentants contenus l'un dans l'autre. Nous renvoyons à la partie 2 de [GH22], dans laquelle nous avons fait une comparaison détaillée de ces graphes, et montré la quasi-isométrie (G -équivariante) entre les différents modèles considérés dans la littérature. L'avantage des définitions ci-dessus est d'une part qu'elles ne nécessitent pas de traiter à part des cas de petite complexité, d'autre part qu'elles permettent de mettre mieux en évidence les liens entre les complexes de facteurs et les complexes de scindements.

Hyperbolicité. Une caractéristique géométrique importante de ces graphes est leur hyperbolicité. Rappelons qu'un espace métrique géodésique X est *hyperbolique* (au sens de Gromov [Gro87]) s'il existe $\delta \geq 0$ tel que tous les triangles géodésiques dans X soient δ -fins (i.e. tout point sur l'un des côtés du triangle est à distance au plus δ de la réunion des deux autres côtés). Les espaces métriques hyperboliques considérés dans ce mémoire ne sont pas supposés localement compacts, et ne le seront en effet pas dans de nombreux cas.

Le théorème suivant est dû à Handel–Mosher [HM13a, HM14] pour $\text{FS}(G, \mathcal{F})$, à Mann [Man14a] pour $\mathcal{ZS}(F_N, \emptyset)$ avec une extension aux produits libres par l'auteur [Hor16a, Theorem 3.3], à Bestvina–Feighn [BF14b] pour $\text{FF}(F_N, \emptyset)$ avec une extension aux produits libres par Handel–Mosher [HM14], à Mann [Man14b] pour $\mathcal{ZF}(F_N, \emptyset)$ avec une extension aux produits libres par Guirardel et l'auteur [GH22, Theorem 2.18].

Théorème 1.1. *Soit G un groupe dénombrable, et soit \mathcal{F} un système de facteurs libres de*

G . Alors les graphes $\text{FS}(G, \mathcal{F})$, $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$, $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$ sont hyperboliques, et de diamètre infini si (G, \mathcal{F}) est non sporadique.

La démonstration dans le cas de $\text{FS}(G, \mathcal{F})$ repose sur un argument de Handel–Mosher, pour lequel nous renvoyons à [HM13a] ou [HM14]. Voir aussi la présentation par Bestvina–Feighn dans l’appendice de [BF14c], qui contient quelques simplifications et, dans le cas spécifique où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, l’argument plus géométrique dû à Hilion et à l’auteur [HH17], utilisant l’interprétation de FS_N comme un complexe de sphères dans une variété de dimension 3.

L’hyperbolicité des trois autres graphes peut être déduite de celle de $\text{FS}(G, \mathcal{F})$ grâce à un argument de Kapovich–Rafi [KR14], qui repose sur le fait que ces graphes sont obtenus par “électrifications” successives de $\text{FS}(G, \mathcal{F})$. Plus précisément, vu les définitions adoptées, nous avons des inclusions évidentes $\iota_S : \text{FS}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$ et $\iota_F : \text{FF}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$, qui sont $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ -équivariantes. Il y a aussi des inclusions équivariantes $\text{FS}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \text{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$, les graphes de facteurs étant obtenus à partir des graphes de scindements en ajoutant des arêtes pour l’existence d’éléments elliptiques communs.

De manière moins évidente, il y a aussi une application grossièrement $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ -équivariante¹ $\pi : \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \text{FF}(G, \mathcal{F})$, qui associe à tout \mathcal{Z} -scindement S de (G, \mathcal{F}) , un scindement libre S' de (G, \mathcal{F}) compatible avec S . Voir en effet [GH22, Lemma 2.5], généralisant [BF92b, Lemma 4.1], pour l’existence d’un tel scindement S' , et [GH22, Lemma 2.4] pour le fait que deux scindements libres compatibles avec S sont toujours à distance bornée l’un de l’autre dans $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ (ils ne le sont pas forcément dans $\text{FS}(G, \mathcal{F})$ comme le montre l’exemple 1.5 ci-dessous). Nous résumons ces applications dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \text{FS} & \xrightarrow{\iota_S} & \mathcal{ZS} \\ \downarrow & \searrow \pi & \downarrow \\ \text{FF} & \xrightarrow{\iota_F} & \mathcal{ZF} \end{array}$$

Chacune de ces applications est grossièrement surjective (i.e. il existe $K \geq 0$ tel que tout point de l’espace d’arrivée soit à distance au plus K de l’image de l’application), et préserve grossièrement l’alignement au sens suivant : il existe $K \geq 0$ tel que si (a, b, c) est un triplet de points de la source vérifiant $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$, alors son image (a', b', c') est telle que $d(a', c') \geq d(a', b') + d(b', c') - K$. Ceci suffit, par l’argument de Kapovich–Rafi, à déduire l’hyperbolicité de $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$, $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$ de celle de $\text{FS}(G, \mathcal{F})$.

Notons par contre qu’aucune des applications décrite ci-dessus n’est une quasi-isométrie, voir la partie “Quelques exemples” ci-après.

Isométries loxodromiques. Rappelons qu’une isométrie γ d’un espace métrique hyperbolique X est *loxodromique* si pour tout $x \in X$, l’application orbitale $n \mapsto \gamma^n \cdot x$ est un plongement quasi isométrique $\mathbb{Z} \rightarrow X$.

Dans le cas où $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ est une surface obtenue à partir d’une surface connexe, orientable, de genre $g \geq 0$, en retirant $n \geq 0$ points, Masur et Minsky ont démontré dans [MM99] que les éléments de $\text{Mod}(\Sigma)$ agissant de manière loxodromique sur le graphe des courbes $\mathcal{C}(\Sigma)$ sont exactement les classes d’homéotopie pseudo-anosoviennes de Σ – nous renvoyons par exemple à [FLP79, Exposé 1] pour cette notion.

1. L’équivariance grossière signifie qu’il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $S \in \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$ et tout $\varphi \in \text{Out}(G, \mathcal{F})$, nous ayons $d_{\text{FF}(G, \mathcal{F})}(\varphi \cdot \pi(S), \pi(\varphi \cdot S)) \leq K$.

Dans le cadre des automorphismes de groupes libres, et plus généralement de produits libres, il y a deux analogues possibles à la notion d'homéomorphisme pseudo-anosovien. Un automorphisme extérieur $\varphi \in \text{Out}(G, \mathcal{F})$ est *complètement irréductible* (relativement à \mathcal{F}) si aucune puissance φ^k (avec $k \neq 0$) ne préserve la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) . Il est *atoroïdal* (relativement à \mathcal{F}) si aucune puissance φ^k (avec $k \neq 0$) ne fixe la classe de conjugaison d'un élément non \mathcal{F} -périphérique de G . Notons que dans le cas où $G = F_N$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, un théorème de Bestvina–Feighn [BF92a] et Brinkmann [Bri00] assure que l'atoroïdalité d'un automorphisme extérieur φ est équivalente à l'hyperbolicité de l'extension $F_N \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}$, où Φ est un représentant de φ dans $\text{Aut}(F_N)$ (à isomorphisme près, ce groupe libre-par- \mathbb{Z} ne dépend que de la classe extérieure φ).

Le théorème suivant est dû à Bestvina–Feighn [BF14b] pour $\text{FF}(F_N, \emptyset)$, à Gupta [Gup18] pour $\text{FF}(F_N, \mathcal{F})$, à Mann [Man14b] pour $\mathcal{ZF}(F_N, \emptyset)$, et à Guirardel et l'auteur dans les cas restants [GH22].

Théorème 1.2. *Soit G un groupe dénombrable et \mathcal{F} un système de facteurs libres non sporadique de G . Soit $\varphi \in \text{Out}(G, \mathcal{F})$. Alors*

- φ est loxodromique sur $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ si et seulement si φ est complètement irréductible (relativement à \mathcal{F});
- φ est loxodromique sur $\mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$ si et seulement si φ est complètement irréductible et atoroïdal (relativement à \mathcal{F}).

Mentionnons que, dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, les isométries loxodromiques pour l'action de $\text{Out}(F_N)$ sur $\text{FS}(F_N, \emptyset)$ ont été déterminées par Handel–Mosher [HM19] (ce sont celles ayant une lamination attractive remplissante), et les isométries loxodromiques de $\mathcal{ZS}(F_N, \emptyset)$ l'ont été par Gupta–Wigglesworth [GW19] (ce sont celles ayant une lamination attractive \mathcal{Z} -remplissante). Nous renvoyons à ces articles pour les définitions et plus d'informations à ce sujet.

Quelques exemples. Les exemples ci-dessous illustrent les résultats présentés jusqu'ici, et permettent de comparer la géométrie des graphes décrits ci-dessus.

Exemple 1.3. Soit Σ une surface compacte, connexe, orientable de genre non nul ayant exactement une composante de bord, dont nous identifions le groupe fondamental à un groupe libre F_N non abélien. Soit $\varphi \in \text{Out}(F_N)$ un automorphisme extérieur induit par un homéomorphisme pseudo-anosovien de Σ . Il découle du théorème 1.2, et de la comparaison entre les différents graphes, que φ agit comme une isométrie loxodromique de FS_N , \mathcal{ZS}_N et FF_N . Mais φ est elliptique dans \mathcal{ZF}_N . Voici un argument élémentaire pour ce dernier point. Soit c une courbe fermée simple essentielle sur Σ (i.e. c n'est ni homotopiquement triviale, ni homotope à la courbe de bord). Par le théorème de van Kampen, elle détermine un \mathcal{Z} -scindement S_c du groupe fondamental de Σ , identifié à F_N . La classe de conjugaison $[b]$ dans F_N donnée par la courbe de bord est elliptique dans S_c , et plus généralement dans tous les scindements $\varphi^n S_c$ avec $n \in \mathbb{N}$, qui sont tous duaux à des courbes fermées simples essentielles sur Σ . Ainsi tous ces scindements sont à distance au plus 1 dans \mathcal{ZF}_N , donc φ est elliptique.

Exemple 1.4. Le même exemple que ci-dessus, mais sur une surface ayant deux composantes de bord, fournit un automorphisme extérieur $\varphi \in \text{Out}(F_N)$ qui est loxodromique dans FS_N et dans \mathcal{ZS}_N , mais elliptique dans FF_N et dans \mathcal{ZF}_N . La différence avec l'exemple précédent est que le groupe cyclique $\langle b \rangle$ engendré par un élément dont la classe de conjugaison est représentée par une courbe de bord, est maintenant un facteur libre de F_N : en effet, une famille maximale d'arcs deux à deux disjoints, deux à deux non homotopes, ayant leurs deux extrémités sur l'autre composante de bord, détermine un scindement libre S de F_N dans lequel $\langle b \rangle$ est un stabilisateur de point. Et $\langle b \rangle$ est aussi elliptique dans $\varphi^n S$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc φ est elliptique dans FF_N .

Exemple 1.5. Donnons enfin un exemple d'un élément $\varphi \in \text{Out}(F_N)$ qui est loxodromique dans FS_N , mais elliptique dans \mathcal{ZS}_N , FF_N et \mathcal{ZF}_N . Soit Σ une surface connexe, compacte, orientable ayant exactement une composante de bord, de genre au moins 2, et soit c une courbe fermée simple essentielle sur Σ . Soit Σ_b la composante connexe de $\Sigma \setminus c$ qui contient le bord. Soit $\varphi \in \text{Out}(F_N)$ un automorphisme extérieur induit par un homéomorphisme à support dans Σ_b , qui est pseudo-anosovien en tant qu'homéomorphisme de Σ_b . Il découle par exemple d'un théorème de Handel–Mosher [HM19] que φ est loxodromique dans FS_N . Par contre φ est elliptique dans \mathcal{ZS}_N , FF_N et \mathcal{ZF}_N car φ préserve le scindement cyclique de F_N dual à la courbe c .

1.1.4 Laminations algébriques

La notion de lamination géodésique sur une surface hyperbolique, introduite par Thurston dans son étude des 3-variétés hyperboliques [Thu97], et très reliée à celle de feuilletage mesuré (voir par exemple [Lev83]), a joué un rôle préminent en géométrie hyperbolique. Une notion analogue existe pour les groupes libres : dans ce cadre, la notion de *lamination algébrique* apparaît dans les travaux de Bestvina–Feighn–Handel [BFH97], et a été extensivement étudiée par Coulbois–Hilion–Lustig dans [CHL08a, CHL08b]. Avec Vincent Guirardel, nous l'avons généralisée au contexte des produits libres et en avons fait une étude détaillée dans ce cadre [GH19].

Soit R un scindement de Grushko de (G, \mathcal{F}) . Notons $\partial_\infty R$ son bord visuel, et $V_\infty(R)$ l'ensemble des sommets de valence infinie de R . Lorsque $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, ou plus généralement lorsque tous les sous-groupes périphériques sont finis, le bord $\partial_\infty R$ est compact, et $V_\infty(R)$ est vide. En général, considérons l'espace $\partial R = V_\infty(R) \cup \partial_\infty R$, et munissons-le de la *topologie des observateurs*, pour laquelle une prébase d'ouverts est donnée par l'ensemble des composantes connexes de complémentaires de points de R . L'espace ∂R est compact, voir par exemple [CHL07, Proposition 1.13].

Étant donné deux scindements de Grushko R et R' , toute application G -équivariante $R \rightarrow R'$ qui envoie arête sur chemin d'arêtes, envoie $V_\infty(R)$ sur $V_\infty(R')$, et s'étend de manière unique en des homéomorphismes $\partial_\infty R \rightarrow \partial_\infty R'$ et $\partial R \rightarrow \partial R'$, voir par exemple [GH19, partie 1]. En particulier, modulo ces identifications naturelles, l'espace ∂R ne dépend pas du choix d'un scindement de Grushko R ; nous le noterons $\partial(G, \mathcal{F})$.

Soit $\partial^{(2)}(G, \mathcal{F}) = (\partial(G, \mathcal{F}) \times \partial(G, \mathcal{F})) \setminus \Delta$, où Δ est la diagonale. Soit $i : \partial^{(2)}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$ l'involution définie par $i(\eta, \xi) = (\xi, \eta)$. Une *lamination algébrique* de (G, \mathcal{F}) est un sous-ensemble fermé G -invariant et i -invariant de $\partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$.

Étant donné un scindement de Grushko R de (G, \mathcal{F}) , tout élément $g \in G$ non \mathcal{F} -périphérique préserve un unique axe dans R , sur lequel il agit par translation. Le couple $(g^{-\infty}, g^{+\infty})$ des points répulsif et attractif de g dans $\partial_\infty R$ détermine un élément de $\partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$.

Étant donné un arbre $T \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ et $\epsilon > 0$, notons $\Lambda_\epsilon^2(T)$ l'adhérence dans $\partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$ de l'ensemble

$$\{(g^{-\infty}, g^{+\infty}) \mid g \text{ non } \mathcal{F}\text{-périphérique et } \|g\|_T < \epsilon\},$$

où $\|g\|_T = \inf_{x \in T} d_T(x, gx)$. La *lamination duale* de T est

$$\Lambda^2(T) := \bigcap_{\epsilon > 0} \Lambda_\epsilon^2(T).$$

L'article [GH19] contient une étude détaillée de $\Lambda^2(T)$ dans le contexte des produits libres. Par exemple, nous décrivons complètement $\Lambda^2(T)$ en termes d'un complexe feuilleté $\Sigma(T, R)$, construit à partir de T et d'un arbre de Grushko R , et qui s'avère être G -équivariamment isomorphe au *coeur* de $\overline{T} \times R$ au sens de Guirardel [Gui05] – ici \overline{T} est le complété métrique de T . Nous obtenons aussi des énoncés faibles de continuité de la

lamination duale $\Lambda^2(T)$: par exemple, si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ converge vers un arbre T , tel que la G -orbite de tout point de T est dense dans T , et si $(\alpha_n, \omega_n) \in \Lambda^2(T_n)$ converge vers $(\alpha, \omega) \in \partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$, alors $(\alpha, \omega) \in \Lambda^2(T)$. Voir [GH19, Proposition 4.23]. Enfin, nous montrons que certains arbres de $\mathbb{PO}(G, \mathcal{F})$ sont complètement déterminés par leur lamination duale ; j’y reviendrai en partie suivante après avoir introduit la notion d’arbre *arationnel*.

Remarque 1.6. Une notion très reliée est celle de *courant géodésique*, définie par Bonahon [Bon88, Bon91] (qui s’inspirait d’un travail de Ruelle–Sullivan [RS75]) pour un groupe hyperbolique G , comme une mesure de Radon G -invariante et invariante par l’involution $(\eta, \xi) \mapsto (\xi, \eta)$ sur le bord double $\partial_{\infty}^{(2)}G$. L’espace $\text{Curr}(G)$ des courants géodésiques sur G est muni de la topologie vague, et est muni d’une action naturelle de $\text{Out}(G)$ en utilisant que tout automorphisme de G détermine uniquement un homéomorphisme de $\partial_{\infty}G$. Les courants géodésiques ont été extensivement étudiés par Kapovich dans le cas des groupes libres [Kap05, Kap06]. Tout élément $g \in F_N \setminus \{1\}$ définit un courant η_g , où pour un sous-ensemble $A \subseteq \partial^{(2)}F_N$ mesurable, $\eta_g(A)$ compte le nombre de translatés des axes de g et g^{-1} ayant leurs deux extrémités dans A . Kapovich et Lustig ont montré dans [KL09] l’existence d’une forme d’intersection continue $\text{Out}(F_N)$ -invariante

$$i : \overline{c\nu}_N \times \text{Curr}(F_N) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

ayant la propriété que $i(T, \eta_g) = \|g\|_T$ pour tout $g \in F_N \setminus \{1\}$ et tout $T \in \overline{c\nu}_N$.

Dans le cas d’un produit libre (G, \mathcal{F}) , nous pouvons de même définir un *courant géodésique* comme une mesure de Radon G -invariante et invariante par $(\eta, \xi) \mapsto (\xi, \eta)$ sur $\partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$. Toutefois, nous avons montré qu’en général, il n’existe pas de forme d’intersection continue ayant la même propriété que ci-dessus [GH19, Proposition 3.1].

Mentionnons que, malgré cette difficulté, les courants géodésiques sur les produits libres ont trouvé des applications dans les travaux de Gupta [Gup17, Gup18], qui ont mené notamment à sa démonstration du théorème 1.2 pour $\text{FF}(F_N, \mathcal{F})$, et ceux de Guerch [Gue21b, Gue21c, Gue22a], qui lui ont permis d’obtenir un théorème de classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$ dont je parlerai en partie 2.1 de ce mémoire.

1.2 Bords de Gromov de $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$

Dans le cas d’une surface Σ connexe, orientable, de type fini (c’est-à-dire obtenue à partir d’une surface fermée en retirant éventuellement un ensemble fini de points), un théorème de Klarreich décrit le bord de Gromov du graphe des courbes de Σ en termes de feuilletages mesurés *arationnels* sur la surface [Kla99]. Dans cette partie, nous allons présenter des descriptions similaires des bords de Gromov des graphes présentés en partie précédente, obtenues en collaboration avec Guirardel [GH22]. Nous commençons par introduire les familles d’arbres dans $\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ qui nous seront utiles pour cette description.

1.2.1 Arbres \mathcal{Z} -allergiques, arbres arationnels, théorème d’unique dualité

De manière très informelle, les arbres \mathcal{Z} -allergiques sont ceux qui “ne voient” aucun \mathcal{Z} -scindement de (G, \mathcal{F}) , et décriront donc le bord de Gromov de $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$; les arbres arationnels sont ceux qui “ne voient” aucun facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) , et décriront donc le bord de Gromov de $\text{FF}(G, \mathcal{F})$. Voici leurs définitions.

Arbres \mathcal{Z} -allergiques. La notion qui suit a été introduite dans la thèse de l’auteur [Hor16a]. Un arbre $T \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est *\mathcal{Z} -allergique* s’il n’existe pas de chaîne finie $T = T_1, \dots, T_k$, avec $T_i \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$, de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, les arbres T_i et T_{i+1} soient compatibles, et de sorte que T_k soit un \mathcal{Z} -scindement (métrique) de (G, \mathcal{F}) .

Deux arbres \mathcal{Z} -allergiques T, T' sont *équivalents*, ce que nous noterons $T \sim T'$, s'ils sont tous deux compatibles avec un même arbre dans $\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$. Quoique ce ne soit pas évident, ceci définit bien une relation d'équivalence sur l'espace des arbres \mathcal{Z} -allergiques [Hor16a, Proposition 5.3]. Nous noterons $\mathcal{ZA}(G, \mathcal{F})$ le sous-espace de $\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ formé des arbres \mathcal{Z} -allergiques.

Arbres arationnels. La notion qui suit a été introduite par Reynolds [Rey12] dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, et généralisée aux produits libres par l'auteur dans [Hor14]. Elle sera très utile à plusieurs reprises dans ce mémoire. Rappelons qu'étant donné un arbre réel T non vide muni d'une action isométrique d'un groupe G , et un sous-groupe $A \subseteq G$ sans point fixe global dans T , il existe un unique sous-arbre non vide minimal A -invariant dans T .

Un arbre $T \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est *arationnel* si pour tout facteur libre propre A de (G, \mathcal{F}) , le groupe A ne fixe pas de point dans T , et le sous-arbre minimal A -invariant T_A est un arbre de Grushko de (A, \mathcal{F}_A) . Nous noterons $\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$ le sous-espace de $\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ formé des arbres arationnels, et $\mathbb{P}\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$ sa version projectifiée.

Tout arbre arationnel est \mathcal{Z} -allergique [Hor14, partie 4.3]. La relation d'équivalence sur $\mathcal{ZA}(G, \mathcal{F})$ décrite ci-dessus se restreint en la relation d'équivalence suivante sur $\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$, voir [GH19, Corollary 13.4] : deux arbres arationnels T, T' sont équivalents s'il existe des applications G -équivariantes préservant l'alignement $T \rightarrow T'$ et $T' \rightarrow T$.

Un arbre $T \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ est *relativement libre* si tout stabilisateur de point dans T est \mathcal{F} -périphérique. Nous noterons $\mathcal{FAT}(G, \mathcal{F})$ le sous-espace de $\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$ formé des arbres arationnels relativement libres.

J'énonce maintenant la propriété d'unique dualité des arbres arationnels annoncée en partie précédente. C'est l'un des résultats principaux de [GH19], qui généralise des travaux de Coulbois–Hilion–Reynolds [CHR15] et Bestvina–Reynolds [BR15, partie 4]. Nous dirons qu'une paire $(\alpha, \omega) \in \partial^{(2)}(G, \mathcal{F})$ est *simple* si elle est limite de paires de la forme $(g_n^{-\infty}, g_n^{+\infty})$, où chaque élément $g_n \in G$ est non \mathcal{F} -périphérique, et est contenu dans un facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) .

Théorème 1.7 (Guirardel–Horbez [GH19, Theorem 13.1]). *Soit G un groupe dénombrable, et \mathcal{F} un système de facteurs libres de G . Soit $T, T' \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$.*

- *Si $T \in \mathcal{FAT}(G, \mathcal{F})$ et si $\Lambda^2(T) \cap \Lambda^2(T') \neq \emptyset$, alors $T' \in \mathcal{FAT}(G, \mathcal{F})$ et $T' \sim T$.*
- *Si $T \in \mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$, et si $\Lambda^2(T) \cap \Lambda^2(T')$ contient une paire simple, alors $T' \in \mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$ et $T' \sim T$.*

Si les arbres arationnels ne “voient” aucun facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) , à l'inverse, les arbres non arationnels ont un ensemble fini de *facteurs de réduction*. Notons $\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbf{FF}(G, \mathcal{F}))$ l'ensemble des ensembles finis non vides de facteurs libres propres de (G, \mathcal{F}) . La proposition suivante est due à Reynolds [Rey12] dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, et à l'auteur dans le cas général [Hor14, partie 4.4].

Proposition 1.8. *Soit G un groupe dénombrable, et \mathcal{F} un système de facteurs libres de G . Il existe une application mesurable $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ -équivariante*

$$\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F}) \setminus \mathbb{P}\mathcal{AT}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbf{FF}(G, \mathcal{F})).$$

1.2.2 Description des bords de Gromov

Soit X un graphe hyperbolique muni d'une action isométrique de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ et d'une application équivariante $\pi_X : \mathcal{O}(G, \mathcal{F}) \rightarrow X$. Dans toute cette partie X sera l'un des graphes décrits en partie 1.1.3, et π_X est l'application qui à tout arbre de Grushko S associe le sommet de X correspondant au scindement sous-jacent à S (i.e. obtenu en oubliant la distance).

Étant donné un sous-espace $Y \subseteq \mathcal{ZA}(G, \mathcal{F})$, nous dirons que $\partial_\infty X$ est *décrit géométriquement* par Y s'il existe un homéomorphisme équivariant $\partial_\infty \pi_X : Y/\sim \rightarrow \partial_\infty X$ tel que

- pour tout $T \in Y$ et toute suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(G, \mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers T (pour la topologie de Gromov–Hausdorff équivariante), la suite $(\pi_X(S_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\partial_\infty \pi_X(T)$ (pour la topologie de Gromov sur $X \cup \partial_\infty X$);
- pour tout $T \in \mathcal{O}(G, \mathcal{F}) \setminus Y$ et toute suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(G, \mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers T , la suite $(\pi_X(S_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de point d'accumulation dans $\partial_\infty X$.

Dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, le théorème suivant est dû à Bestvina–Reynolds [BR15] et Hamenstädt [Ham12] pour FF_N , à Hamenstädt pour \mathcal{ZS}_N et à Dowdall–Taylor [DT17b, Theorem 4.8] pour \mathcal{ZF}_N . Dans le cas général, il est dû à l'auteur [Hor16a] pour $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$, et à Guirardel et à l'auteur [GH22, Theorem 3 et Theorem 4] pour $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$.

Théorème 1.9. *Soit G un groupe dénombrable, et \mathcal{F} un système de facteurs libres de G . Alors*

- $\partial_\infty \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$ est décrit géométriquement par $\mathcal{ZA}(G, \mathcal{F})$;
- $\partial_\infty \text{FF}(G, \mathcal{F})$ est décrit géométriquement par $\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$;
- $\partial_\infty \mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$ est décrit géométriquement par $\mathcal{FAT}(G, \mathcal{F})$.

La description de $\partial_\infty \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$ remonte à la thèse de l'auteur, et nous renvoyons à [Hor16a]. Nous expliquons maintenant comment les deux autres points peuvent être démontrés en s'appuyant sur le premier. Soit $\pi : \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \text{FF}(G, \mathcal{F})$ l'application grossièrement équivariante et préservant grossièrement l'alignement introduite en partie 1.1.3. Par un théorème de Dowdall–Taylor [DT17b, Theorem 3.2], ceci permet d'identifier $\partial_\infty \text{FF}(G, \mathcal{F})$ au sous-espace $\partial_{\mathcal{ZS}} \text{FF}(G, \mathcal{F})$ de $\partial_\infty \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$ formé des points ξ pour lesquels tout rayon quasi géodésique représentant ξ a une π -image de diamètre infini. De manière équivalente, $\xi \in \partial_{\mathcal{ZS}} \text{FF}(G, \mathcal{F})$ si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$ convergeant vers ξ , la suite $(\pi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de diamètre infini, voir par exemple [GH22, Lemma 1.5].

Le point crucial de notre description de $\partial_\infty \text{FF}(G, \mathcal{F})$ est de montrer que les arbres arationnels sont dans $\partial_{\mathcal{ZS}} \text{FF}(G, \mathcal{F})$. Le théorème 1.7 joue un rôle clé – et sa version pour les arbres dans $\mathcal{FAT}(G, \mathcal{F})$ joue un rôle clé pour la description de $\partial_\infty \mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$.

Proposition 1.10. *Soit $T \in \mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$, et soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(G, \mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers T . Alors $\{\pi_{\text{FF}}(S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de diamètre infini.*

Notre démonstration adapte un argument de Kobayashi–Luo (voir [Kob88] ou [MM99, Proposition 3.6]) montrant que le graphe des courbes d'une surface est (sauf cas sporadiques de petite complexité) non borné.

L'idée est que sinon, quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayons $d_{\text{FF}(G, \mathcal{F})}(\pi_{\text{FF}}(S_0), \pi_{\text{FF}}(S_n)) = M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_0 = S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^M = S_n$ une suite de scindements libres métriques de (G, \mathcal{F}) , vus comme des points de $\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$, dont les images dans FF (obtenues en oubliant la métrique) forment une géodésique joignant $\pi_{\text{FF}}(S_0)$ à $\pi_{\text{FF}}(S_n)$. Quitte à extraire, nous pouvons supposer qu'à i fixé, les arbres S_n^i convergent projectivement vers un arbre $T^i \in \overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$. Vu la définition des arêtes de $\text{FF}(G, \mathcal{F})$, quitte à extraire de nouveau, nous pouvons supposer que pour tout $i \in \{0, \dots, M-1\}$, soit

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, les arbres S_n^i et S_n^{i+1} sont compatibles, soit
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément $g_n^i \in G$ non \mathcal{F} -périphérique qui fixe un point dans S_n^i et S_n^{i+1} .

Nous pouvons alors montrer par récurrence descendante que pour tout $i \leq M$, l'arbre T^i est arationnel, et équivalent à T . Dans le premier cas ci-dessus, ceci découle du fait

que la compatibilité est une relation d'équivalence fermée sur $\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$, voir [GL17, Corollary A.12]. Dans le deuxième cas, quitte à conjuguer les g_n^i et à extraire, nous pouvons supposer que la suite $((g_n^i)^{-\infty}, (g_n^i)^{+\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une paire $(\alpha_i, \beta_i) \in \partial^2(G, \mathcal{F})$. Un argument de continuité de la lamination duale (voir [GH19, Proposition 4.23]) permet alors de construire une feuille simple dans $\Lambda^2(T^i) \cap \Lambda^2(T^{i+1})$; le théorème 1.7 d'unique dualité permet de conclure.

Remarques sur la topologie des bords de Gromov. La topologie des bords de Gromov des espaces hyperboliques étudiés dans cette partie reste très mystérieuse. À partir de la finitude de la dimension topologique de $\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ et de la description des bords comme quotient d'un sous-espace de $\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$, il est possible de donner une borne sur la dimension cohomologique des bords $\partial_\infty \mathcal{ZS}(G, \mathcal{F})$, $\partial_\infty \mathcal{FF}(G, \mathcal{F})$ et $\partial_\infty \mathcal{ZF}(G, \mathcal{F})$, voir [Hor16a, Corollary 8.3]. Avec Mladen Bestvina et Richard D. Wade [BHW20], nous avons montré que la dimension topologique de $\partial_\infty \mathcal{ZS}_N$, $\partial_\infty \mathcal{FF}_N$ et $\partial_\infty \mathcal{ZF}_N$ est finie, avec une borne supérieure affine en le rang N du groupe libre. Le calcul exact de la dimension topologique du bord est ouvert (il l'est également à notre connaissance dans le cas du graphe des courbes d'une surface, voir à ce sujet l'article de Gabai [Gab09]). Parmi les résultats connus, mentionnons aussi un travail récent de Bestvina–Chaika–Hensel [BCH21] démontrant que $\partial_\infty \mathcal{FF}_N$ est connexe par arcs et localement connexe par arcs pour tout $N \geq 18$.

1.2.3 Barycentre

Si l'hyperbolicité des graphes de facteurs et de scindements est un outil crucial dans l'étude de $\text{Out}(F_N)$, le défaut de compacité locale de ces graphes présente souvent une difficulté. Dans de nombreux cas, il est possible de contourner cette difficulté en exploitant parallèlement la géométrie de ces graphes et celle de l'outre-espace, qui est localement compact dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, et qui du moins a une compactification bien comprise en termes d'actions sur des arbres réels en général. La démonstration de l'énoncé ci-dessous repose sur cette idée : elle exploite à la fois l'hyperbolicité de $\mathcal{FF}(G, \mathcal{F})$ et la géométrie des *chemins de pliage* dans l'outre-espace.

Étant donné un graphe hyperbolique localement fini X , on peut canoniquement associer à tout triplet de points du bord deux à deux distincts un ensemble fini non vide de points de X , par une construction de barycentre, voir [Ada94a]. Lorsque X n'est pas localement fini, on ne peut en général associer qu'une région bornée. Mais dans le cas de $\text{Out}(F_N)$, ou plus généralement $\text{Out}(G, \mathcal{F})$, nous pouvons à tout triplet d'arbres arationnels associer un ensemble fini canonique de scindements libres (ou de classes de conjugaison de facteurs libres propres) de (G, \mathcal{F}) . Cet énoncé sera un ingrédient crucial pour la démonstration du théorème de superrigidité des cocycles présenté au chapitre 4, et pour la démonstration de la rigidité de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée, dès que $N \geq 3$, présentée au chapitre 5. Nous notons $\partial_\infty^{(3)} \mathcal{FF}(G, \mathcal{F})$ le sous-espace de $(\partial_\infty \mathcal{FF}(G, \mathcal{F}))^3$ formé des triplets de points deux à deux distincts, et $\mathcal{P}_{<+\infty}(\mathbf{FS}(G, \mathcal{F}))$ l'ensemble des ensembles finis non vides de scindements libres de (G, \mathcal{F}) .

Théorème 1.11 (Guirardel–Horbez–Lécureux [GHL22, Theorem 3]). *Soit G un groupe dénombrable, et \mathcal{F} un système de facteurs libres de G . Il existe une application mesurable $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ -équivariante $\partial_\infty^{(3)} \mathcal{FF}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{P}_{<+\infty}(\mathbf{FS}(G, \mathcal{F}))$.*

1.3 Topologie de complexes associés à $\text{Out}(G, \mathcal{F})$

Il est parfois utile de considérer des complexes simpliciaux, plutôt que des graphes, associés à $\text{Out}(G, \mathcal{F})$, pour obtenir des informations topologiques sur ce groupe. Par

analogie, mentionnons les importants travaux de Solomon–Tits [Sol69] sur le type d’homotopie de l’immeuble de Tits rationnel de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, ou ceux de Harer [Har86] pour le complexe des courbes d’une surface connexe orientable de type fini. Et dans le cadre des groupes libres, les travaux de Hatcher–Vogtmann [HV98] sur le type d’homotopie du complexe des facteurs libres de F_N (qui ne sont pas considérés à conjugaison près dans leur cas), ou plus récemment un article de Brück–Gupta [BG20] portant sur la topologie de complexes de facteurs libres et de scindements libres.

Nous présentons dans cette partie un travail en collaboration avec Damien Gaboriau et Yassine Guerch portant sur le groupe $\mathrm{Out}(W_N)$ des automorphismes extérieurs d’un groupe de Coxeter libre $W_N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (avec N facteurs). Nous démontrons le théorème suivant, qui décrit le comportement asymptotique de la croissance de l’homologie à valeurs dans tout corps \mathbb{K} , et la croissance de la partie de torsion de l’homologie intégrale, en tout degré inférieur à $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$.

Théorème 1.12 (Gaboriau–Guerch–Horbez [GGH22]). *Soit $N \geq 3$, et soit $\Gamma_1 \supsetneq \Gamma_2 \supsetneq \cdots$ une suite de sous-groupes distingués de $\mathrm{Out}(W_N)$ d’intersection triviale. Alors pour tout corps \mathbb{K} et tout entier $0 \leq j \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$, nous avons*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\dim_{\mathbb{K}} H_j(\Gamma_k, \mathbb{K})}{[\Gamma : \Gamma_k]} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |H_j(\Gamma_k, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}|}{[\Gamma : \Gamma_k]} = 0.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, le théorème d’approximation de Lück [Lüc94] permet de déduire que tous les nombres de Betti ℓ^2 de $\mathrm{Out}(W_N)$ s’annulent jusqu’en dimension $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$. Par contraste, en dimension maximale $N - 2$ égale à la dimension cohomologique virtuelle de $\mathrm{Out}(W_N)$, nous avons $\beta_{N-2}^{(2)}(\mathrm{Out}(W_N)) > 0$ par un argument de Gaboriau–Noûs [GN11]. Voir par exemple [Lüc02] pour une référence générale sur les nombres de Betti ℓ^2 .

Notre démonstration repose sur une méthode qui a été récemment introduite par Abért–Bergeron–Frączyk–Gaboriau [ABFG21]. Elle nécessite de construire une action de $\mathrm{Out}(W_N)$ sur un complexe simplicial dont nous comprenons le type d’homotopie et en particulier le degré de connexité, et pour lequel les stabilisateurs de cellules sont des sous-groupes plus simples que nous pouvons traiter par récurrence. Nous introduisons pour cela le *complexe des W_2 -bases partielles* de W_N , sur lequel $\mathrm{Out}(W_N)$ agit.

Une *W_2 -base partielle* de W_N est un ensemble fini non vide $\{[A_1], \dots, [A_k]\}$ de classes de conjugaison de sous-groupes de W_N , tous isomorphes au groupe diédral W_2 , tel qu’il existe des représentants A_i des classes de conjugaison $[A_i]$, et un sous-groupe $B \subseteq W_N$, de sorte que $W_N = A_1 * \cdots * A_k * B$. Le *complexe des W_2 -bases partielles* $|\mathrm{PB}_N|$ est la réalisation géométrique de l’ensemble des W_2 -bases partielles de W_N , ordonné par l’inclusion. En réalité, nous ne travaillons qu’avec un sous-complexe de $|\mathrm{PB}_N|$, défini comme suit. Fixons une fois pour toutes un N -uplet $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ d’éléments d’ordre 2 formant une base de W_N . Notons $|\mathrm{PB}_N^*|$ le sous-complexe induit de $|\mathrm{PB}_N|$ dont les sommets sont les W_2 -bases partielles pour lesquelles chaque A_j est de la forme $\langle gx_{2i-1}^*g^{-1}, hx_{2i}^*h^{-1} \rangle$, avec $g, h \in W_N$ et $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$. Notons que le sous-complexe $|\mathrm{PB}_N^*|$ est laissé invariant par le sous-groupe d’indice fini de $\mathrm{Out}(W_N)$ formé des automorphismes extérieurs ne permutant pas les classes de conjugaison des x_i^* .

Théorème 1.13 (Gaboriau–Guerch–Horbez [GGH22, Theorem 5]). *Pour tout $N \geq 3$, le complexe $|\mathrm{PB}_N^*|$ est homotopiquement équivalent à un bouquet de sphères de dimension $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$.*

Par ailleurs, les stabilisateurs pour l’action de $\mathrm{Out}(W_N)$ sur $|\mathrm{PB}_N|$ sont compris : ils sont de la forme $\mathrm{Out}(W_N, \mathcal{F})$, où \mathcal{F} est une W_2 -base partielle, et agissent donc sur l’épine de l’outre-espace $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_N, \mathcal{F})$, qui est contractile, avec stabilisateurs virtuellement abéliens. Ceci permet d’exploiter la stratégie de [ABFG21].

1.4 Questions et perspectives

Sur la géométrie des espaces associés à $\text{Out}(G, \mathcal{F})$. Beaucoup de questions restent ouvertes concernant la géométrie des espaces associés à $\text{Out}(G, \mathcal{F})$, et la dynamique de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ sur ces espaces. Par exemple, comment décrire le bord de Gromov de $\text{FS}(G, \mathcal{F})$? Que peut-on dire de la connexité des bords des graphes hyperboliques présentés dans ce chapitre? Ces graphes sont-ils de dimension asymptotique finie – je reviendrai sur cette question au chapitre 3.1? Quels sont les éléments de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ qui agissent sur ces graphes de manière faiblement proprement discontinue au sens de Bestvina–Fujiwara [BF02] – nous verrons une réponse dans le cas de $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ au chapitre 2.3?

Sur les nombres de Betti ℓ^2 de $\text{Out}(F_N)$ et $\text{Out}(W_N)$. La partie 1.3 suggère aussi plusieurs questions, auxquelles je souhaiterais réfléchir avec Damien Gaboriau et Yassine Guerch. D’une part, est-il vrai que tous les nombres de Betti ℓ^2 de $\text{Out}(W_N)$ s’annulent, à l’exception de celui en dimension maximale $N - 2$? Ceci serait compatible avec le fait que le signe de la caractéristique d’Euler de $\text{Out}(W_N)$ alterne avec la parité de N , démontré par Jensen–McCammond–Meier [JMM07]. Par ailleurs, qu’en est-il des nombres de Betti ℓ^2 de $\text{Out}(F_N)$? S’annulent-ils tous à l’exception de celui en dimension maximale $2N - 3$, voir [GN11, Question 1.2]? Les méthodes présentées en partie 1.3 permettent-elles au moins de démontrer l’annulation des nombres de Betti ℓ^2 jusqu’en dimension moitié, et d’obtenir un énoncé similaire au théorème 1.12 pour $\text{Out}(F_N)$? Un problème est de déterminer le type d’homotopie du complexe des bases partielles de F_N , défini de manière analogue à celui de W_N . Nos arguments dans [GGH22] semblent nous permettre de nous ramener à un problème portant sur la topologie de complexes simpliciaux finis, à savoir : quel est le type d’homotopie du complexe des bases partielles *visibles* dans un arbre simplicial S donné avec une action de F_N ? La notion de visibilité renvoie au fait que chacune des classes de conjugaison dans la base partielle doit être représentée par un lacet plongé dans $F_N \backslash S$ – on peut bien entendu aussi envisager des variantes sur cette notion.

2 Décomposition et classification des sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$

Soit Σ une surface connexe, orientable, obtenue à partir d'une surface fermée en retirant éventuellement un nombre fini de points. Rappelons que le *groupe modulaire* $\text{Mod}(\Sigma)$ est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de Σ qui en préservent l'orientation. Un théorème d'Ivanov [Iva92] assure que tout sous-groupe H de $\text{Mod}(\Sigma)$ qui ne contient pas de classe pseudo-anosovienne, a un sous-groupe d'indice fini qui fixe la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle sur Σ . Plus précisément, notons $\text{Mod}^0(\Sigma)$ le sous-groupe d'indice fini donné par le noyau de l'action en homologie modulo 3, i.e. le noyau du morphisme naturel $\text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}))$. Alors pour tout sous-groupe $H \subseteq \text{Mod}^0(\Sigma)$, il existe à isotopie près un unique ensemble fini \mathcal{C}_H de courbes fermées simples essentielles H -invariantes deux à deux disjointes et non homotopes sur Σ , de sorte que pour toute composante connexe S du complémentaire de l'union de \mathcal{C}_H , soit $H|_S$ contient un homéomorphisme pseudo-anosovien de S , soit $H|_S = \{\text{id}\}$. Ici $H|_S$ est l'image du morphisme de restriction de H dans $\text{Mod}(S)$, bien défini puisque H préserve la classe d'isotopie de S (le fait que $H \subseteq \text{Mod}^0(\Sigma)$ assure automatiquement que H ne permute pas les composantes connexes du complémentaire de \mathcal{C}_H). Notons que \mathcal{C}_H est vide si et seulement si $H = \{\text{id}\}$ ou H contient un homéomorphisme pseudo-anosovien. Ainsi le théorème d'Ivanov décompose la surface Σ en des composantes *actives* (où H agit avec un homéomorphisme pseudo-anosovien) et des composantes *inactives* (où H agit comme l'identité). Par ailleurs, le théorème d'Ivanov permet d'obtenir l'*alternative de Tits* pour $\text{Mod}(\Sigma)$, aussi démontrée par McCarthy [McC85] : tout sous-groupe non virtuellement abélien de $\text{Mod}(\Sigma)$ contient un sous-groupe libre non abélien.

Dans ce chapitre, nous proposons deux analogues au théorème d'Ivanov pour $\text{Out}(F_N)$, de natures un peu différentes. Le premier, présenté en partie 2.1, donne des facteurs de réduction pour tout sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$ ne contenant pas d'automorphisme complètement irréductible (avec une version pour des produits libres qui permet des raisonnements par récurrence). Le deuxième, présenté en partie 2.2, associe à tout sous-groupe $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ un scindement H -invariant qui décompose F_N en des parties actives et inactives pour H . Enfin nous présenterons en partie 2.3 une version renforcée de l'alternative de Tits pour $\text{Out}(F_N)$. Ces travaux sont en collaboration avec Vincent Guirardel.

2.1 L'alternative de Handel et Mosher pour les sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$

Un premier analogue au théorème d'Ivanov est le suivant. Il est dû à Handel–Mosher [HM09] pour les sous-groupes de type fini de $\text{Out}(F_N)$, et a été étendu par l'auteur dans sa thèse [Hor16b] à tous les sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$, avec une démonstration différente.

Théorème 2.1. *Soit $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ un sous-groupe qui ne contient pas d'automorphisme extérieur complètement irréductible. Alors H a un sous-groupe d'indice fini qui préserve la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de F_N .*

Dans le cas des surfaces, lorsqu'un sous-groupe $H \subseteq \text{Mod}^0(\Sigma)$ fixe la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle c , on peut découper la surface Σ le long de c , et H détermine un sous-groupe de $\text{Mod}(S)$ pour chaque composante connexe S de la surface découpée, ce qui permet des raisonnements par récurrence sur la complexité topologique de la surface.

Dans le cas de $\text{Out}(F_N)$, pour pouvoir amorcer une récurrence, il faut avoir un énoncé analogue au théorème 2.1 pour les sous-groupes de $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$, où \mathcal{F} est un système de facteurs libres de F_N . C'est l'objet du théorème suivant, qui est dû à Handel–Mosher

[HM20] pour les sous-groupes de type fini de $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$, et à Guirardel et à l'auteur dans le cas général [GH22, Theorem 1]. Rappelons pour l'énoncé qu'un groupe est *relativement hyperbolique torique* s'il est sans torsion, et hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes abéliens libres.

Théorème 2.2. *Soit G un groupe dénombrable, et soit \mathcal{F} un système de facteurs libres non sporadique de G . Soit $H \subseteq \text{Out}(G, \mathcal{F})$ un sous-groupe dénombrable. Supposons que soit H est de type fini, soit G est relativement hyperbolique torique. Alors l'une des assertions (mutuellement exclusives) suivantes est vérifiée :*

1. H contient un sous-groupe d'indice fini qui préserve la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) ;
2. H contient un automorphisme complètement irréductible relativement à \mathcal{F} , et dans ce cas l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :
 - (a) H contient un sous-groupe libre non abélien dont tous les éléments non triviaux sont complètement irréductibles relativement à \mathcal{F} ,
 - (b) H possède un sous-groupe d'indice fini H^0 qui se scinde en un produit semi-direct $H^0 = H^1 \rtimes \langle \Phi \rangle$, où Φ est un automorphisme complètement irréductible relativement à \mathcal{F} , tandis que H^1 ne contient aucun tel élément.

Exemple 2.3. Dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, l'assertion (2b) entraîne que H est virtuellement isomorphe à \mathbb{Z} , voir [KL11, Corollary 1.3]. Voici un exemple où ce n'est pas le cas en général.

Soit Σ une surface connexe, compacte, orientable de genre au moins 2 ayant exactement une composante de bord. Identifions le groupe fondamental de Σ au groupe libre F_N . Soit c une courbe fermée simple essentielle séparante sur Σ . Notons Σ_1 la composante connexe de $\Sigma \setminus c$ contenant le bord, et Σ_0 la sous-surface complémentaire. Alors $\mathcal{F} = \{[\pi_1(\Sigma_0)]\}$ est un système de facteurs libres de F_N . Soit $\varphi \in \text{Out}(F_N)$ un automorphisme extérieur induit par un homéomorphisme de Σ à support dans Σ_1 , et qui induit un homéomorphisme pseudo-anosovien de Σ_1 . Alors Φ est complètement irréductible relativement à \mathcal{F} , et Φ centralise le sous-groupe $\text{Mod}_{\Sigma_0}(\Sigma) \subseteq \text{Mod}(\Sigma)$ formé des classes des homéomorphismes à support dans Σ_0 . Le sous-groupe $H = \text{Mod}_{\Sigma_2}(\Sigma) \times \langle \varphi \rangle$ vérifie l'assertion (2b) du théorème 2.2.

L'argument utilisé dans la démonstration du théorème 2.2 tire son inspiration de la théorie des marches aléatoires sur les groupes, en particulier d'un article de Kaimanovich–Masur [KM96] portant sur les marches aléatoires sur le groupe modulaire. Un argument similaire avait déjà été exploité par l'auteur dans sa thèse [Hor16b, Hor14] ; il est ici combiné à la description du bord de $\text{FF}(G, \mathcal{F})$ présentée au chapitre précédent.

Esquisse de démonstration du théorème 2.2. Pour alléger les notations, nous noterons simplement $\text{FF}, \mathcal{AT}, \dots$ en place de $\text{FF}(G, \mathcal{F}), \mathcal{AT}(G, \mathcal{F}), \dots$

Le groupe H étant supposé dénombrable, considérons une mesure de probabilité μ sur H telle que $\mu(h) > 0$ pour tout $h \in H$. Soit $S_0 \in \mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}$. L'espace $\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}$ étant compact et métrisable, nous pouvons trouver une mesure de probabilité μ -stationnaire ν sur $\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}$, à support dans l'adhérence de l'orbite de S_0 . La μ -stationnarité signifie que pour tout sous-ensemble mesurable $A \subseteq \mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}$, nous avons

$$\mu(A) = \sum_{h \in H} \mu(h) \nu(h^{-1}A).$$

Une telle mesure ν peut être obtenue comme point d'adhérence faible-* de la suite des moyennes de Césaro $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu^{*i}$ des convolées successives de μ .

Supposons dans un premier temps que $\nu(\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}} \setminus \mathbb{P}\mathcal{AT}) > 0$. En renormalisant $\nu|_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}} \setminus \mathbb{P}\mathcal{AT}}$ en une mesure de probabilité, puis en la poussant en avant par l'application

$\mathbb{P}\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathbb{P}\mathcal{AT} \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbf{FF})$ donnée par la proposition 1.8, nous déduisons une mesure de probabilité μ -stationnaire $\bar{\nu}$ sur l'ensemble \mathbf{FF} des classes de conjugaison de facteurs libres propres de (G, \mathcal{F}) . Comme \mathbf{FF} est dénombrable, l'ensemble des éléments de $\bar{\nu}$ -mesure maximale est un ensemble fini non vide, et la μ -stationnarité de $\bar{\nu}$ assure qu'il est H -invariant. Ainsi H a un sous-groupe d'indice fini qui préserve la classe de conjugaison d'un facteur libre propre de (G, \mathcal{F}) .

Supposons maintenant que $\nu(\mathbb{P}\mathcal{AT}) = 1$. Par construction de ν , la H -orbite de S_0 a un point d'accumulation dans $\mathbb{P}\mathcal{AT}$. Par le théorème 1.9, ceci entraîne que les orbites de H dans \mathbf{FF} sont non bornées. Par la classification des actions de groupes sur des espaces hyperboliques ([Gro87, 3.1], voir aussi par exemple [CCMT15, Proposition 3.1]), il y a alors deux possibilités. Soit H a un sous-groupe d'indice au plus 2 qui fixe un point de $\partial_\infty \mathbf{FF}$, i.e. la classe d'équivalence d'un arbre arationnel par le théorème 1.9. Dans ce cas, une analyse des stabilisateurs d'arbres arationnels, pour laquelle nous renvoyons à [GH22, partie 6], nous permet de montrer que l'une des options 1 ou 2.(b) de l'énoncé est vérifiée (c'est dans cette analyse qu'intervient l'hypothèse que H est de type fini ou que G est relativement hyperbolique torique). Sinon l'action de H sur \mathbf{FF} contient deux isométries loxodromiques indépendantes, dont des puissances engendrent un sous-groupe de H dont tous les éléments non triviaux agissent loxodromiquement sur \mathbf{FF} (et sont donc complètement irréductibles relativement à \mathcal{F} par le théorème 1.2). Ainsi l'option 2.(a) est vérifiée. \square

Dans le cas où H contient des éléments complètement irréductibles relativement à \mathcal{F} , le théorème 2.2 peut être complété comme suit.

Théorème 2.4 (Guirardel–Horbez [GH22, Theorem 2]). *Soit G un groupe dénombrable, et soit \mathcal{F} un système de facteurs libres non sporadique de G . Soit $H \subseteq \text{Out}(G, \mathcal{F})$ un sous-groupe dénombrable. Supposons que soit H est de type fini, soit G est relativement hyperbolique torique. Alors l'une des assertions (mutuellement exclusives) suivantes est vérifiée :*

1. *H contient un sous-groupe d'indice fini qui préserve la classe de conjugaison d'un élément non \mathcal{F} -périphérique de G ;*
2. *H contient un automorphisme à la fois complètement irréductible et atoroïdal relativement à \mathcal{F} , et dans ce cas l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*
 - (a) *H contient un sous-groupe libre non abélien dont tous les éléments non triviaux sont à la fois complètement irréductibles et atoroïdaux relativement à \mathcal{F} ,*
 - (b) *H possède un sous-groupe d'indice fini H^0 qui se scinde en un produit semi-direct $H^0 = H^1 \rtimes \langle \Phi \rangle$, où Φ est complètement irréductible et atoroïdal relativement à \mathcal{F} , tandis que H^1 ne contient aucun automorphisme complètement irréductible relativement à \mathcal{F} , et aucun automorphisme atoroïdal relativement à \mathcal{F} .*

Développements ultérieurs. En utilisant les énoncés ci-dessus et la dynamique de $\text{Out}(F_N)$ sur des espaces de courants, Clay–Uyanik ont montré dans [CU20] le résultat suivant, qui est une version atoroïdale de l'alternative de Handel–Mosher : tout sous-groupe $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ qui ne contient pas d'automorphisme extérieur atoroïdal, doit fixer la classe de conjugaison d'un élément non trivial. Leur théorème a par la suite été très joliment généralisé par Guerch [Gue22a], qui a révélé un lien avec des problèmes de croissance dans $\text{Out}(F_N)$. Pour énoncer son théorème, rappelons que, sous l'itération d'un automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, la longueur de toute classe de conjugaison croît soit polynomialement, soit exponentiellement : ceci repose sur les travaux de Bestvina–Handel sur les réalisations ferroviaires d'automorphismes de groupes libres [BH92], voir

aussi [Lev09, Theorem 6.2]. Étant donné $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, notons $\text{Poly}(\Phi)$ l'ensemble des éléments de F_N dont la classe de conjugaison croît polynomialement sous les itérés de Φ . Plus généralement, étant donné un sous-groupe $H \subseteq \text{Out}(F_N)$, notons $\text{Poly}(H)$ l'ensemble des éléments de F_N dont la classe de conjugaison croît polynomialement sous itération de tout automorphisme extérieur dans H . Guerch montre dans [Gue22a] que tout sous-groupe $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ contient un élément Φ *dynamiquement représentatif*, au sens où $\text{Poly}(\Phi) = \text{Poly}(H)$. Notons que le théorème de Clay–Uyanik mentionné ci-dessus correspond précisément au cas où $\text{Poly}(H) = \{1\}$.

2.2 Scindements canoniques associés à un sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$

Dans cette partie, nous associons un scindement canonique à tout sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$. Nous allons en fait travailler dans le sous-groupe d'indice fini $\text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de $\text{Out}(F_N)$, défini comme le noyau du morphisme naturel $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ donné par l'action sur l'abélianisation modulo 3. Ce sous-groupe a l'avantage de nous permettre d'éviter beaucoup de phénomènes d'ordre fini. Par exemple, il est sans torsion, et si $H \subseteq \text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est un sous-groupe, et $A \subseteq F_N$ est un facteur libre dont la classe de conjugaison est invariante par un sous-groupe d'indice fini $H^0 \subseteq H$, alors la classe de conjugaison de A est invariante par H , voir [HM20, Theorem II.3.1]. De même, si un scindement libre S de F_N est invariant par un sous-groupe d'indice fini de H , alors il est H -invariant, voir par exemple [HW20, Lemma 2.6]. Le théorème suivant combine les théorèmes 2.9 et 2.10 ci-après.

Théorème 2.5 (Guirardel–Horbez [GH21b]). *Soit $N \geq 2$. Il existe une application $\text{Out}(F_N)$ -équivariante $H \mapsto U_H$ qui associe un scindement U_H de F_N à tout sous-groupe non trivial $H \subseteq \text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :*

1. *H préserve un scindement libre ou \mathcal{Z}_{\max} ;*
2. *il existe deux quasi-systèmes de facteurs libres maximaux H -invariants distincts.*

Nous renvoyons à [GH21b, Definition 8.6] pour la définition (technique) d'un quasi-système de facteurs libres, et donnons un exemple en partie 2.2.2 ci-dessous.

Nous pouvons préciser la nature des scindements qui apparaissent dans cet énoncé, mais ce point est un peu subtil : par exemple, on ne peut pas toujours associer canoniquement un scindement libre, ou même \mathcal{Z}_{\max} , à H . L'exemple 2.8 ci-dessous fournit un sous-groupe H de $\text{Out}(F_N)$ qui préserve une infinité de scindements libres, mais dont le normalisateur n'en préserve aucun – si bien qu'on ne peut pas associer à H un scindement libre dans l'énoncé ci-dessus. Nous travaillons avec la classe de scindements suivante : un scindement S de F_N est *modéré* si

- soit S est un scindement libre ou \mathcal{Z}_{\max} non trivial,
- soit S est *bi-non-sporadique*, i.e. les stabilisateurs d'arêtes de S sont de type fini et non abéliens, et S contient deux sommets dans des orbites distinctes dont le stabilisateur a une décomposition en produit libre non sporadique relative aux stabilisateurs d'arêtes incidentes.

Un exemple simple de scindement bi-non-sporadique est l'arbre de Bass–Serre d'une décomposition de la forme $F_6 = F_4 *_{F_2} F_4$, où le groupe d'arête est plongé comme facteur libre dans chacun des groupes de sommets incidents.

En fait, à tout groupe préservant un scindement modéré, nous pouvons en associer un canonique. Nous déduisons l'énoncé suivant, qui s'avèrera être crucial dans notre démonstration de la rigidité de $\text{Out}(F_N)$ pour l'équivalence mesurée.

Théorème 2.6 (Guirardel–Horbez [GH21b, Corollary 9.3]). *Soit $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ un sous-groupe infini. Si H préserve un scindement modéré de F_N , alors son normalisateur aussi.*

Je mentionne aussi, dans le même esprit, le théorème suivant.

Théorème 2.7 (Guirardel–Horbez [GH21b, Theorem 8.32]). *Soit $N \geq 2$, et soit $H \subseteq \mathrm{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ un sous-groupe infini. Si H fixe la classe de conjugaison d’un facteur libre propre de F_N , alors son normalisateur dans $\mathrm{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ aussi.*

Je vais maintenant préciser notre construction de U_H dans chacun des deux cas de l’énoncé du théorème 2.5 – dans le premier cas, je ne traiterai que la situation où H préserve un scindement libre de F_N , et je renvoie à [GH21b, partie 7] pour le cas où H préserve un scindement \mathcal{Z}_{\max} .

2.2.1 Le cas où H préserve un scindement libre

Dans cette partie, nous précisons ce qu’est le scindement U_H dans le cas où H préserve un scindement libre de F_N . L’intérêt de ce scindement est qu’il décrit complètement l’ensemble des scindements libres H -invariants de F_N . Commençons par un exemple.

Exemple 2.8. Soit Σ une surface compacte, connexe, orientable, de genre au moins 2, ayant exactement une composante de bord, dont nous identifions le groupe fondamental à F_N . Soit c une courbe fermée simple essentielle séparante sur Σ . Notons Σ_1 la composante connexe de $\Sigma \setminus c$ qui contient le bord, et Σ_0 l’autre composante connexe. Le groupe modulaire de Σ se plonge dans $\mathrm{Out}(F_N)$. Soit H le sous-groupe de $\mathrm{Out}(F_N)$ formé des classes d’isotopie d’homéomorphismes de Σ valant l’identité sur Σ_1 . Alors tout arc plongé essentiel sur Σ contenu dans Σ_1 et dont les deux extrémités sont sur le bord de Σ , détermine un scindement libre de F_N qui est H -invariant. Réciproquement, on peut montrer que tout scindement libre H -invariant est dual à un arc comme ci-dessus.

Dans cet exemple, le scindement canonique U_H associé à H sera le \mathcal{Z} -scindement dual à la courbe c . Il a deux orbites de sommets : ceux (dits de type V^0) dont le stabilisateur est conjugué à $\pi_1(\Sigma_0)$, et ceux (dits de type V^1) dont le stabilisateur est conjugué à $\pi_1(\Sigma_1)$. Notons que la donnée de U_H et des types de sommets détermine la famille des scindements libres H -invariants : ce sont exactement les scindements obtenus en “éclatant” les sommets v de type V^1 en utilisant un scindement libre du stabilisateur G_v dans lequel la classe de conjugaison représentée par la courbe c (c’est-à-dire le groupe d’arête incident dans U_H) est elliptique.

Le théorème suivant généralise l’exemple ci-dessus à tous les sous-groupes de $\mathrm{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ayant des scindements libres invariants.

Théorème 2.9 (Guirardel–Horbez [GH21b, Theorem 6.12]). *Soit $N \geq 2$, et soit $H \subseteq \mathrm{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ un sous-groupe. Alors il existe un scindement U_H de F_N , et une bipartition $V(U_H) = V^0 \sqcup V^1$ de l’ensemble de ses sommets, tels qu’un scindement libre S de F_N est H -invariant si et seulement s’il existe un raffinement commun \hat{S} de S et U_H tel que la préimage de tout sommet de V^0 par l’application d’écrasement $\hat{S} \rightarrow U_H$ soit réduite à un point.*

Notre démonstration du théorème 2.9 repose sur des arguments issus de la théorie des décompositions JSJ des groupes, qui apparaît dans les travaux de Sela [Sel97], et a été développée par Rips–Sela [RS97], Bowditch [Bow98], Dunwoody–Sageev [DS99], Fujiwara–Papasoglu [FP06], Guirardel–Levitt [GL17]. En voici très brièvement l’idée.

Soit \tilde{H} la préimage de H dans $\mathrm{Aut}(F_N)$. Dire qu’un scindement S de F_N est H -invariant équivaut à dire que l’action de F_N sur S s’étend en une action isométrique de \tilde{H} sur S . Autrement dit, nous pouvons voir l’ensemble \mathcal{S} des scindements libres H -invariants de F_N comme un ensemble d’actions de \tilde{H} sur des arbres. Nous montrons qu’en tant que \tilde{H} -arbres, tous les arbres de \mathcal{S} avec le nombre maximal d’orbites d’arêtes sont dans le même espace de déformation. Le scindement U_H^1 est alors construit comme un

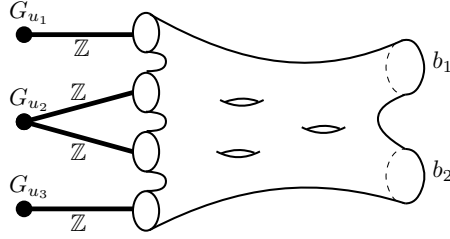


FIGURE 1 – Une décomposition de F_N en graphe de groupes, dont l’un des groupes de sommets est identifié au groupe fondamental d’une surface à bord. Ici $\hat{\mathcal{F}} = \{[G_{u_1}], [G_{u_2}], [G_{u_3}], [\langle b_1 \rangle], [\langle b_2 \rangle]\}$ est un quasi-système de facteurs libres.

arbre des cylindres au sens de Guirardel–Levitt [GL11] pour cet espace de déformation de \tilde{H} -arbres.

2.2.2 Quasi-systèmes de facteurs libres et décomposition dynamique

Dans cette partie, nous donnons des précisions sur le scindement U_H construit dans le deuxième cas du théorème 2.5. La construction est donnée en partie 8 de [GH21b].

Quasi-systèmes de facteurs libres. La notion de quasi-système de facteurs libres, certes technique, a pour avantage de prendre en compte des situations provenant de surfaces dans nos énoncés. Nous renvoyons à [GH21b, Définition 8.6] et donnons un exemple simple. Soit Σ une surface compacte, connexe, orientable ayant $k \geq 1$ composantes de bord, dont le groupe fondamental est identifié à F_N . Alors toute famille \mathcal{F} formée des classes de conjugaison des sous-groupes cycliques de F_N associés à $k - 1$ composantes de bord de Σ est un système de facteurs libres. Mais la famille $\hat{\mathcal{F}}$ des classes de conjugaison des sous-groupes cycliques associés aux k composantes de bord ne l’est pas : F_N est à un bout relativement à cette famille. Cette famille $\hat{\mathcal{F}}$ est un exemple de quasi-système de facteurs libres.

Plus généralement, notre définition permet d’inclure des composantes de bord “inutilisées” de \mathcal{Z} -scindements de F_N dont certains groupes de sommets sont identifiés à des groupes de surfaces. Un autre exemple est donné en figure 1, extraite de [GH21b, figure 6].

Décomposition dynamique. Nous nous intéressons maintenant au cas d’un sous-groupe H de $\text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ qui ne préserve aucun scindement libre, et préserve au moins deux quasi-systèmes de facteurs libres maximaux distincts.

Un exemple d’un tel sous-groupe est illustré sur la figure 2, extraite de [GH21b, Figure 1]. Soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ trois surfaces connexes compactes orientables, telles que le bord de chacune des surfaces Σ_i a deux composantes connexes b_i, c_i . Identifions F_N au groupe fondamental de l’espace X obtenu en recollant ces trois surfaces sur un cercle C , l’application de recollement de Σ_i étant un homéomorphisme entre C et la composante de bord b_i de Σ_i . Soit $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ le groupe des automorphismes extérieurs induits par des homéomorphismes de X qui préservent chaque surface et sont l’identité sur chaque composante de bord. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit $\hat{\Sigma}_i$ l’adhérence dans X du complémentaire de Σ_i , et soit Q_i le groupe fondamental de $\hat{\Sigma}_i$, vu comme un sous-groupe de F_N . Alors $\hat{\mathcal{F}} = \{[Q_i], [\langle c_i \rangle]\}$ est un quasi-système de facteurs libres maximal H -invariant.

Dans cet exemple, le scindement canonique U_H associé au groupe H est celui dont le graphe quotient est représenté à droite de la figure 2. Ses sommets sont de deux types : le sommet central (dit de type V_p) est *universellement périphérique* : il est $\hat{\mathcal{F}}$ -

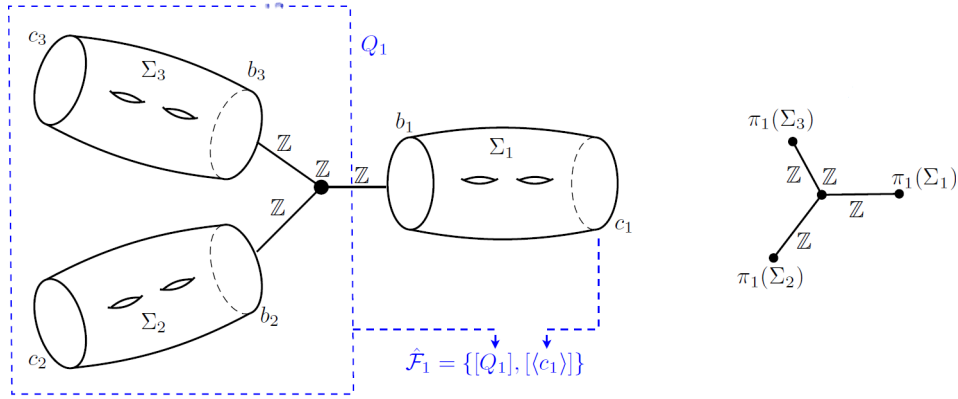


FIGURE 2 – L'exemple des trois surfaces et le scindement associé.

périphérique pour tout quasi-système de facteurs libres maximal H -invariant $\hat{\mathcal{F}}$. Les trois autres sommets v_i (associés aux surfaces Σ_i) sont *actifs* (dits de type V_a) : la restriction $H|_{G_{v_i}}$ contient des éléments pseudo-anosoviens, et n'a pas d'autres facteurs libres propres invariants que ceux correspondant aux courbes de bord de Σ_i . Ici $H|_{G_{v_i}}$ désigne l'image du morphisme $\theta : H \rightarrow \text{Out}(G_{v_i})$ défini de la manière suivante : tout élément $\varphi \in H$ a un représentant $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(F_N)$ tel que $\tilde{\varphi}(G_{v_i}) = G_{v_i}$, et $\theta(\varphi)$ est la classe extérieure de $\tilde{\varphi}|_{G_{v_i}}$ – qui ne dépend pas du choix du relevé $\tilde{\varphi}$, par malnormalité de G_{v_i} .

Plus généralement, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 2.10 (Guirardel–Horbez [GH21b, Theorem 8.15]). *Soit $N \geq 2$, et soit $H \subseteq \text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ un sous-groupe qui ne préserve aucun scindement libre de F_N , et tel qu'il existe deux quasi-systèmes de facteurs libres H -invariants distincts. Alors il existe un scindement H -invariant U_H de F_N , et une bipartition $V(U_H) = V_p \sqcup V_a$, tels que*

1. *le stabilisateur de tout sommet $v \in V_p$ est $\hat{\mathcal{F}}$ -périphérique pour tout quasi-système de facteurs libres H -invariant $\hat{\mathcal{F}}$;*
2. *le stabilisateur G_v de tout sommet $v \in V_a$ est un facteur libre de F_N dont la classe de conjugaison est H -invariante ; de plus $H|_{G_v}$ a un unique quasi-système de facteurs libres maximal invariant \mathcal{F}_v , et contient un automorphisme complètement irréductible relativement à \mathcal{F}_v .*

Par analogie au théorème d'Ivanov rappelé au début de ce chapitre, nous pensons aux sommets dans V_a comme aux sommets *actifs* pour le sous-groupe H . Notre démonstration exploite la dynamique d'automorphismes complètement irréductibles relativement à chacun des quasi-systèmes de facteurs libres H -invariant maximaux, et la description de leurs arbres attractifs.

2.3 Une alternative de Tits forte pour $\text{Out}(F_N)$ (travail en cours)

Dans cette partie, nous présentons le théorème suivant, obtenu en collaboration avec Vincent Guirardel, qui apparaîtra dans un article dont la rédaction est en cours de finalisation.

Théorème 2.11 (Guirardel–Horbez [GHb]). *Soit G un groupe hyperbolique sans torsion. Tout sous-groupe H non virtuellement résoluble de $\text{Out}(G)$ est SQ-universel, i.e. tout groupe dénombrable se plonge dans un quotient de H .*

En particulier H a un nombre non dénombrable de quotients deux à deux non isomorphes.

Ce théorème est nouveau déjà pour $\text{Out}(F_N)$; il renforce un théorème de Bestvina–Feighn–Handel [BFH00, BFH05, BFH04] démontrant l’*alternative de Tits* pour $\text{Out}(F_N)$, à savoir que tout sous-groupe non virtuellement abélien de $\text{Out}(F_N)$ contient un sous-groupe libre non abélien. Voir aussi les travaux plus récents de Handel–Mosher [HM15, HM17] pour une généralisation dans une autre direction : tout sous-groupe non virtuellement abélien de $\text{Out}(F_N)$ a un deuxième groupe de cohomologie bornée (à valeurs dans \mathbb{R}) de dimension infinie. Ce type d’énoncés trouve sa source dans les célèbres travaux de Tits [Tit72], qui a démontré que tout groupe linéaire de type fini non virtuellement résoluble contient un sous-groupe libre non abélien. Dans le cas des groupes modulaires de surfaces de type fini, l’alternative de Tits est due à McCarthy [McC85] et Ivanov [Iva92], et la version analogue au théorème ci-dessus à Dahmani–Guirardel–Osin [DGO17, Corollary 8.11]. En fait Dahmani–Guirardel–Osin démontrent que tout groupe *acylindriquement hyperbolique* (voir la définition ci-dessous) est SQ-universel [DGO17, Theorem 8.1].

Notre démonstration du théorème 2.11 repose donc sur la démonstration de l’hyperbolicité acylindrique de certains sous-groupes de $\text{Out}(G)$ et de $\text{Aut}(G)$. Notons au passage que le théorème 2.11 est aussi valable pour les sous-groupes de $\text{Aut}(G)$, puisque $\text{Aut}(G)$ est naturellement un sous-groupe de $\text{Out}(G*\mathbb{Z})$. En fait, notre démonstration, même pour les sous-groupes de $\text{Out}(G)$, nécessite le passage par $\text{Aut}(G)$. L’hyperbolicité acylindrique de $\text{Aut}(G)$ a été démontrée par Genevois dans le cas où G est à un bout [Gen19], et par Genevois et l’auteur dans le cas général [GH21a]. Je commence par présenter ces travaux.

2.3.1 Hyperbolicité acylindrique de $\text{Aut}(F_N)$

Un groupe G est *acylindriquement hyperbolique* [Osi16] s’il admet une action non élémentaire acylindrique sur un espace métrique hyperbolique X . L’acylindricité de l’action signifie que pour tout $R \geq 0$, il existe $L, N \geq 0$ tels que pour tout $x, y \in X$, si $d_X(x, y) > L$, alors l’ensemble des éléments $g \in G$ tels que $d_X(x, gx) < R$ et $d_X(y, gy) < R$ est de cardinal au plus N . Cette propriété est vérifiée par de nombreuses familles de groupes, et a de nombreuses conséquences importantes – nous renvoyons par exemple à [Osi18] pour un survol autour de cette notion.

Soit G un groupe, et soit X un espace métrique hyperbolique muni d’une action de G par isométries. Un élément $g \in G$ est *très faiblement proprement discontinu* pour l’action de G sur X s’il est loxodromique, et si l’orbite de $(g^{-\infty}, g^{+\infty})$ dans $\partial_\infty^{(2)}G$, l’espace des paires de points distincts de $\partial_\infty G$, est discrète. Il est *faiblement proprement discontinu* pour cette action si de plus, le stabilisateur dans G de $(g^{-\infty}, g^{+\infty})$ est virtuellement monogène. Cette dernière notion a été introduite par Bestvina–Fujiwara dans [BF02], et la première par Bestvina–Bromberg–Fujiwara dans [BBF16]. Voir aussi [HM21] pour une discussion plus détaillée. Par un théorème d’Osin [Osi16], tout groupe G qui admet une action non élémentaire sur un espace métrique hyperbolique G , avec un élément faiblement proprement discontinu, est acylindriquement hyperbolique.

Théorème 2.12 (Genevois–Horbez [GH21a]). *Soit G un groupe de type fini ayant une infinité de bouts. Alors $\text{Aut}(G)$ est acylindriquement hyperbolique.*

Ce théorème est nouveau même dans le cas où $G = F_N$ avec $N \geq 3$. L’hyperbolicité acylindrique de $\text{Out}(F_N)$ a été démontrée par Bestvina–Feighn [BF10], et tout automorphisme extérieur complètement irréductible est en fait faiblement proprement discontinu pour l’action de $\text{Out}(F_N)$ sur le graphe des facteurs libres FF_N [BF14b]. Mais l’énoncé analogue pour $\text{Aut}(F_N)$ ne découle pas de celui pour $\text{Out}(F_N)$: certes $\text{Aut}(F_N)$ agit aussi sur FF_N , mais le fait que $\text{Int}(F_N)$ soit dans le noyau de l’action empêche cette action de $\text{Aut}(F_N)$ d’être acylindrique. Notre démonstration pour $\text{Aut}(F_N)$ est en fait très différente. Nous démontrons que certains automorphismes intérieurs (de la forme $h \mapsto ghg^{-1}$,

où g n'est elliptique dans aucun scindement \mathcal{Z}_{\max} de F_N), sont faiblement proprement discontinus pour une action de $\text{Aut}(F_N)$ sur un espace hyperbolique.

L'espace que nous construisons n'est par contre pas canonique – il dépend du choix de l'élément $g \in F_N$. Il est obtenu via une construction de Bestvina–Bromberg–Fujiwara [BBF15], à partir d'une famille de projections entre des sous-espaces de l'autre-espace X_N de F_N (qui est une version de l'outre-espace dans laquelle chaque arbre est muni d'un point base, si bien que X_N est muni naturellement d'une action naturelle de $\text{Aut}(F_N)$). Nous fixons un point base $S_0 \in X_N$, et définissons Y_{id} comme l'ensemble des points de X_N consistant en le même arbre que S_0 (avec la même action de F_N), où l'on fait varier le point base le long de l'axe de g . Soit \mathbb{Y} l'orbite sous $\text{Aut}(F_N)$ de Y_{id} . La construction de Bestvina–Bromberg–Fujiwara requiert de définir, pour toute paire (Y_1, Y_2) d'éléments distincts de \mathbb{Y} , un sous-ensemble $\pi_{Y_1}(Y_2)$ de diamètre borné, et de vérifier certains *axiomes de projections*. En posant $d_{Y_3}(Y_1, Y_2) = \text{diam}_{Y_3}(\pi_{Y_3}(Y_1), \pi_{Y_3}(Y_2))$ (pour Y_1, Y_2, Y_3 deux à deux distincts), les axiomes consistent à vérifier qu'il existe $C \geq 0$ tel que :

1. si $d_{Y_3}(Y_1, Y_2) \geq C$, alors $d_{Y_1}(Y_2, Y_3) \leq C$ et $d_{Y_2}(Y_1, Y_3) \leq C$;
2. pour tous Y_1, Y_2 distincts, l'ensemble $\{Y_3 \in \mathbb{Y} \mid d_{Y_3}(Y_1, Y_2) \geq C\}$ est fini.

Dans notre cas, la projection de $Y_\varphi = \varphi \cdot Y_{\text{id}}$ sur Y_{id} est définie en faisant varier le point base dans la projection de l'axe de $\varphi(g)$ sur l'axe de g – nous vérifions que cette définition ne dépend pas du choix d'un automorphisme ψ tel que $\psi \cdot Y_{\text{id}} = \varphi \cdot Y_{\text{id}}$. Vérifier les axiomes de projection se ramène alors à contrôler les projections entre l'axe d'un élément $g \in F_N$ et les axes de ses images $\varphi(g)$ sous l'action des automorphismes de F_N .

Mentionnons le corollaire suivant.

Corollaire 2.13 (Genevois–Horbez [GH21a]). *Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. L'extension $F_N \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ est acylindriquement hyperbolique si et seulement si l'image de φ dans $\text{Out}(F_N)$ est d'ordre infini.*

Par un théorème de Ghosh [Gho23], cette extension est relativement hyperbolique si et seulement si l'image de φ dans $\text{Out}(F_N)$ est un automorphisme à croissance polynomiale, i.e. toute classe de conjugaison de F_N croît polynomialement sous itération de φ .

Notre théorème 2.12 a depuis trouvé d'autres applications, par exemple dans un travail de Fournier-Facio–Wade [FFW22] où les auteurs démontrent l'existence de quasi-morphismes non bornés $\text{Aut}(F_N)$ -invariants sur F_N .

2.3.2 Hyperbolicité acylindrique de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ (travail en cours)

Avec Vincent Guirardel, nous démontrons le théorème suivant, analogue au théorème 2.12 pour les automorphismes extérieurs relatifs.

Théorème 2.14 (Guirardel–Horbez [GHa]). *Soit G un groupe de type fini, et soit \mathcal{F} un système de facteurs libres non sporadique de G .*

Alors $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ est acylindriquement hyperbolique.

Comme dans le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, nous exhibons un élément de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ qui est faiblement proprement discontinu pour l'action de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ sur $\text{FF}(G, \mathcal{F})$. Cependant, en général, tous ne le sont pas. Par exemple, l'automorphisme décrit dans l'exemple 1.5 ne l'est pas, car son centralisateur n'est pas virtuellement monogène – il contient tout automorphisme représenté par un homéomorphisme de Σ valant l'identité sur Σ_b . Toutefois, nous démontrons le théorème suivant, que j'énonce dans le cas où G est un groupe libre pour simplifier.

Théorème 2.15 (Guirardel–Horbez [GHb]). *Soit \mathcal{F} un système de facteurs libres non sporadique de F_N .*

1. Tout automorphisme extérieur $\varphi \in \text{Out}(F_N, \mathcal{F})$ qui est complètement irréductible est très faiblement proprement discontinu pour l'action de $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$ sur $\text{FF}(F_N, \mathcal{F})$.
2. L'action de $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$ sur $\partial_\infty \text{FF}^{(3)}(F_N, \mathcal{F})$ est à orbites fermées et discrètes.

2.3.3 Alternative de Tits forte pour $\text{Out}(F_N)$ (travail en cours)

Nous démontrons en fait un énoncé plus fort que le théorème 2.11 : tout sous-groupe non virtuellement résoluble de $\text{Out}(G)$ possède un sous-groupe d'indice fini qui admet un quotient acylindriquement hyperbolique. Nous comprenons la nature de ces quotients : c'est ce que précise l'énoncé suivant, que j'énonce dans le cas des groupes libres pour simplifier.

Théorème 2.16 (Guirardel–Horbez [GHb]). *Soit $N \geq 2$, et soit $H \subseteq \text{Out}(F_N)$ un sous-groupe non virtuellement résoluble.*

Alors il existe un sous-groupe d'indice fini $H^0 \subseteq H$, un sous-groupe $A \subseteq F_N$ égal à son propre normalisateur, et un système de facteurs libres \mathcal{F}_A de A , tous deux invariants par H^0 à conjugaison près, tels que l'une des deux assertions suivantes soit satisfaite :

- $H^0|_A$ agit de manière non élémentaire sur le graphe des facteurs libres relatifs $\text{FF}(A, \mathcal{F}_A)$ avec un élément faiblement proprement discontinu ;
- le morphisme de restriction $H^0 \rightarrow \text{Out}(A)$ se relève en un morphisme $H^0 \rightarrow \text{Aut}(A)$ dont l'image contient un automorphisme intérieur qui est faiblement proprement discontinu pour une action non élémentaire de $\text{Aut}(A, \mathcal{Q})$ sur un espace hyperbolique, où \mathcal{Q} est un ensemble fini de classes de conjugaison de sous-groupes de A invariants par H^0 .

Comparons au cas des surfaces. Soit $H \subseteq \text{Mod}(\Sigma)$ un sous-groupe. Alors H a un sous-groupe d'indice fini H^0 qui préserve une décomposition (peut-être triviale) de Σ en sous-surfaces, et agit sur chaque sous-surface soit comme l'identité, soit avec un homéomorphisme pseudo-anosovien. Si H n'est pas virtuellement abélien, alors H^0 a une sous-surface active Σ_a sur laquelle H^0 agit avec deux homéomorphismes pseudo-anosoviens indépendants. Alors $H^0|_{\Sigma_a}$ agit sur le complexe des courbes de Σ_a avec des éléments faiblement proprement discontinus (les classes pseudo-anosoviennes le sont par un théorème de Bestvina–Fujiwara [BF08]).

Dans le cas des groupes libres, nous commençons par considérer un système de facteurs libres \mathcal{F} invariant par un sous-groupe $H^0 \subseteq H$ d'indice fini, maximal au sens où aucune classe de conjugaison de facteur libre propre de (F_N, \mathcal{F}) n'est invariante par un sous-groupe d'indice fini de H . Si \mathcal{F} est non sporadique, alors nous recherchons des éléments faiblement proprement discontinus pour l'action de H^0 sur $\text{FF}(F_N, \mathcal{F})$. Une difficulté est que nous ne disposons *a priori* que d'éléments très faiblement proprement discontinus, par le théorème 2.15. Mais nous montrons que si un élément de H^0 complètement irréductible relativement à \mathcal{F} , n'est pas faiblement proprement discontinu, alors son arbre (arationnel) attractif relativement à \mathcal{F} doit se scinder de manière non triviale en un graphe d'actions, sur un scindement S de F_N . En utilisant une version améliorée de l'argument de mesures stationnaires présenté en partie 2.1, nous montrons que si H^0 ne contient aucun élément faiblement proprement discontinu pour son action sur $\text{FF}(F_N, \mathcal{F})$, alors en fait le même scindement S est invariant par un sous-groupe d'indice fini de H . Et nous trouvons alors un sous-groupe $A \subseteq F_N$ (qui apparaît comme un groupe de sommet dans S) invariant par un sous-groupe d'indice fini de H^0 , pour lequel la restriction $H^0|_A$ satisfait la première conclusion de l'énoncé.

Supposons enfin \mathcal{F} sporadique, par exemple $\mathcal{F} = \{[A]\}$, où A est un facteur libre de rang $N - 1$. Écrivons $F_N = A * \langle t \rangle$. Quitte à passer à un sous-groupe d'indice au plus 2

de H , tout élément Φ de H a un unique représentant φ_g dans $\text{Aut}(F_N)$ qui envoie t sur un élément de la forme at , avec $a \in A$, et induit un automorphisme $\varphi_g \in \text{Aut}(A)$. Et Φ a aussi un unique représentant φ_d tel que $\varphi(t) = tb$, avec $b \in A$, qui se restreint en un automorphisme φ_d sur A . Ceci induit un plongement de H^0 dans $\text{Aut}(A) \times \text{Aut}(A)$. C'est ici que l'étude de l'acylindricité hyperbolique de $\text{Aut}(A)$ (théorème 2.12) est cruciale pour notre argument.

2.4 Questions et perspectives

L'étude des centralisateurs dans $\text{Out}(F_N)$, en particulier leurs propriétés de finitude, est toujours mal comprise, sauf dans certains cas très particuliers [Rod13, RW15, AKP17, GW19, FMS21, Gue22b, AM22, GHSS23]. Est-il vrai que tout centralisateur dans $\text{Out}(F_N)$ est de type VF, i.e. a un sous-groupe d'indice fini admettant un espace classifiant fini? Il est possible que les outils décrits dans cette partie puissent aider à répondre à cette question : si φ est suffisamment générique en un sens à préciser, alors son centralisateur sera virtuellement cyclique. Sinon on peut espérer associer à φ un scindement canonique (par le théorème 2.5), qui sera donc préservé par son centralisateur. En regardant l'action du centralisateur sur les groupes de sommets de ce scindement, on se ramène à un sous-groupe de plus petite complexité, et on peut espérer, par récurrence, avoir une compréhension plus fine du centralisateur. Ces questions peuvent aussi prendre un aspect algorithmique : peut-on produire un algorithme qui, étant donné $\varphi \in \text{Out}(F_N)$, détermine une présentation du centralisateur de φ ? Ceci nécessiterait par exemple de rendre algorithmiques les constructions des scindements présentés en partie 2.2.

3 Moyennabilité à l'infini de $\text{Out}(F_N)$ et de groupes d'Artin–Tits

La moyennabilité est une notion centrale en théorie des groupes. Les groupes au cœur de ce mémoire sont loin d'être moyennables, mais ils admettent malgré tout des actions moyennables, dont on peut tirer des informations. Ainsi la notion de *moyennabilité à l'infini* d'un groupe dénombrable, qui correspond à l'existence d'une action topologiquement moyennable sur un espace compact non vide (voir la définition en partie 3.1), trouve des applications importantes en K-théorie (elle entraîne la conjecture de Novikov), en théorie des algèbres d'opérateurs (elle entraîne l'exactitude de la C^* -algèbre réduite du groupe considérée), en théorie mesurée des groupes (elle sera exploitée dans les chapitres suivants en vue d'établir des théorèmes de rigidité du point de vue de l'équivalence mesurée). Nous évoquerons ces aspects en partie 3.1, et recommandons le survol [Oza06a] pour plus d'informations.

Dans ce chapitre, nous présentons deux théorèmes établissant la moyennabilité à l'infini de familles de groupes importantes. Le premier est l'objet d'un travail en commun avec Mladen Bestvina et Vincent Guirardel, et établit en particulier la moyennabilité à l'infini de $\text{Out}(F_N)$.

Théorème 3.1 (Bestvina–Guirardel–Horbez [BGH22]). *Soit G un groupe relativement hyperbolique torique, ou un groupe d'Artin–Tits à angles droits.*

Alors $\text{Out}(G)$ et $\text{Aut}(G)$ sont moyennables à l'infini.

Rappelons qu'un groupe est *relativement hyperbolique torique* s'il est sans torsion, et hyperbolique relativement à une famille finie de groupes abéliens libres de type fini.

Le deuxième, obtenu avec Jingyin Huang, établit la moyennabilité à l'infini d'une famille importante de groupes d'Artin–Tits.

Théorème 3.2 (Horbez–Huang [HH20, Corollary 2]). *Tout groupe d'Artin–Tits de type hyperbolique et de dimension cohomologique au plus 2 est moyennable à l'infini.*

3.1 Moyennabilité à l'infini : définition, enjeux, propriétés, exemples

Plusieurs notions de moyennabilité. Soit H un groupe dénombrable discret. Munissons l'ensemble $\text{Prob}(H)$ des mesures de probabilité sur H de la topologie de la convergence ponctuelle. Une action de H par homéomorphismes sur un espace compact K est *topologiquement moyennable* s'il existe une suite d'applications continues $\nu_n : K \rightarrow \text{Prob}(H)$ qui est *asymptotiquement équivariante*, i.e. telle que pour tout $h \in H$, nous ayons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} \|\nu_n(hx) - h_*\nu_n(x)\| = 0.$$

Ici $h_*\nu_n(x)$ est la mesure de probabilité sur H définie par $h_*\nu_n(x)(h') = \nu_n(x)(h^{-1}h')$.

Le groupe H est *moyennable à l'infini* (ou *exact*) s'il admet une action topologiquement moyennable sur un espace compact non vide. Mentionnons que ceci est équivalent à la moyennabilité topologique de l'action de H sur son compactifié de Stone–Čech, voir [Oza00]. Remarquons qu'un groupe dénombrable H est moyennable si et seulement si l'action triviale de H sur un singleton est topologiquement moyennable : c'est le critère de Reiter pour la moyennabilité.

Nous allons aussi travailler avec une variante mesurable de la définition ci-dessus. Soit Δ un espace mesurable, muni d'une action de H par bijections bi-mesurables. L'action de H sur Δ est *mesurablement moyennable* s'il existe une suite d'applications mesurables $\nu_n : \Delta \rightarrow \text{Prob}(H)$ telle que pour tout $h \in H$ et tout $\delta \in \Delta$, nous ayons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nu_n(h\delta) - h_*\nu_n(\delta)\| = 0.$$

En fait, dans le cas où Δ est l'espace borélien associé à un espace topologique compact, un argument dû à Renault [Ren15] et Ozawa [Oza06b, Proposition 11] (voir aussi [BGH22, Remark 2.10]) assure que la moyennabilité mesurable de l'action de G sur Δ entraîne automatiquement sa moyennabilité topologique.

Mentionnons aussi que lorsque l'espace Δ est muni d'une mesure de probabilité μ , il existe aussi une notion de μ -moyennabilité de l'action de G sur Δ due à Zimmer [Zim78]. La moyennabilité mesurable de l'action de G sur un espace borélien standard implique la μ -moyennabilité de cette action pour toute mesure de probabilité borélienne μ sur Δ dont la classe est G -invariante. Voir par exemple [GHL22, Proposition 2.5], qui repose sur un argument de Zimmer [Zim78, Proposition 2.2].

Enjeux. Il y a plusieurs motivations à l'étude de la moyennabilité à l'infini, venant de la topologie et de l'étude des algèbres d'opérateurs. D'une part, tout groupe de type fini Γ qui est moyennable à l'infini satisfait la conjecture de Novikov sur les signatures d'ordre supérieur issue de la K-théorie [Hig00] (voir aussi les travaux de Yu [Yu00], Higson–Roe [HR00], Guentner–Kaminker [GK02b, GK02a] pour des développements reliés). Par ailleurs, la moyennabilité à l'infini d'un groupe dénombrable Γ est équivalente à l'exactitude de sa C^* -algèbre réduite [AD02, Oza00]. Notre motivation principale vient de son utilisation en théorie mesurée des groupes, comme il sera expliqué plus tard dans ce mémoire.

Mentionnons aussi que tout groupe de type fini moyennable à l'infini se plonge grossièrement dans un espace de Hilbert [Yu00] (voir aussi [HR00] pour le fait que la propriété A avec laquelle Yu travaille est équivalente à la moyennabilité à l'infini pour les groupes de type fini). Par ailleurs, tout groupe de dimension asymptotique finie est moyennable à l'infini [HR00, Lemma 4.3].

Exemples. Expliquons tout d'abord pourquoi les groupes libres sont moyennables à l'infini, sans invoquer la finitude de leur dimension asymptotique (voir aussi [Oza06a]). Soit F_N un groupe libre de rang $N \in \mathbb{N}$. Soit T un arbre de Cayley de F_N , associé à une partie génératrice libre, dont nous identifierons les sommets à F_N . Montrons que l'action de F_N sur $K = \partial_\infty T$ est mesurablement moyennable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\xi \in \partial_\infty T$, soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble $[e, \xi)_n$ formé des n premiers sommets rencontrés le long du rayon géodésique $[e, \xi)$ joignant e à ξ . Pour tout $g \in F_N$, la mesure $g^{-1}\nu_n(g\xi)$ est la mesure uniforme sur l'ensemble $[g^{-1}, \xi)_n$. Comme les rayons $[e, \xi)$ et $[g^{-1}, \xi)$ ne diffèrent que sur une partie compacte, la différence symétrique $[e, \xi)_n \Delta [g^{-1}, \xi)_n$ est de cardinal borné. Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nu_n(\xi) - g_*^{-1}\nu_n(g\xi)\| = 0,$$

comme désiré.

La propriété géométrique cruciale qui fait fonctionner l'argument ci-dessus est que deux rayons géodésiques dans T ayant la même extrémité dans $\partial_\infty T$ sont toujours fortement asymptotes. Cette propriété géométrique est sous-jacente à la démonstration de nombreux théorèmes de moyennabilité à l'infini obtenus dans des contextes de groupes à courbure négative.

Ainsi, la moyennabilité à l'infini a été démontrée pour tous les groupes hyperboliques par Adams [Ada94a] (l'action du groupe sur son bord de Gromov est topologiquement moyennable), pour les groupes relativement hyperboliques dont les sous-groupes paraboliques sont eux-mêmes moyennables à l'infini (Ozawa [Oza06b]), pour les groupes agissant proprement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0) de dimension finie (Campbell–Niblo [CN05], voir aussi quelques généralisations dans [BCGNW09, GN11]

et [Duc18, Théorème 5.12]), pour les groupes modulaires de surfaces connexes orientables de type fini (Kida [Kid08a], Hamenstädt [Ham09], avec des développements plus récents par Przytycki–Sabok [PS21], et par Bestvina–Bromberg–Fujiwara [BBF15] qui montrent la finitude de leur dimension asymptotique), pour les groupes d’automorphismes d’immeubles localement finis (Lécureux [Léc10]). Mentionnons enfin le résultat remarquable de Guentner–Higson–Weinberger démontrant la moyennabilité à l’infini de tous les groupes linéaires dénombrables [GHW05].

Par ailleurs, la moyennabilité à l’infini est stable par passage aux sous-groupes et aux extensions [KW99], par commensurabilité, par quotient par un sous-groupe distingué moyennable [Now09].

À l’inverse, les groupes de type fini dont le graphe de Cayley contient un graphe expanseur proprement plongé ne sont pas moyennables à l’infini car ils n’admettent pas de plongement grossier dans un espace de Hilbert. De tels groupes ont été contruits par Gromov [Gro03].

3.2 Moyennabilité à l’infini de $\text{Out}(F_N)$

Dans cette partie, nous présentons la démonstration du théorème 3.1. Comme souvent dans ce mémoire, elle repose sur un argument inductif qui requiert (même pour $\text{Out}(F_N)$) d’établir un théorème plus général dans le cadre d’un produit libre.

Théorème 3.3 (Bestvina–Guirardel–Horbez [BGH22]). *Soit G un groupe dénombrable, et soit \mathcal{F} un système de facteurs libres de G .*

1. *Si pour tout sous-groupe $A \subseteq G$ dont la classe de conjugaison est dans \mathcal{F} , le groupe A est moyennable à l’infini, alors $\text{Out}(G, \mathcal{F}^{(t)})$ est moyennable à l’infini.*
2. *Si pour tout sous-groupe $A \subseteq G$ dont la classe de conjugaison est dans \mathcal{F} , les groupes A et $\text{Out}(A)$ sont moyennables à l’infini, alors $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ est moyennable à l’infini.*

Expliquons brièvement comment le théorème 3.1 découle de celui sur les produits libres. Dans le cas où G est un groupe hyperbolique sans torsion (ou plus généralement un groupe relativement hyperbolique torique), le théorème 3.3 ramène la démonstration de la moyennabilité à l’infini de $\text{Out}(G)$ au cas où G est à un bout. Dans ce cas G admet une décomposition JSJ canonique de G , construite par Sela [Sel97] dans le cas hyperbolique, et par Guirardel–Levitt [GL15] dans le cas relativement hyperbolique torique. Cette décomposition est invariante par $\text{Out}(G)$, ce qui fournit un morphisme d’un sous-groupe d’indice fini de $\text{Out}(G)$ vers un produit de groupes modulaires de surfaces (et de sous-groupes de $\text{GL}_d(\mathbb{Z})$ provenant des automorphismes des paraboliens, dans le cas hyperbolique torique), dont le noyau est abélien, ce qui permet de conclure.

Dans le cas où G est un groupe d’Artin–Tits à angles droits, le théorème 3.3 ramène encore une fois la démonstration de la moyennabilité à l’infini de $\text{Out}(G)$ au cas où G est à un bout, c’est-à-dire au cas où son graphe définissant est connexe. Dans ce cas, il est possible de “dévisser” $\text{Out}(G)$ en des sous-groupes plus simples grâce à des travaux de Charney–Vogtmann [CV09].

Mentionnons finalement que la moyennabilité à l’infini de $\text{Aut}(G)$ découle de celle de $\text{Out}(G)$, puisque $\text{Aut}(G)$ se plonge comme sous-groupe de $\text{Out}(G * \mathbb{Z})$ et que la moyennabilité à l’infini est stable par passage à un sous-groupe.

3.2.1 Stratégie de démonstration par récurrence

Le lemme suivant, dû essentiellement à Ozawa (voir [Oza06b, Proposition 11], voir aussi [Kid08a, Proposition C.1]), est particulièrement utile pour amorcer une stratégie

de récurrence (l'idée étant que les stabilisateurs de points dans l'ensemble D seront des sous-groupes plus simples de G). Cette stratégie par récurrence est inspirée de la démonstration de Kida de la moyennabilité à l'infini des groupes modulaires de surfaces connexes, orientables de type fini [Kid08a].

Lemma 3.4. *Soit G un groupe dénombrable, soit K un espace topologique compact non vide muni d'une action de G par homéomorphismes, et soit D un ensemble dénombrable discret muni d'une action de G . Supposons que*

1. *il existe une suite d'applications mesurables $\nu_n : K \rightarrow \text{Prob}(D)$ asymptotiquement G -équivariante ;*
2. *pour tout $d \in D$, le stabilisateur $\text{Stab}_G(d)$ est moyennable à l'infini.*

Alors G est moyennable à l'infini.

Nous allons l'appliquer dans la suite avec $K = \mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}(G, \mathcal{F})$ et $D = \mathbf{FF}(G, \mathcal{F})$, l'ensemble des classes de conjugaison de facteurs libres propres de (G, \mathcal{F}) . L'idée étant que les stabilisateurs de classes de conjugaison de facteurs libres sont de la forme $\text{Out}(G, \mathcal{F}')$, avec \mathcal{F}' de complexité moindre que \mathcal{F} . L'espace K se décompose en deux sous-espaces boréliens : l'espace des arbres arationnels, et l'espace des arbres non arationnels. Nous savons déjà (proposition 1.8) qu'à tout arbre T non arationnel, nous pouvons associer (de manière équivariante) un ensemble fini de facteurs libres propres de (G, \mathcal{F}) (et donc une mesure de probabilité sur D , en considérant la mesure de probabilité uniforme sur cet ensemble fini). Pour démontrer le théorème 3.3, il suffit donc de traiter le cas des arbres arationnels.

3.2.2 Le cas des arbres arationnels

Le cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$. Nous noterons simplement $\mathcal{AT}_N = \mathcal{AT}(F_N, \emptyset)$.

Théorème 3.5 (Bestvina–Guirardel–Horbez [BGH22, Theorem 6.4]). *L'action de $\text{Out}(F_N)$ sur $\mathbb{P}\mathcal{AT}_N$ est mesurablement moyennable.*

Nous allons maintenant expliquer quelle propriété géométrique est l'analogue au fait qui était crucial dans les groupes libres : deux rayons convergeant vers le même point du bord coïncident en dehors d'un compact. Pour simplifier, nous nous contenterons de travailler sur le sous-espace $\mathbb{P}\mathcal{FAT}_N$ formé des classes projectives d'actions libres de F_N sur des arbres arationnels – les arbres arationnels non libres sont duaux à des feuilletages mesurés sur des surfaces [Rey12] et peuvent être traités à part.

Soit $T \in \mathcal{FAT}_N$. Une *direction* dans T basée en un point $x \in T$ est une composante connexe de $T \setminus \{x\}$. Un *tournant* dans T est une paire $\{d, d'\}$ de directions basées en un même point x de T de valence au moins 3. Comme l'action de F_N sur T est libre, un théorème de Gaboriau–Levitt [GL95, Theorem III.2] assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de F_N -orbites de tournants dans T . Étant donné $S \in cv_N$, un *morphisme* $f : S \rightarrow T$ est une application telle que tout segment de S peut être subdivisé en un nombre fini de sous-segments, en restriction auxquels f est une isométrie. Il est *optimal* si tout point $x \in S$ est dans l'intérieur d'un segment $I \subseteq S$ tel que $f|_I$ est une isométrie. Nous dirons qu'un morphisme $f : S \rightarrow T$ *emprunte* le tournant $\{d, d'\}$ s'il existe un segment non dégénéré $I \subseteq S$ s'écrivant comme la réunion $I = I_1 \cup I_2$ de deux sous-segments fermés non dégénérés, avec $f(I_1) \subseteq \bar{d}$ et $f(I_2) \subseteq \bar{d}'$. Notons que l'ensemble des tournants empruntés par f est F_N -invariant ; il ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque f varie dans l'ensemble de tous les morphismes dont la source est dans cv_N et le but est T . Nous dirons que deux morphismes $f : S \rightarrow T$ et $f' : S' \rightarrow T$, avec $S, S' \in cv_N$, sont dans la même *classe de tournants* si les ensembles de tournants empruntés par f et f' sont les mêmes. Ceci est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\text{Mor}_{\rightarrow T}$ des morphismes dont

la source est dans cv_N et le but est T . Le lemme de factorisation qui suit remplace la propriété cruciale de rayons asymptotes ; étant donné $U \in cv_N$, nous notons $\text{vol}(F_N \setminus U)$ le *volume* du graphe quotient $F_N \setminus U$, défini comme la somme des longueurs de ses arêtes.

Lemme 3.6 (Bestvina–Guirardel–Horbez [BGH22, Lemma 1.6]). *Soit $f : S \rightarrow T$ et $f' : S' \rightarrow T$ deux morphismes optimaux dans $\text{Mor}_{\rightarrow T}$ dans la même classe de tournants. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $U \in cv_N$, si f se factorise par U et si $\text{vol}(F_N \setminus U) < \varepsilon$, alors f' se factorise par U .*

La démonstration de ce lemme est assez simple, en voici brièvement l'idée. Choisissons $\varepsilon > 0$ très petit (à préciser) devant la longueur des arêtes de S et de S' . Soit $g : S \rightarrow U$ un morphisme par lequel f se factorise. Nous allons expliquer comment construire l'application $g' : S' \rightarrow U$ par laquelle f' se factorise. Soit $x' \in S'$, et soit $I' \subseteq S'$ un segment légal de longueur 100ε centré en x' . Puisque f et f' sont dans la même classe de tournants, si ε a été choisi suffisamment petit, il existe un segment $I \subseteq S$ tel que $f(I) = f(I')$ – ici le point clé est d'utiliser la compacité du graphe quotient $F_N \setminus S'$ pour trouver $\varepsilon > 0$ convenant indépendamment du point x' . Un argument de simplification bornée, qui exploite l'hypothèse sur le covolume de U , nous permet alors de démontrer que si I_1 et I_2 sont deux tels segments, dont nous noterons les centres respectifs x_1 et x_2 , alors $g(x_1) = g(x_2)$. Informellement, l'idée est que comme le covolume de U est très petit, l'application $U \rightarrow T$ ne peut pas identifier deux segments J_1, J_2 trop longs qui s'intersectent en une de leurs extrémités, car cette opération diminue le covolume d'une quantité au moins la longueur de J_1 . Il faut donc qu'une grande partie des segments I_1 et I_2 , identifiés dans T , ait déjà été identifiée dans U . Nous posons alors $g'(x') = g(x_1)$, et vérifions que g' a la propriété souhaitée.

Le cas d'un produit libre général. Dans ce cas, notons $\text{Simp}(\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F}))$ l'ensemble dénombrable des simplexes ouverts de $\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$.

Théorème 3.7 (Bestvina–Guirardel–Horbez [BGH22, Théorème 1.8]). *Soit G un groupe dénombrable, et \mathcal{F} un système de facteurs libres de G . Il existe une application asymptotiquement $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ -équivariante $\mathbb{P}\mathcal{AT}(G, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Prob}(\text{Simp}(\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})))$.*

Ce théorème, combiné au lemme 3.4, suffit pour démontrer le théorème 3.3. En effet, il est facile d'associer équivariamment à tout simplexe Δ de $\mathbb{P}\mathcal{O}(G, \mathcal{F})$ (correspondant à une action de G sur un arbre simplicial S , dont on fait varier les longueurs d'arêtes) un ensemble fini de classes de conjugaison de facteurs libres propres de (G, \mathcal{F}) : considérons par exemple ceux qui apparaissent comme stabilisateur de point dans un écrasement de S .

Notons cependant que, contrairement au cas où $(G, \mathcal{F}) = (F_N, \emptyset)$, l'action de $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ sur $\mathbb{P}\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$ n'est pas mesurablement moyennable en général. En effet, en général, certains arbres arationnels de (G, \mathcal{F}) ont un stabilisateur non moyennable, ce qui est une obstruction. Cependant, sous l'hypothèse supplémentaire (nécessaire, et vérifiée par exemple lorsque $G = F_N$, avec \mathcal{F} arbitraire) que le centralisateur de tout élément non trivial de G est moyennable, nous démontrons que l'action du sous-groupe $\text{Out}(G, \mathcal{F}^{(t)})$ sur $\mathbb{P}\mathcal{AT}(G, \mathcal{F})$ est moyennable [BGH22, Theorem 6.4]. Mentionnons également la variante suivante, énoncée pour $G = F_N$ avec un système de facteurs libres \mathcal{F} arbitraire ; elle sera cruciale dans notre démonstration de la rigidité de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée présentée au chapitre 5.

Théorème 3.8 ([GH21b, Corollary 12.16]). *Soit \mathcal{F} un système de facteurs libres de F_N . Soit $\mathbb{P}\mathcal{AT}^{\text{amen}}(F_N, \mathcal{F})$ le sous-espace de $\mathbb{P}\mathcal{AT}(F_N, \mathcal{F})$ formé des arbres projectifs dont le stabilisateur dans $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$ est moyennable.*

Alors $\mathbb{P}\mathcal{AT}^{\text{amen}}(F_N, \mathcal{F})$ est un sous-espace borélien de $\mathbb{P}\mathcal{AT}(F_N, \mathcal{F})$, et l'action de $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$ sur $\mathbb{P}\mathcal{AT}^{\text{amen}}(F_N, \mathcal{F})$ est mesurablement moyennable.

La démonstration du théorème 3.7 est inspirée de celle du théorème 3.5, mais est beaucoup plus délicate. La difficulté vient du fait que, comme les arbres considérés ne sont plus munis d’actions libres de G , le nombre de classes de tournants est infini. Le remède consiste à trouver une façon (mesurable et $\text{Out}(G, \mathcal{F})$ -invariante) d’énumérer les classes de tournants des arbres arationnels de (G, \mathcal{F}) , et de ne considérer que les morphismes dont la classe de tournants vient en premier dans cette énumération. Nous renvoyons à [BGH22, Proposition 1.9] pour un énoncé plus précis. Cette énumération est faite à partir d’une analyse fine des arbres réels considérés reposant sur la dichotomie entre arbres géométriques et non géométriques au sens de [LP97], et la théorie de Rips (voir par exemple [GLP94] ou [BF95]).

Remarque 3.9. En retraçant l’argument inductif, il est possible de décrire un espace compact explicite avec une action topologiquement moyennable de $\text{Out}(F_N)$. Cependant sa description est assez peu maniable : il s’agit d’un produit direct infini de compactifications d’outre-espaces relatifs (associés à tous les facteurs libres de F_N , relativement à tous leurs systèmes de facteurs libres) et de bords d’arbres simpliciaux localement finis (utiles pour gérer les cas sporadiques). Nous renvoyons à la partie 6.1 de [BGH22] pour plus d’informations.

3.3 Moyennabilité à l’infini parmi les groupes d’Artin–Tits

Dans cette partie, nous présentons le théorème 3.2, qui découlera d’un théorème plus général portant sur des groupes agissant sur des complexes simpliciaux $\text{CAT}(-1)$.

Les groupes d’Artin–Tits sont une autre classe de groupes qui présentent de nombreuses analogies avec les groupes modulaires de surfaces. Ils seront centraux dans les parties 5 et 6 de ce mémoire. Ils généralisent les groupes de tresses, sont très reliés aux groupes de Coxeter, et jouent un rôle important dans l’étude des complémentaires d’arrangements d’hyperplans. Leur géométrie est très mystérieuse en général, même si certaines classes spécifiques sont de mieux en mieux comprises. Nous renvoyons par exemple à [McC17] pour un survol et des perspectives.

Les groupes d’Artin–Tits : définition et géométrie. Soit Γ un graphe simplicial fini, dont chaque arête $e = uv$ est étiquetée par un entier $m_{uv} \geq 2$. Le *groupe d’Artin–Tits* A_Γ est le groupe donné par la présentation suivante :

$$A_\Gamma = \langle V\Gamma \mid \underbrace{aba \cdots}_{m_{ab} \text{ termes}} = \underbrace{bab \cdots}_{m_{ab} \text{ termes}} \text{ lorsque } ab \in E\Gamma \rangle.$$

Nous nous intéresserons principalement dans la suite aux groupes d’Artin–Tits dont la dimension cohomologique est au plus 2. Par un théorème de Charney–Davis [CD95, Theorem B], ceci équivaut à imposer que pour tout tricycle dans Γ formé de trois arêtes étiquetées par m, n, r , nous ayons $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} \leq 1$.

Un groupe d’Artin–Tits est *de type hyperbolique* si le groupe de Coxeter associé (c’est-à-dire obtenu à partir de la présentation ci-dessus en imposant en plus que chaque générateur soit d’ordre 2) est hyperbolique. Par un résultat de Crisp [Cri05, Lemma 5], un groupe d’Artin–Tits A_Γ de dimension cohomologique au plus 2 est de type hyperbolique si et seulement si

- il n’y a pas de 4-cycle induit dans Γ (i.e. sans diagonale) dont toutes les étiquettes sont égales à 2, et
- si Γ contient un tricycle formé de trois arêtes étiquetées par m, n, r , alors $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} < 1$.

Soit Γ un graphe simplicial fini étiqueté, tel que le groupe d’Artin–Tits A_Γ soit de dimension cohomologique au plus 2. Étant donné un sous-graphe induit $\Lambda \subseteq \Gamma$ (i.e. pour

lequel deux sommets $u, v \in V\Lambda$ sont adjacents dans Λ si et seulement s'ils le sont dans Γ , le morphisme naturel $A_\Lambda \rightarrow A_\Gamma$ est un plongement, par un théorème de van der Lek [vdL83]. Le *complexe de Deligne* \mathbb{D}_Γ est la réalisation géométrique de l'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) des classes à gauche de sous-groupes de la forme $\{1\}$, ou A_v avec $v \in V\Gamma$, ou A_e avec $e \subseteq E\Gamma$.

Lorsque le groupe A_Γ est de type hyperbolique, le complexe de Deligne \mathbb{D}_Γ peut être muni d'une métrique $\text{CAT}(-1)$ qui est Γ -invariante, pour laquelle chaque simplexe est isométrique à un simplexe dans le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ et isométriquement plongé dans \mathbb{D}_Γ (il est *hyperbolique par morceaux* au sens de [BH99, Définition I.7.2]), et pour laquelle il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isométrie de simplexes. Voir [MP22, partie 3.1].

Moyennabilité à l'infini.

Théorème 3.10 (Horbez–Huang [HH20, Theorem 1]). *Soit X un complexe simplicial connexe $\text{CAT}(-1)$ hyperbolique par morceaux, avec un nombre dénombrable de simplexes ayant un nombre fini de types d'isométrie. Soit G un groupe dénombrable agissant sur X par isométries simpliciales.*

1. *Si le G -stabilisateur de tout sommet de X est moyennable à l'infini, alors G est moyennable à l'infini.*
2. *Si le G -stabilisateur de toute arête de X est moyennable, alors l'action de G sur $\partial_\infty X$ est mesurablement moyennable.*

En particulier, en considérant l'action sur le complexe de Deligne décrite ci-dessus, tout groupe d'Artin–Tits de type hyperbolique et de dimension cohomologique au plus 2 est moyennable à l'infini. La moyennabilité à l'infini de groupes d'Artin–Tits est aussi connue pour d'autres familles, comme ceux dits *de type FC*, i.e. dont le groupe de Coxeter associé à tout sous-graphe complet de Γ est fini [GN11], ou ceux dits *de type large*, i.e. dont toutes les étiquettes sont supérieures à 3 [HO17]; notre travail inclut de nouveaux exemples.

Insistons sur le fait que dans cet énoncé, l'espace X n'est pas supposé localement compact, si bien que $\partial_\infty X$ n'est pas nécessairement compact. Cet énoncé peut être comparé à un théorème de Kaimanovich montrant la moyennabilité à l'infini de groupes agissant sur des espaces $\text{CAT}(-1)$ sous une hypothèse de géométrie bornée [Kai04]. Nous ne faisons pas cette hypothèse, mais utilisons à la place la structure simpliciale et la finitude des types d'isométrie des simplexes de X .

Nous présentons maintenant une esquisse de démonstration du premier point du théorème 3.10 – le deuxième point suit des idées similaires.

Nous allons à nouveau exploiter le lemme 3.4, en utilisant comme espace compact la *compactification par horofonctions* \overline{X}_h de X . Choisissons un point base $x_0 \in X$. Munissons l'espace $C(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur X , de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. L'espace \overline{X}_h est défini comme l'adhérence de l'image du plongement de X dans $C(X, \mathbb{R})$ envoyant $x \in X$ sur la fonction $y \mapsto d(x, y) - d(x, x_0)$. Elle est naturellement munie d'une action de G par homéomorphismes, et deux choix différents de point base donnent des compactifications isomorphes. Voir par exemple [MT18, partie 3].

Comme les stabilisateurs de sommets de X sont moyennables à l'infini par hypothèse, au vu du lemme 3.4, il suffit d'associer à tout point de \overline{X}_h une suite asymptotiquement G -équivariante de mesures de probabilité sur l'ensemble VX des sommets de X .

Comme X est $\text{CAT}(-1)$, un résultat de Maher–Tiozzo [MT18, Lemma 3.10] assure que le bord visuel $\partial_\infty X$ s'identifie naturellement au sous-espace $\overline{X}_\infty \subseteq \overline{X}_h$ formé des horofonctions non bornées inférieurement. À l'inverse, si h est une horofonction bornée

inférieurement, alors l'ensemble (quasi)-minimisant de h est un ensemble borné dans X (voir [MT18, Lemma 3.13]), qui admet donc un centre circonscrit x_h puisque X est $\text{CAT}(-1)$ (voir par exemple [BH99, Proposition 2.7]). Dans ce dernier cas, nous associons à h la mesure uniforme sur les sommets du simplexe de dimension minimale de X contenant x_h .

En utilisant cette décomposition de la compactification de X par horofonctions, nous nous ramenons à associer à tout point de $\partial_\infty X$ une suite asymptotiquement G -équivariante de mesures de probabilité sur l'ensemble des simplexes de X .

Soit donc $\xi \in \partial_\infty X$, et soit r un rayon géodésique pointant vers ξ . La première idée naïve est d'associer à ξ la mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble des simplexes traversés par r avant le temps n . La difficulté est que si deux rayons r, r' pointent vers ξ , quoiqu'ils soient asymptotes, il se peut qu'ils ne traversent pas les mêmes simplexes. Par exemple, r pourrait longer une arête e en restant dans un simplexe Δ dont e est une face, tandis que r' longe e en restant dans un autre simplexe Δ' contenant e comme une face. Nous contournons cette difficulté grâce à un système de poids choisis de manière appropriée : dans le cas décrit ci-dessus, les mesures de probabilité $\mu_n(r)$ associée au rayon r va donner une masse pondérée par un coefficient très faible à Δ , mais une masse pondérée par un coefficient beaucoup plus fort à e . Si les poids sont bien choisis, les mesures de probabilité $\mu_n(r)$ et $\mu_n(r')$ vont satisfaire $\|\mu_n(r) - \mu_n(r')\|_1 \rightarrow 0$, si bien qu'on pourra définir $\mu_n(\xi) = \mu_n(r)$. Le choix d'un système de poids adapté requiert un travail particulièrement technique, pour lequel nous renvoyons à la partie 4 de [HH20]. La finitude du nombre de types d'isométrie de simplexes dans X est cruciale pour permettre de choisir ces poids de manière uniforme sur l'espace.

3.4 Questions et perspectives

Sur la dimension asymptotique du graphe des facteurs libres et de $\text{Out}(F_N)$. Une question ouverte importante sur $\text{Out}(F_N)$ est celle de sa dimension asymptotique : en particulier, le groupe $\text{Out}(F_N)$ est-il de dimension asymptotique finie ? Ceci renforcerait l'énoncé de moyennabilité à l'infini. La finitude de la dimension asymptotique du groupe modulaire d'une surface orientable de type fini a été démontrée par Bestvina–Bromberg–Fujiwara [BBF15].

Une première question, vraisemblablement plus simple, est celle de la finitude de la dimension asymptotique d'un graphe hyperbolique associé à $\text{Out}(F_N)$, par exemple le graphe des facteurs libres FF_N .

Pour le graphe des courbes, plusieurs démonstrations sont connues. La première, due à Bell–Fujiwara [BF08], repose sur l'existence de *géodésiques tendues* au sens de Masur–Minsky [MM00]. Ces géodésiques ont la propriété que si c_1, c_2, c_3 sont trois classes d'isotopie de courbes successives le long de la géodésique, alors c_2 est isotope à une composante de bord de la sous-surface remplie par c_1 et c_3 . Pour définir une notion analogue dans FF_N , il faudrait, à deux scindements S_1, S_3 , associer un scindement canonique S_2 . Ici nous pourrions vouloir exploiter les scindements canoniques construits en partie 2.2, mais ceux-ci ne sont pas des scindements libres ni même des \mathcal{Z} -scindements en général. Au mieux, une telle approche pourrait peut-être fonctionner en rang $N = 3$, où informellement il n'y a pas suffisamment de place pour d'autres scindements que les scindements libres et cycliques.

Une autre démonstration de la finitude de la dimension asymptotique du graphe des courbes, due à Bestvina–Bromberg [BB19b], consiste à démontrer la finitude de la *dimension capacitaire* du bord de Gromov, qui est une notion métrique de dimension, beaucoup plus fine que la dimension topologique. Nous savons que la dimension topologique de $\partial_\infty \text{FF}_N$ est finie [BHW20], mais nos arguments ne nous ont pas permis pour l'instant de montrer la finitude de la dimension capacitaire – c'est une piste qui reste à

explorer néanmoins.

Enfin, une troisième approche pourrait consister à essayer d'interpoler entre FF_N et un quasi-arbre, en construisant des graphes hyperboliques intermédiaires qui retiennent une notion d'indice, formulée en termes de réalisations ferroviaires ou d'arbres, qui compte le nombre de branches partant de chaque sommet. Une telle approche a été suggérée dans le cas du graphe des courbes par Hamenstädt et Bestvina–Bromberg–Rasmussen : il s'agit, partant du graphe des courbes, d'ajouter des arêtes entre des courbes qui s'intersectent, en fonction de la géométrie des composantes connexes du complémentaire de leur union.

L'argument de Bestvina–Bromberg–Fujiwara pour démontrer la finitude de la dimension asymptotique de $\text{Mod}(\Sigma)$ à partir de celle du graphe des courbes, repose sur une construction de complexes de projections, qui n'est pas non plus disponible dans le cas des groupes libres. Une question test, qui m'a été suggérée par Mladen Bestvina, est la suivante : étant donné un élément φ de $\text{Out}(F_N)$ d'ordre infini, existe-t-il une action d'un sous-groupe d'indice fini de $\text{Out}(F_N)$ sur un graphe hyperbolique, dans laquelle une puissance de φ soit loxodromique ? La réponse est positive dans le cas des groupes modulaires de surfaces [BBF15], mais ouverte pour $\text{Out}(F_N)$.

Sur la conjecture de Farrell–Jones pour $\text{Out}(F_N)$. Une autre question largement ouverte sur $\text{Out}(F_N)$, suggérée par ce chapitre, qui redémontrerait la conjecture de Novikov, est celle de savoir si $\text{Out}(F_N)$ satisfait la conjecture de Farrell–Jones, issue de la K -théorie [FJ93]. L'énoncé de cette conjecture est technique, mais, de manière un peu imprécise, la conjecture de Farrell–Jones pour un groupe G prédit un isomorphisme entre les groupes de K -théorie de l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$ et l'évaluation d'une théorie homologique d'un espace classifiant de G par rapport à la famille de ses sous-groupes virtuellement cycliques. Bartels–Bestvina [BB19a] l'ont démontrée pour les groupes modulaires de surfaces, et ont proposé une approche axiomatique, suggérant un angle possible d'attaque pour $\text{Out}(F_N)$ – nous renvoyons à l'introduction de [BB19a] pour cette approche.

4 Premiers phénomènes de rigidité dans $\text{Out}(F_N)$

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs phénomènes de rigidité pour $\text{Out}(F_N)$. En partie 4.1, nous présentons un théorème de rigidité du commensurateur abstrait de $\text{Out}(F_N)$ et de certains de ses sous-groupes, obtenu en collaboration avec Richard D. Wade. C'est un analogue pour $\text{Out}(F_N)$ des célèbres théorèmes de rigidité de Mostow [Mos73], Prasad [Pra73], Margulis [Mar91]. En partie 4.2, nous présentons un théorème de rigidité pour les morphismes de réseaux en rang supérieurs vers $\text{Out}(F_N)$, et l'étendons à un théorème de rigidité de cocycles dans l'esprit de celui de Zimmer [Zim80], ce qui constituera un premier pas vers la théorie mesurée de $\text{Out}(F_N)$. Ceci constitue un travail en commun avec Vincent Guirardel et Jean Lécureux.

4.1 Commensurateur abstrait

Soit G un groupe. Nous définissons une relation d'équivalence \sim sur l'ensemble des isomorphismes entre sous-groupes d'indice fini de G de la manière suivante : un isomorphisme $f_1 : G_1 \rightarrow G'_1$ est \sim -équivalent à $f_2 : G_2 \rightarrow G'_2$ si f_1 et f_2 coïncident en restriction à un sous-groupe d'indice fini de $G_1 \cap G_2$. Le *commensurateur abstrait* de G , noté $\text{Comm}(G)$, est le groupe des classes d'équivalence (pour \sim) d'isomorphismes entre sous-groupes d'indice fini de G . La loi de composition est donnée par la composition de représentants en restriction à un sous-groupe d'indice fini de G où celle-ci est définie.

Notons qu'il y a toujours un morphisme $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Comm}(G)$. Mais le commensurateur abstrait d'un groupe G peut être beaucoup plus gros que son groupe d'automorphismes : ainsi $\text{Comm}(\mathbb{Z}^n)$ est isomorphe à $\text{GL}(n, \mathbb{Q})$, tandis que $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ est isomorphe à $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$. De même $\text{Comm}(F_N)$ n'est pas de type fini dès que $N \geq 2$, voir [BB10].

L'étude des commensurateurs abstraits a été lancée par les travaux sur la rigidité des réseaux en rang supérieur. Ainsi, le théorème de rigidité de Mostow–Prasad–Margulis [Mos73, Pra73, Mar91] implique que si Γ est un réseau dans un groupe de Lie simple connexe non compact, à centre trivial, alors Γ est d'indice fini dans $\text{Comm}(\Gamma)$ si et seulement si Γ est non arithmétique. En général $\text{Comm}(\Gamma)$ est abstraitement commensurable au commensurateur relatif de Γ dans G , c'est-à-dire au sous-groupe de G formé des éléments $g \in G$ tels que $\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}$ soit d'indice fini dans Γ et $g\Gamma g^{-1}$. Par exemple, pour $n \geq 3$, le commensurateur abstrait de $\text{PSL}(n, \mathbb{Z})$ est abstraitement commensurable à $\text{PGL}(n, \mathbb{Q})$, par le théorème de densité de Borel [Bor66].

Dans le cas du groupe modulaire d'une surface Σ fermée, connexe, orientable de genre au moins 3, Ivanov a démontré que $\text{Comm}(\text{Mod}(\Sigma))$ est naturellement isomorphe au groupe modulaire étendu $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$, pour lequel on autorise les homéomorphismes à renverser l'orientation. Farb–Handel ont montré dans [FH07] que pour tout $N \geq 4$, le morphisme naturel $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{Comm}(\text{Out}(F_N))$ est un isomorphisme, généralisant un théorème de Bridson–Vogtmann [BV00] (valable pour tout $N \geq 3$) affirmant que $\text{Out}(\text{Out}(F_N)) = \{1\}$. Avec Richard D. Wade, nous avons donné une nouvelle démonstration du théorème de Farb–Handel [HW20], qui nous a permis de l'étendre au cas où $N = 3$ (le même énoncé est faux pour $N = 2$, le groupe $\text{Out}(F_2)$ étant virtuellement libre non abélien). Notre démonstration nous a également permis de déterminer le commensurateur abstrait d'une famille importante de sous-groupes de $\text{Out}(F_N)$, définie comme suit.

Par analogie au cas des surfaces, le *sous-groupe de Torelli* de $\text{Out}(F_N)$ est le noyau, noté IA_N , du morphisme naturel $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{Z})$ donné par l'action en abélianisation. Plus généralement, pour tout $s \geq 0$, notons $F_N^{(s)}$ le s -ième terme de la suite centrale descendante de F_N , avec $F_N^{(0)} = F_N$ et $F_N^{(k)} = [F_N, F_N^{(k)}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors tout automorphisme de F_N induit un automorphisme du groupe nilpotent libre $F_N/F_N^{(s)}$ de rang

N et de classe s . L'image d'un automorphisme intérieur de F_N est un automorphisme intérieur de $F_N/F_N^{(s)}$, si bien que nous obtenons un morphisme $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{Out}(F_N/F_N^{(s)})$. Notons J_N^s son noyau. C'est le s -ième terme de la *filtration d'Andreadakis–Johnson* de $\text{Out}(F_N)$, étudiée notamment par Andreadakis dans [And65]. Observons que, J_N^s étant distingué dans $\text{Out}(F_N)$, l'action de $\text{Out}(F_N)$ par conjugaison fournit un morphisme $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{Comm}(J_N^s)$.

Théorème 4.1 (Horbez–Wade [HW20]). *Pour tout $N \geq 4$ et tout $s \geq 0$, le morphisme naturel $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{Comm}(J_N^s)$ est un isomorphisme.*

Les morphismes naturels $\text{Out}(F_3) \rightarrow \text{Comm}(\text{Out}(F_3))$ et $\text{Out}(F_3) \rightarrow \text{Comm}(\text{IA}_3)$ sont des isomorphismes.

Notre théorème est encore plus général. Par exemple, pour tout $N \geq 4$ et tout sous-groupe H de $\text{Out}(F_N)$ contenant l'un des termes de la filtration d'Andreadakis–Johnson, nous montrons que le commensurateur abstrait de H coïncide avec son commensurateur relatif dans $\text{Out}(F_N)$. De même $\text{Aut}(H)$ est isomorphe au normalisateur de H dans $\text{Out}(F_N)$, voir [HHW19, Corollary 3]. Plus généralement, nous introduisons une notion technique de sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$ *riche en twists* (qui s'applique à tous les termes de la filtration d'Andreadakis–Johnson de $\text{Out}(F_N)$ lorsque $N \geq 4$), et déterminons le commensurateur abstrait de tout sous-groupe riche en twists.

Mentionnons aussi que par la suite, Guerch a démontré que pour tout $N \geq 5$, le morphisme naturel $\text{Out}(W_N) \rightarrow \text{Comm}(\text{Out}(W_N))$ est un isomorphisme [Gue21a] – rappelons que W_N est un groupe de Coxeter universel $W_N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et Bridson–Wade [BW11] ont très récemment démontré que le morphisme naturel $\text{Aut}(F_N) \rightarrow \text{Comm}(\text{Aut}(F_N))$ est un isomorphisme pour tout $N \geq 3$ – avec là aussi une version pour le sous-groupe de Torelli de $\text{Aut}(F_N)$.

Dans un article subséquent avec Sebastian Hensel et Richard D. Wade [HHW19], nous avons complété le théorème précédent en montrant notamment le résultat suivant.

Théorème 4.2 (Hensel–Horbez–Wade [HHW19, Theorem 1]). *Pour tout $N \geq 4$ et tout $s \geq 0$, tout morphisme injectif $J_N^s \rightarrow \text{Out}(F_N)$ diffère de l'inclusion par une conjugaison dans $\text{Out}(F_N)$.*

De manière peut-être surprenante, l'énoncé analogue pour les plongements du sous-groupe de Torelli d'une surface dans son groupe modulaire est toujours ouvert à notre connaissance.

Rappelons qu'un groupe G est *co-hopfien* si tout morphisme injectif $G \rightarrow G$ est un isomorphisme. Nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.3. *Pour tout $N \geq 4$ et tout $s \geq 0$, le groupe J_N^s est co-hopfien.*

Nous démontrons également que $\text{Out}(F_3)$ et tous ses sous-groupes d'indice fini sont co-hopfiens [HHW19, Corollary 5].

Éléments de démonstration. Notre démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2 repose sur un théorème de rigidité combinatoire, suivant une stratégie qui trouve sa source dans des travaux de Tits [Tit74], qui furent utilisés par Mostow [Mos73] dans la démonstration de son théorème de rigidité. Le premier théorème de ce type est peut-être le *théorème fondamental de la géométrie projective*, qui trouve ses origines dans l'œuvre de von Staudt [vS47], et affirme que si k est un corps, et $n \geq 3$, alors tout automorphisme de l'ensemble partiellement ordonné des sous-espaces vectoriels propres de k^n , doit provenir de la combinaison d'automorphismes du corps k et de transformations linéaires projectives. Ceci a été très largement généralisé par Tits, qui démontre dans [Tit74] que, sauf en petite dimension, le groupe des automorphismes préservant le type de l'immeuble sphérique

associé à un groupe algébrique simple est égal au groupe algébrique. Plus tard, Ivanov démontre dans [Iva97] que le groupe des automorphismes du graphe des courbes d'une surface connexe orientable de type fini est égal, sauf cas de petite complexité, au groupe modulaire étendu $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$, et utilise ceci pour déterminer le commensurateur abstrait de $\text{Mod}(\Sigma)$. Enfin, Bridson–Vogtmann ont démontré dans [BV01] que pour tout $N \geq 3$, le groupe des automorphismes simpliciaux de l'épine de l'outre-espace (un complexe simplicial sur lequel CV_N se rétracte par déformation) est précisément $\text{Out}(F_N)$. Nous allons travailler avec un espace un peu différent, mais ce théorème de Bridson–Vogtmann est sous-jacent à notre démonstration.

Soit FS_N^{ens} le graphe simplicial dont les sommets sont les classes d'homéomorphisme F_N -équivariant de scindements libres de F_N ayant exactement une orbite de sommets et une orbite d'arêtes, deux scindements étant reliés par une arête s'ils ont un raffinement commun ayant une orbite de sommets et deux orbites d'arêtes. Autrement dit les sommets de FS_N^{ens} correspondent aux classes d'homéomorphisme F_N -équivariant d'arbres de Bass–Serre de décompositions de F_N en scindements HNN de la forme $F_N = A*_{\{1\}}$, où A est un facteur libre de F_N isomorphe à F_{N-1} . Et les arêtes correspondent aux arbres de Bass–Serre de graphes de groupes ayant un sommet (de groupe de sommet isomorphe à F_{N-2}) et deux pétales issus de ce sommet (à groupes d'arêtes triviaux).² Le théorème suivant combine [HW20, Theorem 3.5] et [HHW19, Theorem 3.2].

Théorème 4.4 (Horbez–Wade, Hensel–Horbez–Wade). *Soit $N \geq 4$. Tout morphisme de graphes injectif $\text{FS}_N^{\text{ens}} \rightarrow \text{FS}_N^{\text{ens}}$ est un isomorphisme, et le morphisme naturel $\text{Out}(F_N) \rightarrow \text{Aut}(\text{FS}_N^{\text{ens}})$ est un isomorphisme.*

Pour démontrer le théorème 4.2, l'étape suivante consiste à caractériser les stabilisateurs (dans $\text{Out}(F_N)$, ou plus généralement dans J_N^s) de scindements libres à une orbite de sommets et d'arêtes, par une propriété algébrique qui est stable par plongement. De même, nous caractérisons algébriquement la compatibilité entre scindements. Ainsi tout plongement $f : J_N^s \rightarrow \text{Out}(F_N)$ induira un morphisme de graphes injectif $f_* : \text{FS}_N^{\text{ens}} \rightarrow \text{FS}_N^{\text{ens}}$; le théorème 4.4 assurera alors que f_* provient de l'action d'un élément $\varphi \in \text{Out}(F_N)$, et f sera la conjugaison par φ .

La caractérisation recherchée est énoncée dans la proposition 4.5 ci-dessous. L'énoncé est technique, mais les considérations qui suivent devraient aider à le démystifier. Considérons un scindement libre S à une orbite de sommets et une orbite d'arêtes, correspondant à l'arbre de Bass–Serre d'une décomposition $F_N = A*_{\{1\}}$, où A est un facteur libre de F_N isomorphe à F_{N-1} . Choisissons une base $\{x_1, \dots, x_N\}$ de F_N , telle que $A = \langle x_1, \dots, x_{N-1} \rangle$. Il y a un morphisme de restriction $\text{Stab}_{\text{Out}(F_N)}(S) \rightarrow \text{Out}(A)$: en effet tout automorphisme extérieur φ dans $\text{Stab}_{\text{Out}(F_N)}(S)$ admet un représentant $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(F_N)$ tel que $\tilde{\varphi}(A) = A$; la classe extérieure, dans $\text{Out}(A)$, de $\tilde{\varphi}|_A$ ne dépend pas du choix du représentant $\tilde{\varphi}$, par malnormalité de A dans F_N . Le noyau de ce morphisme de restriction est virtuellement isomorphe à $A \times A$: il est formé des automorphismes extérieurs ayant un représentant dans $\text{Aut}(F_N)$ qui est l'identité sur A , et envoie x_N sur un élément de la forme $ax_N^{\pm 1}b$ avec $a, b \in A$.

Par ailleurs $\text{Stab}_{\text{Out}(F_N)}(S)$ contient un produit libre de $2N - 4$ sous-groupes libres non abéliens, consistant en tous les automorphismes extérieurs ayant un représentant dans $\text{Aut}(F_N)$ qui fixe x_1 et x_2 , et envoie chaque x_i (avec $i \geq 3$) sur un élément de la forme

2. La notation FS_N^{ens} provient de la terminologie anglophone *edgewise nonseparating free splitting graph*. En effet, tout scindement libre de F_N peut être réalisé topologiquement par une 2-sphère plongée dans la variété $M_N = \sharp^N(S^1 \times S^2)$, de dimension 3, dont le groupe fondamental est identifié à F_N . Les sommets de FS_N^{ens} correspondent alors exactement aux classes d'homotopie de sphères non séparantes dans M_N , c'est-à-dire dont le complémentaire est connexe, et les arêtes de FS_N^{ens} correspondent aux classes d'homotopie d'ensembles de deux sphères disjointes et non homotopes dont le complémentaire est connexe.

ax_ib , avec $a, b \in \langle x_1, x_2 \rangle$. L'étude de ces produits directs maximaux de groupes libres dans $\text{Out}(F_N) - 2N - 4$ est en effet le nombre maximal de facteurs – est un ingrédient-clé dans [HW20]; elle a depuis été complétée par Bridson–Wade qui les ont complètement décrits [BW22].

Les propriétés ci-dessus vont nous permettre de caractériser les stabilisateurs de scindements libres à une orbite de sommets et d'arêtes [HHW19, Propositions 6.3 et 6.5]. Pour des raisons techniques, nous travaillons dans le sous-groupe d'indice fini $\text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ introduit en partie 2.2.

Proposition 4.5. *Soit $N \geq 4$ et $s \geq 0$. Un sous-groupe $H \subseteq J_N^s \cap \text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est le stabilisateur d'un scindement libre à une orbite de sommets et une orbite d'arêtes si et seulement si*

1. *H contient un produit direct $K_1 \times K_2$ de deux sous-groupes libres non abéliens K_1, K_2 , tous deux distingués dans H ;*
2. *si K'_1, K'_2 sont deux sous-groupes infinis qui se centralisent l'un l'autre, tous deux distingués dans H , alors ils sont tous deux libres non abéliens ;*
3. *H contient un produit direct de $2N - 4$ sous-groupes libres non abéliens ;*
4. *H est maximal parmi les sous-groupes de $J_N^s \cap \text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ vérifiant les trois propriétés précédentes.*

Lorsque $s = 0$, voici une présentation un peu simplificatrice de la manière dont nous démontrons que ces propriétés suffisent à entraîner que H préserve un scindement libre à une orbite de sommets et d'arêtes. La première hypothèse permet d'assurer que H préserve virtuellement un scindement modéré de F_N au sens de la partie 2.2 – cet argument intervenant aussi dans notre démonstration de la rigidité de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée, nous renvoyons à la proposition 5.3 ci-après pour ce point. Il reste alors à exclure les possibilités que S soit

- un scindement libre ayant au moins 2 orbites de sommets ou d'arêtes : nous montrons que le stabilisateur d'un tel scindement ne contient pas de produit direct de $2N - 4$ groupes libres non abéliens [HW20, Theorem 6.1 et Lemma 6.6] ;
- un \mathcal{Z}_{\max} -scindement à stabilisateur d'arête non trivial : à tout tel scindement est associé un twist T qui est central dans H , contredisant la propriété (2) avec $K'_1 = H$ et $K_2 = \langle T \rangle$;
- un scindement bi-non-sporadique : il y a dans ce cas un peu plus de travail, mais l'idée générale est que la présence de deux groupes de sommets “indépendants” contribuant à des gros groupes d'automorphismes entre en conflit avec la propriété (2).

Enfin, l'hypothèse de maximalité assure que H est le stabilisateur entier du scindement S (et pas un sous-groupe propre).

4.2 Morphismes et cocycles de réseaux vers $\text{Out}(F_N)$

Soit Σ une surface compacte, connexe. Un théorème de Farb–Kaimanovich–Masur [KM96, FM98] (voir aussi [Fuj02] pour le cas des surfaces non orientables) affirme que pour tout réseau irréductible Γ d'un groupe de Lie semi-simple G connexe, à centre fini, sans facteur compact, de rang réel au moins 2, tout morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Mod}(\Sigma)$ est d'image finie. Un théorème de Bridson–Wade [BW11] affirme que pour tout $N \geq 2$, tout morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Out}(F_N)$ est d'image finie. Haettel a démontré le théorème suivant.

Théorème 4.6 (Haettel [Hae20]). *Soit G un groupe algébrique simple connexe de rang supérieur sur un corps local, ou plus généralement un produit de tels groupes, et soit Γ un réseau dans G .*

Alors toute action de Γ sur un espace métrique hyperbolique X est élémentaire : Γ agit avec orbites bornées ou fixe un point de $\partial_\infty X$.

Mentionnons que récemment, Bader–Caprace–Furman–Sisto ont démontré une version de ce théorème autorisant les facteurs de rang 1 – la conclusion de leur théorème énonce alors que toute action de Γ non élémentaire sur un espace hyperbolique doit provenir d’un facteur de rang 1, voir [BCFS22, Theorem 1.1] pour l’énoncé précis.

En utilisant l’action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur le complexe des courbes de Σ (et plus généralement, l’action de ses sous-groupes sur des complexes de courbes de sous-surfaces de Σ), Haettel déduit une nouvelle démonstration du théorème de Farb–Kaimanovich–Masur, quoique avec des hypothèses un peu différentes sur Γ , qui sont celles de l’énoncé ci-dessus. Avec Guirardel, dans l’appendice de [Hae20], nous utilisons le théorème de Haettel pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Bridson–Wade (encore une fois avec les hypothèses de l’énoncé ci-dessus sur Γ), et en obtenons quelques généralisations au cadre de groupes d’automorphismes extérieurs de groupes (relativement) hyperboliques. Mentionnons le corollaire suivant, dû à Fujiwara [Fuj02] dans le cas où le groupe hyperbolique H est à un bout.

Corollaire 4.7. *Soit G un groupe algébrique simple connexe de rang supérieur sur un corps local, ou plus généralement un produit de tels groupes, et soit Γ un réseau dans G . Soit H un groupe hyperbolique sans torsion.*

Alors tout morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Out}(H)$ est d’image finie.

Avec Vincent Guirardel et Jean Lécureux, nous avons généralisé ce corollaire à un cadre mesuré, et démontré un théorème de rigidité de cocycles dans l’esprit de ceux de Zimmer [Zim80] et de leurs développements successifs par Spatzier–Zimmer [SZ91], Adams [Ada96], Monod–Shalom [MS04], Bader–Furman [BF14a, BF].

Théorème 4.8 (Guirardel–Horbez–Lécureux [GHL22]). *Soit G un groupe algébrique simple connexe de rang supérieur sur un corps local, ou plus généralement un produit de tels groupes, et soit Γ un réseau dans G . Soit X un espace de probabilité standard muni d’une action ergodique de Γ préservant la mesure, et soit H un groupe hyperbolique sans torsion.*

Alors tout cocycle borélien $c : \Gamma \times X \rightarrow \text{Out}(H)$ est cohomologue à un cocycle prenant ses valeurs dans un sous-groupe fini de $\text{Out}(H)$.

Dire que c est un cocycle signifie que pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ et presque tout $x \in X$, nous avons $c(\gamma_1\gamma_2, x) = c(\gamma_1, \gamma_2x)c(\gamma_2, x)$. Deux cocycles $c_1, c_2 : \Gamma \times X \rightarrow \text{Out}(H)$ sont dits *cohomologues* s’il existe une application mesurable $f : X \rightarrow \text{Out}(H)$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et presque tout $x \in X$, nous ayons $c_2(\gamma, x) = f(\gamma x)c_1(\gamma, x)f(x)^{-1}$.

Le même résultat est aussi vrai lorsque Γ est remplacé par le groupe algébrique ambiant G . En fait, notre démonstration pour Γ commence par un argument d’induction permettant de relever c en un cocycle sur tout G , ce qui nous permet d’exploiter la géométrie de G .

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas où $H = F_N$ est un groupe libre, avec $N \geq 2$. Notre démonstration suit une stratégie de Bader–Furman [BF14a, BF], combinée à des arguments venant de la géométrie de $\text{Out}(F_N)$ présentés dans les parties précédentes de ce mémoire. Nous avons mis en lumière un cadre géométrique général dans lequel la stratégie de Bader–Furman s’applique pour démontrer la rigidité des cocycles $c : \Gamma \times X \rightarrow \Lambda$ (où Λ est un groupe dénombrable). Je vais maintenant le décrire.

Cadre géométrique. Soit Λ un groupe dénombrable discret, et soit \mathbb{D} un ensemble dénombrable discret muni d’une action de Λ . Nous noterons $\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{D})$ l’ensemble des sous-ensembles finis non vides de \mathbb{D} . Il faut avoir en tête que les stabilisateurs de points de \mathbb{D} seront des sous-groupes plus simples de Λ , et que notre premier objectif est de montrer

que c est cohomologue à un cocycle à valeurs dans un tel sous-groupe. Un argument de récurrence sur une bonne notion de complexité de ces sous-groupes nous permettra alors de conclure.

Definition 4.9 (Rigidité géométrique). *Soit Λ un groupe dénombrable discret, soit \mathbb{D} un Λ -ensemble dénombrable discret, soit K un espace compact métrisable sur lequel Λ agit par homéomorphismes, et soit Δ un espace polonais muni d'une action de Λ par automorphismes boréliens. Nous dirons que Λ est géométriquement rigide relativement à (\mathbb{D}, K, Δ) si les trois propriétés suivantes sont satisfaites.*

- **Compatibilité** : *L'espace K admet une partition mesurable Λ -invariante $K = K_{\text{bdd}} \sqcup K_\infty$, et il existe des applications mesurables Λ -équivariantes $K_{\text{bdd}} \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{D})$ et $K_\infty \rightarrow \Delta$.*
- **Barycentre** : *Il existe une application mesurable Λ -équivariante $\Delta^{(3)} \rightarrow \mathcal{P}_\infty(\mathbb{D})$, où $\Delta^{(3)}$ désigne l'espace des triplets de points deux à deux distincts de Δ .*
- **Moyennabilité** : *L'action de Λ sur Δ est universellement moyennable.*

Nous dirons aussi simplement que Λ est *géométriquement rigide* relativement à \mathbb{D} s'il existe K et Δ comme ci-dessus tels que Λ soit géométriquement rigide relativement à (\mathbb{D}, K, Δ) .

Ce cadre recouvre beaucoup d'exemples : groupes (relativement) hyperboliques, groupes d'Artin–Tits à angles droits, groupes modulaires de surfaces. Voir [GHL22, partie 5]. Il sera aussi crucial pour les théorèmes de rigidité en équivalence mesurée au chapitre suivant.

Le groupe $\text{Out}(F_N)$ (et plus généralement, le groupe $\text{Out}(F_N, \mathcal{F}^{(t)})$ lorsque \mathcal{F} est un système de facteurs libres non sporadique) est géométriquement rigide relativement à l'ensemble $\mathbb{D} = \mathbf{FF}(F_N, \mathcal{F})$ des classes de conjugaison de facteurs libres propres, en prenant $K = \mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}(F_N, \mathcal{F})$, $\Delta = \partial_\infty \mathbf{FF}(F_N, \mathcal{F})$ et $K_\infty = \mathcal{AT}(F_N, \mathcal{F})$. L'application $K_{\text{bdd}} \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{D})$ est donnée par la proposition 1.8. L'application $K_\infty \rightarrow \Delta$ vient de la description du bord de Gromov de FF (Théorème 1.9). L'application barycentre a été présentée en théorème 1.11 et la moyennabilité de l'action en théorème 3.5 (voir aussi le paragraphe suivant le théorème 3.7 pour le cadre relatif).

Théorème 4.10 (Guirardel–Horbez–Lécureux [GHL22, Theorem 2]). *Soit Λ un groupe dénombrable discret, et soit \mathbb{D} un Λ -ensemble dénombrable. Supposons que Λ soit géométriquement rigide relativement à \mathbb{D} .*

Soit G un groupe algébrique simple connexe de rang supérieur sur un corps local, ou plus généralement un produit de tels groupes, et soit Γ un réseau dans G . Soit X un espace de probabilité standard muni d'une action ergodique préservant la mesure de Γ .

Alors tout cocycle borélien $\Gamma \times X \rightarrow \Lambda$ est cohomologue à un cocycle à valeurs dans un sous-groupe de Λ qui fixe virtuellement un élément de \mathbb{D} .

Lorsque $\Lambda = \text{Out}(F_N)$, cette proposition permet de ramener le théorème 4.8 au cas où c prend ses valeurs dans le stabilisateur $\text{Out}(F_N, [A])$ de la classe de conjugaison d'un facteur libre propre A . Nous nous ramenons plus généralement au cas d'un cocycle à valeurs dans $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$, où \mathcal{F} est un système de facteurs libres de F_N , et raisonnons par récurrence sur la complexité de (F_N, \mathcal{F}) . Une esquisse détaillée de la démonstration du théorème 4.10 est présentée en pages 294–295 de l'introduction de [GHL22], à laquelle je renvoie.

5 Théorèmes de rigidité en équivalence mesurée

Ce chapitre est à l'interface des théories géométrique et mesurée des groupes. Nous y présentons un théorème de superrigidité en équivalence mesurée pour quatre familles importantes de groupes : $\text{Out}(F_N)$ pour $N \geq 3$ (partie 5.2), les groupes modulaires de corps en anses de dimension 3 (partie 5.3), certains groupes d'Artin–Tits (partie 5.4) et les groupes de Higman (partie 5.5). Ces résultats ont été obtenus dans des collaborations avec Vincent Guirardel, Sebastian Hensel, et Jingyin Huang. Je commence ce chapitre par une introduction générale à l'équivalence mesurée (partie 5.1).

5.1 Introduction à l'équivalence mesurée

Dans cette partie, nous introduisons la notion d'équivalence mesurée ; nous expliquons un schéma de démonstration général pour obtenir des théorèmes de rigidité, qui remonte aux travaux de Furman [Fur99a], et présentons quelques conséquences de cette approche. Nous renvoyons aux survols [Sha05, Gab10, Fur11] pour plus d'informations.

Équivalence mesurée. La notion d'équivalence mesurée a été introduite par Gromov [Gro93] comme analogue mesuré à celle de quasi-isométrie entre groupes de type fini. Deux groupes dénombrables G_1, G_2 sont *mesurablement équivalents* s'il existe un espace mesuré standard (Ω, μ) , de mesure non nulle, muni d'une action de $G_1 \times G_2$ par automorphismes boréliens préservant la mesure, de sorte que pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'action de G_i sur Ω soit libre et ait un domaine fondamental borélien X_i de mesure finie. Par *domaine fondamental borélien*, nous entendons un sous-ensemble borélien X_i tel que pour tout $g \in G_i \setminus \{e\}$, l'intersection $gX_i \cap X_i$ soit de mesure nulle, et tel que $\Omega \setminus \left(\bigcup_{g \in G} gX_i\right)$ soit de mesure nulle.

Un tel espace Ω est appelé un *couplage d'équivalence mesurée* entre G_1 et G_2 . Lorsque $G_1 = G_2$, nous dirons que Ω est un *auto-couplage d'équivalence mesurée* de $G_1 = G_2$.

Deux groupes dénombrables G_1, G_2 sont *orbitalement équivalents* s'il existe un couplage d'équivalence mesurée entre G_1 et G_2 pour lequel G_1 et G_2 admettent un domaine fondamental borélien commun.

Équivalence orbitale d'actions. L'équivalence mesurée est intimement liée à la notion d'équivalence orbitale entre actions de groupes préservant une mesure de probabilité.

Soit G et H deux groupes dénombrables, soit (X, μ) et (Y, ν) des espaces de probabilité standard, et soit $\alpha_G : G \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ et $\alpha_H : H \rightarrow \text{Aut}(Y, \nu)$ deux actions libres, ergodiques, préservant la mesure. Les actions α_G et α_H sont *orbitalement équivalentes* s'il existe un isomorphisme d'espaces mesurés $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ tel que pour μ -presque tout $x \in X$, nous ayons $f(G \cdot x) = H \cdot f(x)$ (où $G \cdot x$ désigne la α_G -orbite de x , et $H \cdot f(x)$ la α_H -orbite de $f(x)$). Plus généralement, les actions α_G et α_H sont *stablement orbitalement équivalentes* s'il existe des sous-espaces mesurables $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$ de mesure strictement positive tels que si U^* et V^* désignent les espaces U, V renormalisés en des espaces de probabilité, il existe une application $f : U \rightarrow V$ qui induit un isomorphisme d'espaces mesurés $f^* : U^* \rightarrow V^*$, et telle que pour presque tout $x \in U$, nous ayons $f((G \cdot x) \cap U) = (H \cdot f(x)) \cap V$.

Par un théorème de Furman [Fur99b] et Gaboriau [Gab02, Proposition 6.2], deux groupes dénombrables sont orbitalement équivalents (respectivement, mesurablement équivalents) si et seulement s'ils admettent des actions libres, ergodiques préservant la mesure sur des espaces de probabilité standard qui soient orbitalement équivalentes (respectivement, stablement orbitalement équivalentes). L'observation cruciale est que si Ω

est un couplage d'équivalence orbitale entre G_1 et G_2 , avec un domaine fondamental borélien X , alors les actions de G_1 et G_2 sur X , obtenues via les identifications d'espaces mesurés $X \approx G_2 \backslash \Omega$ et $X \approx G_1 \backslash \Omega$, ont (essentiellement) les mêmes orbites. Plus généralement, dans le cas d'un couplage d'équivalence mesurée, si X_1 et X_2 sont des domaines fondamentaux boréliens respectifs pour les actions de G_1 et G_2 sur Ω , choisis de telle sorte que $U = X_1 \cap X_2$ soit de mesure strictement positive, alors les actions de G_1 sur X_2 , et de G_2 sur X_1 , ont leurs orbites qui coïncident en restriction à U .

Cette dernière observation peut aussi se traduire dans le langage des *groupoïdes mesurés* ; nous renvoyons par exemple à la partie 3 de [GH21b] pour une introduction détaillée, et ne présentons ici que l'exemple qui nous sera utile. À l'action de G_1 sur X_2 est associé un groupoïde mesuré $G_1 \ltimes X_2$: comme espace borélien, c'est $G_1 \times X_2$, muni de la loi de composition partielle $(h, gx)(g, x) = (hg, x)$, de l'opération d'inversion $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, gx)$, et des unités $e_x = (e, x)$. Il vient avec deux applications naturelles $s, r : G_1 \ltimes X_2 \rightarrow X_2$, données par $s(g, x) = x$ et $r(g, x) = gx$. De même, il y a un groupoïde mesuré naturellement associé à l'action de G_2 sur X_1 . Ces deux groupoïdes ont des restrictions à U (définies en ne retenant que les éléments \mathfrak{g} tels que $s(\mathfrak{g}), r(\mathfrak{g}) \in U$) qui sont isomorphes. Le groupoïde mesuré \mathcal{G} donné par cette restriction vient avec deux cocycles naturels $\rho_1 : \mathcal{G} \rightarrow G_1$ et $\rho_2 : \mathcal{G} \rightarrow G_2$ (ici $\rho_1(g, x) = g$).

Tension et rigidité en équivalence mesurée, et ses conséquences. La notion de *tension* en équivalence mesurée apparaît, sous des formes très légèrement différentes, dans les travaux de Kida [Kid11] et de Bader–Furman–Sauer [BFS13]. Rappelons qu'un groupe dénombrable G est à *classes de conjugaison infinies* si la classe de conjugaison de tout élément non trivial de G est infinie.

Nous dirons qu'un groupe dénombrable G est *tendu en équivalence mesurée* s'il existe un groupe \hat{G} à classes de conjugaison infinies contenant G comme sous-groupe d'indice fini tel que pour tout sous-groupe d'indice fini $G^0 \subseteq G$, et tout auto-couplage d'équivalence mesurée (Ω, μ) de G^0 , il existe une application mesurable presque $(G^0 \times G^0)$ -équivariante $\theta : \Omega \rightarrow \hat{G}$, i.e. telle que pour tout $g_1, g_2 \in G^0$ et μ -presque tout $\omega \in \Omega$, nous ayons $\theta((g_1, g_2) \cdot \omega) = g_1 \theta(\omega) g_2^{-1}$.

Un tel groupe \hat{G} est unique à isomorphisme près – il est en fait isomorphe au commensurateur abstrait de G , comme énoncé ci-dessous. Le théorème suivant donne plus généralement des conséquences de la tension d'un groupe en équivalence mesurée, qui s'appliqueront aux groupes étudiés tout au long de ce chapitre.

Théorème 5.1. *Soit G un groupe dénombrable tendu en équivalence mesurée. Alors les énoncés suivants sont satisfaits.*

- **Rigidité en équivalence mesurée** : *Tout groupe dénombrable H qui est mesurablement équivalent à G , est en fait commensurable à G à un noyau fini près.*³
- **Rigidité en équivalence orbitale** : *Pour tout groupe dénombrable H , et pour toutes actions $\alpha_G : G \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ et $\alpha_H : H \rightarrow \text{Aut}(Y, \nu)$ libres, ergodiques, préservant la mesure, sur des espaces de probabilité standard (X, μ) et (Y, ν) , si les actions α_G et α_H sont stablement orbitalement équivalentes, alors elles sont virtuellement conjuguées.*
- **Rigidité de commensurateur** : *Le morphisme naturel $\hat{G} \rightarrow \text{Comm}(G)$ est un isomorphisme.*
- **Rigidité des réseautages** : *Pour tout groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts \mathfrak{G} , et tout plongement $\iota : G \rightarrow \mathfrak{G}$ dont l'image est un réseau, il existe un morphisme continu $\pi : \mathfrak{G} \rightarrow \hat{G}$ à noyau compact tel que $\pi \circ \iota(g) = g$ pour tout $g \in G$.*

3. Ceci signifie qu'il existe un sous-groupe d'indice fini $H^0 \subseteq H$, et un morphisme $H^0 \rightarrow G$ dont le noyau est fini et l'image d'indice fini.

- **Rigidité des graphes de Cayley** : Pour tout sous-groupe d'indice fini sans torsion $G^0 \subseteq G$ et toute partie génératrice finie S de G^0 , le groupe $\text{Aut}(\text{Cay}(G^0, S))$ est dénombrable, et contient en fait G^0 comme sous-groupe d'indice fini.

Je précise quelques définitions et notations. Pour le deuxième point, suivant [Kid08b, Definition 1.3], nous disons que deux actions α_G, α_H sont *virtuellement conjuguées* s'il existe des sous-groupes finis distingués $F_G \trianglelefteq G$ et $F_H \trianglelefteq H$, des sous-groupes d'indice fini $G^1 \subseteq G/F_G$ et $H^1 \subseteq H/F_H$, et des actions conjuguées $\alpha_G^1 : G^1 \rightarrow \text{Aut}(X^1)$ et $\alpha_H^1 : H^1 \rightarrow \text{Aut}(Y^1)$ sur des espaces de probabilité standard, de sorte que α_G, α_H soient conjuguées aux actions induites à G à partir des actions α_G^1, α_H^1 (au sens, par exemple, de [Kid08b, Definition 2.1]).

Pour le cinquième point, je précise que le graphe de Cayley $\text{Cay}(G^0, S)$ est le graphe simplicial dont les sommets sont les éléments de G^0 , avec une arête entre deux éléments distincts g, h s'il existe $s \in S \cup S^{-1}$ tel que $h = gs$. La rigidité des graphes de Cayley n'est pas vérifiée pour les sous-groupes qui ont de la torsion : en fait, si un groupe infini de type fini G a un élément de torsion, alors il existe une partie génératrice finie S de G pour laquelle $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S))$ est non dénombrable, voir [dlST19, Lemma 6.1].

Le théorème 5.1 découle des travaux successifs de Furman [Fur99a, Fur01], Monod–Shalom [MS06], Kida [Kid10], Bader–Furman–Sauer [BFS13]. Nous renvoyons aussi à la partie 4 de [GH21b] où tous ces énoncés sont rassemblés.

Là encore, la tension en équivalence mesurée peut se retraduire dans le langage des groupoïdes mesurés, en un énoncé de rigidité des cocycles. Pour obtenir la tension en équivalence mesurée, il suffit de démontrer que, si \mathcal{G} est un groupoïde mesuré sur un espace de probabilité standard U , et si $\rho_1 : \mathcal{G} \rightarrow G$ et $\rho_2 : \mathcal{G} \rightarrow G$ sont deux cocycles provenant de restrictions d'actions de G préservant une mesure de probabilité, alors il existe une application mesurable $\varphi : U \rightarrow \hat{G}$ qui est (ρ_1, ρ_2) -équivariante, i.e. telle que pour tout $g \in \mathcal{G}$, nous ayons $\rho_2(g) = \varphi(r(g))\rho_1(g)\varphi(s(g))^{-1}$. C'est le point de vue adopté dans les articles [GH21b, HH21b, HH20, HH22b] que je vais présenter dans ce chapitre. L'un des intérêts de ce langage est qu'il permet de traiter de manière unifiée les théorèmes de rigidité de commensurateur et en équivalence orbitale. Un groupe est un exemple de groupoïde mesuré (sur un espace de probabilité réduit à un point), si bien que la rigidité de commensurateur se retrouve en considérant des groupoïdes donnés par des sous-groupes d'indice fini de G – en s'autorisant à travailler avec des cocycles provenant d'actions non libres de G .

Exemples. Un célèbre théorème d'Ornstein–Weiss [OW80] assure que tous les groupes moyennables infinis dénombrables sont mesurablement équivalents (et en fait, les groupes moyennables infinis dénombrables forment une classe d'équivalence mesurée, voir [Fur99a, Corollary 1.3]). À l'inverse, le premier théorème de type rigidité pour l'équivalence mesurée est dû à Furman, qui a démontré dans [Fur99a], étendant des travaux de Zimmer [Zim80], que si un groupe dénombrable H est mesurablement équivalent à un réseau dans un groupe de Lie simple connexe de rang supérieur à centre fini \mathfrak{G} , alors H a un sous-groupe d'indice fini qui admet une représentation comme réseau dans \mathfrak{G} à noyau fini. Kida a par la suite montré la rigidité (en fait la tension) en équivalence mesurée des groupes modulaires de surfaces connexes, orientables de type fini, sauf en petite complexité [Kid10].

Exploiter la courbure négative : l'argument d'Adams. Dans [Ada94b], Adams est le premier à exploiter l'hyperbolicité au sens de Gromov en théorie mesurée des groupes. Il démontre notamment qu'un groupe hyperbolique G non virtuellement monogène n'est jamais mesurablement équivalent à un produit direct de deux groupes infinis sans torsion. D'abord, G étant non moyennable, ne peut être mesurablement équivalent à un produit

de deux groupes moyennables. Par ailleurs, le normalisateur dans G de tout sous-groupe infini moyennable A (donc virtuellement monogène) est moyennable, tandis que ce n'est pas vrai dans un produit direct $G_1 \times G_2$ de deux groupes infinis sans torsion avec, disons, G_2 non moyennable (en prenant pour A un sous-groupe infini moyennable de G_1). Maintenant, si G était mesurablement équivalent à $G_1 \times G_2$, des restrictions d'actions libres, ergodiques, préservant une mesure de probabilité de ces deux groupes engendreraient des groupoïdes mesurés isomorphes. Mais il existe des notions de sous-groupoïde moyennable (généralisant la notion d'une action de groupe moyennable au sens de Zimmer [Zim78]) et de sous-groupoïde normalisé par un autre [FSZ89]. Si bien qu'il est possible de distinguer G de $G_1 \times G_2$ en exprimant le fait que le groupoïde associé à G ne peut pas contenir de sous-groupoïde moyennable infini normalisé par un sous-groupoïde non moyennable.

La démonstration d'Adams exploite plusieurs ingrédients géométriques, notamment la moyennabilité topologique de l'action de G sur son bord [Ada94a], et l'existence d'une application barycentre associant à tout triplet de points deux à deux distincts de $\partial_\infty G$, un ensemble fini non vide d'éléments de G . En voici l'idée; j'écris ici un argument pour le fait que le normalisateur d'un sous-groupe infini moyennable A de G est moyennable, mais l'argument donné s'adapte très bien au cadre de sous-groupoïdes. La moyennabilité de A permet d'obtenir une mesure de probabilité A -invariante ν sur l'espace compact métrisable $\partial_\infty G$. Si le support de ν est de cardinal au moins 3, alors en considérant la restriction de $\nu \otimes \nu \otimes \nu$ à l'ensemble $\partial_\infty^{(3)} G$ formé des triplets de points deux à deux distincts, nous déduisons une probabilité A -invariante sur $\partial_\infty^{(3)} G$. L'application barycentre donnerait un ensemble fini non vide A -invariant de G , pour l'action par multiplication à gauche de G sur lui-même, ce qui est une contradiction. Donc le support de ν est de cardinal 2, et ceci donne une paire de points du bord canoniquement associée à A , donc invariante par le normalisateur de A . La moyennabilité des stabilisateurs de points de $\partial_\infty G$ (remplacée par la moyennabilité de l'action de G sur $\partial_\infty G$ dans la version groupoïdale) assure que le normalisateur de A est moyennable.

Le cas des groupes modulaires de surfaces : l'argument de Kida. L'argument d'Adams a été par la suite exploité par Kida pour démontrer la tension en équivalence mesurée des groupes modulaires de surfaces de type fini (aux exceptions évidentes de petite complexité près). La philosophie est que ces groupes, par leur action sur le complexe des courbes, présentent de la courbure négative, mais ils contiennent aussi des "régions produit", précisément dans les stabilisateurs de courbes. L'argument d'Adams est exploité pour montrer que la relation d'équivalence mesurée retient l'agencement de ces régions produit. Et cet agencement suffit à reconstruire $\text{Mod}(\Sigma)$, en utilisant le théorème d'Ivanov [Iva97] qui affirme que le groupe $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ des automorphismes du graphe des courbes, est précisément $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$, le groupe modulaire étendu où l'on autorise les homéomorphismes à renverser l'orientation.

Précisons un peu. Dans le langage des groupoïdes mesurés, partant d'un groupoïde mesuré \mathcal{G} sur un espace de probabilité standard U , muni de deux cocycles $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{G} \rightarrow \text{Mod}(\Sigma)$, Kida construit une application (ρ_1, ρ_2) -équivariante $U \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$.

Le point-clé pour cela est de montrer que les sous-groupoïdes de \mathcal{G} provenant de la restriction de l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ à un stabilisateur de courbe (à isotopie près), sont les mêmes que l'on considère le cocycle ρ_1 ou ρ_2 . Plus précisément, disons qu'un sous-groupoïde mesuré \mathcal{H} de \mathcal{G} est *de type stabilisateur de courbe pour ρ_i* s'il existe une partition dénombrable borélienne $U^* = \sqcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ d'un sous-ensemble borélien $U^* \subseteq U$ de mesure pleine, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, une classe d'isotopie c_j de courbe fermée simple essentielle sur Σ , telle que $\mathcal{H}|_{U_j} = \rho_i^{-1}(\text{Stab}_{\text{Mod}(\Sigma)}(c_j))|_{U_j}$. Kida démontre qu'un sous-groupoïde de \mathcal{G} est de type stabilisateur de courbe pour ρ_1 si et seulement s'il l'est pour ρ_2 . Ceci est précisément ce qui lui permet de construire une application $\varphi : U \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$:

si sur un ensemble de mesure positive $U_j \subseteq U$, nous avons $\rho_1^{-1}(\text{Stab}_{\text{Mod}(\Sigma)}(c))|_{U_j} = \rho_2^{-1}(\text{Stab}_{\text{Mod}(\Sigma)}(c_j))|_{U_j}$, alors on définit $\varphi(x)(c) = c_j$ pour tout $x \in U_j$ – il n’est alors pas très difficile de vérifier que $\varphi(x)$ définit presque partout un automorphisme de graphe.

Il s’agit donc de caractériser les sous-groupoïdes de type stabilisateur de courbe par une propriété purement groupoïdale, sans référence aux cocycles. Pour éviter des phénomènes d’ordre fini, travaillons dans le sous-groupe d’indice fini $\text{Mod}^0(\Sigma) \subseteq \text{Mod}(\Sigma)$ constitué des classes d’homéomorphismes agissant trivialement en homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. En utilisant les théorèmes d’Ivanov [Iva92] sur la structure des sous-groupes de $\text{Mod}(\Sigma)$, on peut montrer qu’un sous-groupe $H \subseteq \text{Mod}^0(\Sigma)$ est le stabilisateur d’une classe d’isotopie de courbe fermée simple essentielle si et seulement si H est non moyennable, normalise un sous-groupe infini moyennable, et est maximal pour ces propriétés – le sous-groupe infini moyennable en question étant le sous-groupe monogène engendré par le twist de Dehn le long de la courbe (voir par exemple [FM12, partie 3.1.1] pour la définition). Une caractérisation analogue est possible en termes de sous-groupoïdes, via les notions de sous-groupoïde moyennable et de sous-groupoïde normalisé par un autre. En plus de la théorie d’Ivanov, la démonstration de la version groupoïdale de l’énoncé ci-dessus utilise de manière cruciale, pour faire fonctionner un argument similaire à celui d’Adams,

- l’existence d’une application barycentre, associant à tout triplet de points de $\partial_\infty \mathcal{C}(\Sigma)$, un ensemble fini de classes d’isotopie de courbes sur Σ , due à Kida [Kid08a, partie 4.1.2];
- la moyennabilité mesurable de l’action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $\partial_\infty \mathcal{C}(\Sigma)$, due à Kida [Kid08a, partie 3] et Hamenstädt [Ham09].

Je vais présenter un argument du même type pour $\text{Out}(F_N)$ dans la partie suivante.

5.2 Rigidité de $\text{Out}(F_N)$

Dans les parties précédentes de ce mémoire, nous avons mis en place les outils importants dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 5.2 (Guirardel–Horbez [GH21b]). *Pour tout $N \geq 3$, le groupe $\text{Out}(F_N)$ est tendu en équivalence mesurée.*

En particulier $\text{Out}(F_N)$ est rigide en équivalence mesurée pour tout $N \geq 3$, comme annoncé au Théorème 1 dans l’introduction. Par ailleurs, toutes les formes de rigidité énoncée au théorème 5.1 sont vérifiées pour $\text{Out}(F_N)$ – mentionnons, pour la rigidité des graphes de Cayley, que $\text{Out}(F_N)$ est virtuellement sans torsion.

En place du graphe des courbes, nous travaillons avec le graphe des scindements libres non séparants, dont le groupe des automorphismes est exactement $\text{Out}(F_N)$, voir [Pan14]. C’est une légère variante du graphe FS^{ens} défini au chapitre précédent : ses sommets sont les classes d’homéomorphisme F_N -équivariant de scindements libres ayant exactement une orbite de sommets et une orbite d’arêtes (appelés scindements *non séparants*), et deux scindements sont reliés par une arête s’ils sont compatibles. Il s’agit alors de donner une caractérisation purement algébrique des stabilisateurs de ces scindements, et plus généralement une version de cette caractérisation dans un contexte de groupoïdes mesurés. Je vais présenter une démonstration de la proposition suivante, que j’ai déjà évoquée au chapitre précédent, et qui est centrale dans notre argumentation – je renvoie à la partie 2.2 pour la notion de scindement modéré.

Proposition 5.3. *Soit $H \subseteq \text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ un sous-groupe qui contient deux sous-groupes distingués non moyennables K_1, K_2 qui se centralisent.*

Alors H fixe virtuellement un scindement modéré.

Rappelons que réciproquement, comme expliqué en partie 4.1, le stabilisateur dans $\text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ d'un scindement libre non séparant contient deux sous-groupes K_1, K_2 comme dans l'énoncé.

Pour démontrer la tension de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée, il reste alors deux tâches à accomplir : la première est de distinguer les stabilisateurs de scindements libres non séparants des stabilisateurs d'autres scindements modérés – j'en ai touché un mot après la proposition 4.5. La seconde est d'adapter cette proposition au cadre des groupoïdes mesurés. Je vais donc présenter une démonstration qui s'adapte bien à ce cadre.

Esquisse de démonstration. Soit $A \subseteq K_1$ un sous-groupe infini moyennable. Si A fixe un scindement modéré, alors le théorème 2.6 assure que son normalisateur aussi, en particulier K_2 fixe un scindement modéré, et en répétant cet argument H fixe un scindement modéré.

Supposons donc en vue d'une contradiction que A ne fixe aucun scindement modéré, et soit \mathcal{F} un système de facteurs libres A -invariant, maximal au sens où il n'y a aucun facteur libre propre de (F_N, \mathcal{F}) dont la classe de conjugaison soit A -invariante. Puisque A ne fixe aucun scindement libre, nécessairement \mathcal{F} est non sporadique.

Comme A est moyennable, nous pouvons trouver une mesure de probabilité μ sur l'espace compact $\mathbb{P}\overline{\mathcal{O}}(F_N, \mathcal{F})$ qui soit A -invariante. Si μ donne mesure strictement positive aux classes projectives d'arbres non arationnels, la proposition 1.8 permet de pousser μ en une mesure de probabilité $\bar{\mu}$ sur l'ensemble dénombrable des classes de conjugaison de facteurs libres propres de (F_N, \mathcal{F}) . L'ensemble fini des facteurs de $\bar{\mu}$ -mesure maximale est A -invariant (et donc la classe de conjugaison de chacun des facteurs de cet ensemble est A -invariant puisque nous travaillons dans $\text{IA}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$), ce qui contredit la maximalité de \mathcal{F} .

Nous pouvons donc supposer que μ donne mesure pleine au sous-espace formé des classes projectives d'arbres arationnels relatifs à \mathcal{F} . Au vu de la description du bord $\partial_\infty \text{FF}(F_N, \mathcal{F})$ (théorème 1.9), nous pouvons donc pousser μ en avant en une mesure de probabilité ν sur $\partial_\infty \text{FF}(F_N, \mathcal{F})$. Si le support de ν est de cardinal au moins 3, alors $\nu \otimes \nu \otimes \nu$ donne mesure strictement positive à l'ensemble $\partial_\infty \text{FF}(F_N, \mathcal{F})^{(3)}$ des triplets de points deux à deux distincts. Nous pouvons alors utiliser l'application barycentre donnée par le théorème 1.11 pour obtenir une mesure de probabilité A -invariante $\bar{\nu}$ sur l'ensemble $\mathbf{FF}(F_N, \mathcal{F})$ des classes de conjugaison de facteurs libres propres de (F_N, \mathcal{F}) , et obtenir une contradiction comme précédemment.

Nous pouvons donc supposer que A préserve un sous-ensemble de $\partial_\infty \text{FF}(F_N, \mathcal{F})$ à au plus 2 éléments, mais aucun à au moins 3 éléments. Un tel sous-ensemble maximal est unique, donc K_2 -invariant. Par ailleurs, nous démontrons qu'à tout arbre arationnel T dont le stabilisateur est non moyennable, nous pouvons associer canoniquement (c'est-à-dire de manière équivariante) un scindement modéré, voir [GH21b, Proposition 12.20] – l'idée étant que la seule façon pour que le stabilisateur de T soit gros, est que T se décompose en un graphe d'actions, et que les automorphismes proviennent d'automorphismes des groupes de sommets. Comme A ne fixe aucun scindement modéré, les classes d'équivalence d'arbres dans l'ensemble fini à au plus 2 éléments de $\partial_\infty \text{FF}(F_N, \mathcal{F})$ construit ci-dessus ont un stabilisateur moyennable, ce qui contredit la non moyennabilité de K_2 . \square

Dans la version groupoïdale, l'argument final nécessite d'exploiter la moyennabilité de l'action de $\text{Out}(F_N, \mathcal{F})$ sur l'ensemble des arbres à stabilisateur moyennable, fournie par le théorème 3.8.

5.3 Rigidité des groupes modulaires de corps en anses

Soit $g \geq 0$. Un *corps en anses* de genre g est une variété à bord orientable de dimension 3, unique à homéomorphisme près, obtenue à partir d'une boule B de dimension 3 en attachant g cylindres $D^2 \times [-1, 1]$, de sorte que l'homéomorphisme de recollement identifie les $2g$ disques $D^2 \times \{\pm 1\}$ à $2g$ disques deux à deux disjoints de ∂B . Notons que le bord d'un corps en anses de genre g est une surface connexe, fermée, orientable de genre g .

Comme pour les surfaces, le *groupe modulaire* $\text{Mod}(V)$ d'un corps en anses V est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de V qui en préservent l'orientation – nous noterons aussi $\text{Mod}^\pm(V)$ le groupe modulaire étendu, où nous autorisons les homéomorphismes à renverser l'orientation. Il y a un morphisme $\text{Mod}(V) \rightarrow \text{Mod}(\partial V)$ obtenu par restriction au bord, et ce morphisme est injectif, voir [Hen20, Lemma 3.1].

L'étude des groupes modulaires de corps en anses a plusieurs motivations. En topologie, ils interviennent dans la théorie des scindements de Heegaard (nous renvoyons par exemple à la partie 4 de [Hen20]). En géométrie des groupes, ils présentent des analogies à la fois avec les groupes modulaires de surfaces (du fait du plongement ci-dessus, quoique celui-ci soit très distordu [HH12]), mais aussi avec $\text{Out}(F_N)$ – il y a d'ailleurs une surjection naturelle de $\text{Mod}(V)$ vers $\text{Out}(F_g)$, donnée par l'action au niveau du groupe fondamental de V , qui est un groupe libre de rang g . Nous renvoyons par exemple à [HH21a, Hen21] pour des travaux comparant les géométries de ces groupes.

Théorème 5.4 (Hensel–Horbez [HH21b]). *Soit V un corps en anses de genre $g \geq 3$. Alors $\text{Mod}(V)$ est tendu en équivalence mesurée.*

Le fait que le commensurateur abstrait de $\text{Mod}(V)$ est exactement $\text{Mod}^\pm(V)$ avait été démontré préalablement par Hensel [Hen18]. Notre démonstration permet de retrouver ce théorème par un argument un peu différent.

Notre démonstration s'inspire de celle de Kida pour les groupes modulaires de surfaces, et en exploite en fait certains arguments via le plongement $\text{Mod}(V) \rightarrow \text{Mod}(\partial V)$. Le théorème d'Ivanov sur le graphe des courbes est remplacé par un théorème de Korkmaz–Schleimer [KS09] affirmant que $\text{Mod}^\pm(V)$ est le groupe des automorphismes du *graphe des disques*, dont les sommets sont les classes d'isotopie de *méridiens*, c'est-à-dire les courbes fermées simples essentielles sur ∂V qui bordent un disque plongé dans V , et les arêtes correspondent à l'existence de représentants disjoints.

Comme dans la démonstration de Kida, notre point de départ consiste à observer que le stabilisateur dans $\text{Mod}(V)$ de la classe d'isotopie d'un méridien c est non moyennable, contient un sous-groupe moyennable distingué infini (puisque le twist de Dehn le long de c est contenu dans l'image de $\text{Mod}(V)$ dans $\text{Mod}(\partial V)$), et est maximal pour ces deux propriétés. La difficulté vient du fait que cette propriété ne suffit plus à caractériser les stabilisateurs de méridiens. Par exemple, il est possible de trouver deux courbes fermées simples essentielles α, β sur ∂V qui ne sont pas des méridiens, mais qui bordent un anneau dans V . Le stabilisateur de la paire $\{\alpha, \beta\}$ (à isotopie près) vérifie alors aussi la propriété ci-dessus, car il centralise le produit $T_\alpha T_\beta^{-1}$ des twists de Dehn associés. Notre démonstration consiste à trouver des propriétés supplémentaires qui nous permettent d'exclure les situations défavorables jusqu'à obtenir une caractérisation des stabilisateurs de méridiens (et sa version pour des groupoïdes mesurés). Je renvoie à l'introduction de [HH21b] pour une explication plus détaillée.

5.4 Rigidité parmi les groupes d'Artin–Tits

Dans un travail avec Jingyin Huang [HH20], nous étudions les groupes d'Artin–Tits (introduits au chapitre 3.3) du point de vue de l'équivalence mesurée, et obtenons des théorèmes de rigidité pour certaines familles.

Théorème 5.5 (Horbez–Huang [HH20, Theorem 3]). *Soit Γ un graphe fini simple connexe de maille au moins 4, ayant au moins 3 sommets, sans sommet ni arête séparante, et dont les arêtes sont étiquetées par des entiers supérieurs à 3. Soit A_Γ le groupe d’Artin–Tits associé.*

Tout groupe dénombrable H mesurablement équivalent à A_Γ , est commensurable, à un noyau fini près, à un réseau dans $\text{Aut}(\mathfrak{C}_\Gamma)$, où \mathfrak{C}_Γ est le complexe de Cayley de A_Γ pour sa présentation standard.

Le complexe de Cayley \mathfrak{C}_Γ est obtenu à partir du graphe de Cayley, pour sa partie génératrice standard, en recollant des 2-cellules données par les relations venant de la présentation standard de A_Γ .

Supposons de plus que pour tout $v \in V\Gamma$, tout automorphisme du graphe étiqueté Γ qui est l’identité sur le 1-voisinage de v , est l’identité sur Γ . Alors un travail de Crisp [Cri05] (portant dans ce cadre sur la rigidité de commensurateur de A_Γ) permet d’assurer que $\text{Aut}(\mathfrak{C}_\Gamma)$ est discret et contient A_Γ comme sous-groupe d’indice fini. Dans ce cas A_Γ est donc superrigide (en fait tendu) en équivalence mesurée – mentionnons que par un théorème de Huang–Osajda [HO17], ces groupes sont aussi superrigides en quasi-isométrie. Ceci est vérifié par exemple dans l’exemple suivant.

Corollaire 5.6. *Soit $n \geq 4$, et soit Γ un n -gone dont toutes les arêtes sont étiquetées par un entier supérieur à 3. Alors A_Γ est tendu en équivalence mesurée.*

Notre démonstration du théorème 5.5 suit une fois de plus la stratégie de Kida. Nous commençons par nous placer dans le cadre plus général où A_Γ est un groupe d’Artin–Tits de type hyperbolique et de dimension cohomologique au plus 2 (voir la partie 3.3). En place du graphe des courbes, nous travaillons avec le *graphe des sous-groupes monogènes standard* Θ_Γ , introduit par Crisp [Cri05, partie 4]. Ses sommets sont exactement les sous-groupes monogènes maximaux dont le centralisateur est non virtuellement abélien, deux sommets étant reliés par une arête si les sous-groupes associés commutent. Plus concrètement, les sous-groupes monogènes qui apparaissent comme sommets sont ceux engendrés par les générateurs standard, ainsi que les centres des sous-groupes de la forme A_e , où $e \subseteq \Gamma$ est une arête, voir [Cri05, Lemma 11].

Dans ce cadre, nous montrons que pour tout auto-couplage d’équivalence mesurée Ω de A_Γ , il existe une application mesurable $(A_\Gamma \times A_\Gamma)$ -équivariante $\Omega \rightarrow \text{Aut}(\Theta_\Gamma)$, où l’action sur $\text{Aut}(\Theta_\Gamma)$ est par pré/post-composition. Cette partie de notre argument suit la stratégie de Kida, en exploitant la géométrie CAT(−1) du complexe de Deligne \mathbb{D}_Γ (voir la partie 3.3), qui permet notamment d’obtenir la moyennabilité de l’action de A_Γ sur $\partial_\infty \mathbb{D}_\Gamma$ (théorème 3.10) et de définir une application barycentre. En fait il y a beaucoup d’analogies entre les groupes modulaires de surfaces et cette famille de groupes d’Artin–Tits, que nous avons choisi de mettre en valeur en présentant ces deux cadres en parallèle dans la partie 6 de [HH20].

Pour les groupes apparaissant dans le corollaire 5.6, il découle des travaux de Crisp que A_Γ est d’indice fini dans $\text{Aut}(\Theta_\Gamma)$, ce qui donne la tension en équivalence mesurée. En général, notre théorème exploite une comparaison géométrique assez fine des groupes d’automorphismes de Θ_Γ , du complexe de Deligne, et de \mathfrak{C}_Γ , pour laquelle nous renvoyons à la partie 8 de [HH20].

5.5 Rigidité parmi les groupes de Higman

Les groupes de Higman ont été introduits dans [Hig51] comme les premiers exemples de groupes infinis de présentation finie sans quotient fini non trivial. Ils ont depuis été beaucoup étudiés pour différentes raisons : ils ont joué un rôle dans la théorie de la rigidité profinie [PT86], et la question de leur soficité a engendré de nombreux développements

[Tho12, HJ19]. Leur géométrie a été particulièrement étudiée par Martin [Mar17, Mar21]. Ils sont définis, pour tout $k \geq 4$, par la présentation suivante :

$$\text{Hig}_k = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_i a_{i+1} a_i^{-1} = a_i^2, \forall i \text{ mod } k \rangle.$$

Plus généralement, soit $k \geq 4$, soit $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k$ des entiers non nuls, et soit $\sigma = ((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$. Nous définissons le *groupe de Higman généralisé*

$$\text{Hig}_\sigma = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_i a_{i+1}^{m_i} a_i^{-1} = a_{i+1}^{n_i}, \forall i \text{ mod } k \rangle.$$

Soit F_σ le sous-groupe de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ formé des éléments τ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, nous ayons $(m_{\tau(i)}, n_{\tau(i)}) = (m_i, n_i)$ ou $(m_{\tau(i)}, n_{\tau(i)}) = (-m_i, -n_i)$. Alors F_σ agit par automorphismes sur Hig_σ , et nous formons l'extension $\widehat{\text{Hig}}_\sigma = \text{Hig}_\sigma \rtimes F_\sigma$.

Le complexe développé et le graphe d'intersection. Fixons une partie génératrice $\{a_1, \dots, a_k\}$ de Hig_σ donnée par sa présentation. Un *sous-groupe de Baumslag–Solitar standard* de Hig_σ est un sous-groupe de la forme $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ avec $i \in \{1, \dots, k\}$ (considéré modulo k).

Une *classe à gauche standard* est une classe à gauche de la forme gH avec $g \in \text{Hig}_\sigma$, et $H \subseteq \text{Hig}_\sigma$ un sous-groupe qui est soit $\{1\}$, soit le sous-groupe monogène $\langle a_i \rangle$ pour un certain $i \in \{1, \dots, k\}$, soit un sous-groupe de Baumslag–Solitar standard.

Le *complexe développé* X_σ , qui a été considéré par Bridson–Haefliger dans [BH92, Exemple II.12.17], est la réalisation géométrique de l'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) des classes à gauche standard de Hig_σ . La multiplication à gauche sur l'ensemble des classes à gauche standard induit une action de Hig_σ par automorphismes sur X_σ . Cette action s'étend à $\widehat{\text{Hig}}_\sigma$.

Le *graphe d'intersection* Θ_σ , introduit par Martin [Mar17, Définition 2.6], est le graphe simplicial dont les sommets sont les conjugués des sous-groupes de Baumslag–Solitar standard, où deux sommets sont reliés par une arête si les sous-groupes associés ont une intersection non triviale (ou de manière équivalente infinie, le groupe Hig_σ étant sans torsion). L'action par conjugaison de Hig_σ induit une action par automorphismes de graphe sur Θ_σ , qui elle aussi s'étend à $\widehat{\text{Hig}}_\sigma$.

Le théorème de rigidité combinatoire que nous démontrons dans ce contexte, qui joue le rôle analogue au théorème d'Ivanov sur le complexe des courbes, est le suivant.

Théorème 5.7 (Horbez–Huang [HH22b, Theorem 1.7]). *Soit $\sigma = ((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ un k -uplet de couples d'entiers non nuls, avec $k \geq 4$, et avec $|m_i| < |n_i|$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Alors les morphismes naturels $\widehat{\text{Hig}}_\sigma \rightarrow \text{Aut}(X_\sigma)$ et $\widehat{\text{Hig}}_\sigma \rightarrow \text{Aut}(\Theta_\sigma)$ sont des isomorphismes.

Voici un mot très bref concernant la démonstration. Il n'est pas très difficile de montrer, par comparaison des géométries locales autour de sommets de rangs distincts, que tout automorphisme de X_σ préserve les rangs des sommets (c'est-à-dire le rang du sous-groupe de Hig_σ associé). Soit $\varphi \in \text{Aut}(X_\sigma)$, et soit v un sommet de rang 2, correspondant donc à la classe à gauche d'un sous-groupe de Baumslag–Solitar standard. Quitte à composer φ par l'action d'un élément de $\widehat{\text{Hig}}_\sigma$, nous pouvons supposer que $\varphi(v) = v$. Remarquons que l'ensemble des sommets de rang 0 adjacents à v s'identifie à un groupe de Baumslag–Solitar

$$B = \langle a, t \mid ta^m t^{-1} = a^n \rangle.$$

Comme φ permute les sommets de rang 1 adjacents à v , il induit une bijection de B qui préserve l'ensemble des classes à gauche des sous-groupes cycliques $\langle a \rangle$ et $\langle t \rangle$. Informellement, si l'on pense au graphe de Cayley standard de B , où les droites horizontales

sont étiquetées par le générateur a , et les droites verticales par le générateur t , nous obtenons une bijection de ses sommets qui préserve l'ensemble des droites horizontales et verticales. Nous montrons qu'une telle bijection doit préserver l'ensemble des droites verticales, en préservant l'ordre le long de ces droites. Comme chacun des générateurs de Hig_σ apparaît comme le générateur "vertical" d'un sous-groupe de Baumslag–Solitar, φ doit en fait préserver l'alignement le long de toutes les droites de B , et ceci suffit à rigidifier complètement la situation. Le passage de $\text{Aut}(X_\sigma)$ à $\text{Aut}(\Theta_\sigma)$ repose sur un argument de *diagrammes de disques* (voir par exemple [MW02]), qui permet de démontrer que tout k -cycle induit dans Θ_σ se relève dans X_σ .

Rigidité en équivalence mesurée. Nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 5.8 (Horbez–Huang [HH22b]). *Soit $k \geq 5$, et soit $\sigma = ((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ un k -uplet de couples d'entiers non nuls, avec $|m_i| \neq |n_i|$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Alors Hig_σ est tendu en équivalence mesurée.

Le même énoncé est ouvert lorsque $k = 4$.

Suivant la stratégie de Kida, en travaillant avec Θ_σ en place du graphe des courbes, le but est de donner une caractérisation (algébrique ou groupoïdale) des conjugués des sous-groupes de Baumslag–Solitar standard. Je vais me concentrer ici sur le cas, à mes yeux le plus intéressant, où les groupes de Baumslag–Solitar qui entrent en jeu sont résolubles.

L'affirmation-clé (qui admet une version en termes de sous-groupoïdes mesurés) est la suivante : un sous-groupe $H \subseteq \text{Hig}_k$ est conjugué à un sous-groupe de Baumslag–Solitar standard si et seulement s'il existe des sous-groupes moyennables maximaux deux à deux distincts H_1, H_2, H_3, H_4 de Hig_k , avec $H = H_1$ et $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \neq \{1\}$. Il n'est pas difficile de démontrer que les sous-groupes de Baumslag–Solitar standard satisfont cette propriété, le point crucial est de montrer la réciproque. Notre démonstration repose sur le fait que X_σ peut être muni d'une métrique CAT(−1) invariante par Hig_σ , de sorte que l'action de Hig_σ soit acylindrique [Mar21]. Étant moyennable, le sous-groupe H_1 doit agir de manière élémentaire sur X_σ , c'est-à-dire fixer un point de $X_\sigma \cup \partial_\infty X_\sigma$. Si H_1 fixe un point de X_σ , alors H_1 est conjugué à un sous-groupe d'un groupe de Baumslag–Solitar standard, et la maximalité de H_1 permet de conclure. Si H_1 fixe un point du bord visuel $\partial_\infty X_\sigma$, alors $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ fixe alors à la fois un point du bord visuel et un point de X_σ (soit un point fixe d'un autre H_i , soit un point obtenu comme barycentre des points fixes à l'infini des H_i). Ceci contredit l'acylindricité de l'action.

La version avec des groupoïdes mesurés est très similaire en esprit, en utilisant la moyennabilité de l'action de Hig_σ sur $\partial_\infty X_\sigma$, qui découle du théorème 3.10.

5.6 Questions et perspectives

Rigidité en quasi-isométrie. La question de la rigidité en quasi-isométrie de $\text{Out}(F_N)$ (avec $N \geq 3$), des groupes modulaires de corps en anses, et des groupes de Higman, est ouverte : est-il vrai qu'un groupe de type fini qui est quasi isométrique à l'un de ces groupes, doit lui être commensurable à un noyau fini près ? Les démonstrations par Behrstock–Kleiner–Minsky–Mosher et Hamenstädt [BKMM12, Ham07] de la rigidité quasi isométrique des groupes modulaires de surfaces (aux exceptions de petite complexité près) repose sur la structure hiérarchique du groupe modulaire établie par Masur–Minsky [MM00], qui n'est pas vérifiée pour $\text{Out}(F_N)$ et pour les groupes modulaires de corps en anses. Dans le cas des groupes de Higman, nos travaux permettent de ramener la question à celle de savoir si toute quasi-isométrie de Hig_k envoie toute classe à gauche d'un sous-groupe de Baumslag–Solitar standard à distance de Hausdorff bornée d'une autre telle classe à gauche.

Réseaux dans les complexes de Cayley de groupes d’Artin–Tits. Le théorème 5.5 soulève la question de classifier les réseaux dans $\text{Aut}(\mathcal{C}_\Gamma)$. En particulier, nous ne savons pas s’il existe des exemples pour lesquels $\text{Aut}(\mathcal{C}_\Gamma)$ est non discret, mais tous ses réseaux sont commensurables à G_Γ . Ceci pourrait potentiellement mener à de nouveaux phénomènes de rigidité de nature un peu différente. Notons que Huang a obtenu un théorème de ce type dans le cas de certains groupes d’Artin–Tits à angles droits [Hua18], en utilisant la théorie des complexes cubiques spéciaux de Haglund–Wise [HW08].

Rigidité parmi les groupes d’Artin–Tits. Nous pourrions aussi chercher à étendre les théorèmes de rigidité obtenus à d’autres classes de groupes d’Artin–Tits. Le théorème 5.5 requiert un certain nombre d’hypothèses sur Γ , et nous ne savons pas si toutes sont nécessaires. Peut-on se passer de l’hypothèse que la maille est au moins 4, et autoriser les triangles ? Plus généralement, peut-on comprendre quels sont exactement les groupes d’Artin–Tits de type hyperbolique et de dimension 2 qui sont rigides en équivalence mesurée ? Une obstruction vient du cas où l’un des sommets est entouré seulement d’arêtes dont l’étiquette est 2 – le cas des groupes d’Artin–Tits à angles droits, où toutes les arêtes de Γ ont une étiquette égale à 2, est différent et sera étudié au prochain chapitre. Même dans ce cas, nous pourrions espérer des phénomènes de rigidité en équivalence mesurée intégrable – voir la partie 6.3 au chapitre suivant. Dans tous les cas, il faudra d’abord établir des énoncés de rigidité combinatoire, étendant ceux de Crisp, et la question de comprendre les réseaux dans $\text{Aut}(\mathcal{C}_\Gamma)$ pourra alors apparaître de manière plus générale.

6 Théorie mesurée des groupes d’Artin–Tits à angles droits

Dans ce chapitre, nous étudions plus spécifiquement les groupes d’Artin–Tits à angles droits du point de vue de l’équivalence mesurée. Il y a plusieurs motivations à cette étude, au-delà du fait que leur définition élémentaire en fait une classe de groupes naturelle à étudier.

Comme nous l’avons rappelé au chapitre 5, Furman a établi dans [Fur99a] un théorème de superrigidité en équivalence mesurée pour les réseaux de groupes de Lie simples connexes à centre fini de rang réel au moins 2. La même question reste ouverte en rang 1, mais un théorème de Bader–Furman–Sauer [BFS13, Theorem A] établit la rigidité de $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$, pour tout $n \geq 3$, sous une hypothèse supplémentaire d’intégrabilité du cocycle d’équivalence mesurée que nous présenterons en partie 6.3 – voir aussi [BFS13, Corollary 1.13] pour les cadres quaternionique et octonionique, qui reposent sur un travail de Fisher–Hitchman [FH06]. Si les réseaux de groupes de Lie simples sont donc relativement bien compris à cet égard, l’attention a porté de plus en plus au cours des dernières décennies sur d’autres réseaux, dans des groupes totalement discontinus – voir par exemple les travaux de Caprace–Monod [CM09] sur les réseaux agissant sur des espaces $\text{CAT}(0)$. En fait, un théorème général de classification des réseautages possibles d’un groupe donné dû à Bader–Furman–Sauer [BFS20, Theorem A] fait ressortir l’importance de ces autres types de réseaux. Les groupes d’Artin–Tits à angles droits forment l’un des exemples les plus emblématiques de réseaux dans des groupes d’automorphismes de complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, et leur étude nous semble donc particulièrement pertinente.

Mais contrairement à la plupart des groupes étudiés dans le chapitre précédent, les groupes d’Artin–Tits à angles droits ne jamais rigides au sens le plus fort en équivalence mesurée – ils sont mesurablement équivalents à tout produit graphé de groupes infinis dénombrables moyennables sur le même graphe sous-jacent. Un thème récurrent dans ce chapitre sera d’étudier la frontière subtile entre rigidité et flexibilité pour ces groupes, et nous présenterons quelques théorèmes de rigidité en imposant des conditions supplémentaires de natures diverses (ergodiques, géométriques) sur les couplages considérés. Nous étudierons aussi la classification des groupes d’Artin–Tits à angles droits pour l’équivalence mesurée.

Les groupes d’Artin–Tits à angles droits se sont avérés importants à bien des égards en géométrie des groupes. Mentionnons par exemple les travaux de Bestvina–Brady [BB97] donnant les premiers exemples de groupes avec certaines propriétés de finitude (groupes de type $\text{FP}(\mathbb{Z})$ mais pas de présentation finie), construits comme noyaux de morphismes d’un groupe d’Artin–Tits à angles droits vers \mathbb{Z} . Leurs relations avec les immeubles, dont nous reparlerons dans ce chapitre [Dav98], les travaux profonds de Haglund–Wise [HW08] sur la combinatoire de ces groupes et des complexes cubiques associés (qui se sont révélés cruciaux dans la démonstration par Agol [Ago13] de la conjecture virtuellement Haken), l’étude fine de la dynamique d’actions de groupes sur des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, par exemple dans les travaux de Caprace–Sageev [CS11], s’avèrent être des outils importants dans l’étude que nous proposons dans ce chapitre.

6.1 Les groupes d’Artin–Tits à angles droits et leur géométrie

Groupes d’Artin–Tits à angles droits. Un groupe d’Artin–Tits à angles droits est un groupe d’Artin–Tits pour lequel toutes les étiquettes des arêtes du graphe sous-jacent sont égales à 2. Plus concrètement, soit Γ un graphe simplicial fini. Le *groupe d’Artin–Tits à angles droits* G_Γ est le groupe défini par la présentation $G_\Gamma = \langle S \mid R \rangle$, où S est l’ensemble des sommets de Γ , et $R = \{[v, w] \mid vw \in E(\Gamma)\}$. Par un théorème de Droms

[Dro87], si Γ et Λ sont deux graphes finis simpliciaux, alors G_Γ et G_Λ sont isomorphes si et seulement si les graphes Γ et Λ le sont.

Les groupes d'Artin–Tits à angles droits font partie de la famille plus générale des *produits graphés*. Étant donné un graphe simplicial fini Γ , et la donnée, pour tout sommet $v \in V\Gamma$, d'un groupe de sommet G_v , le *produit graphé* $\mathbb{G}(\Gamma, (G_v)_{v \in V\Gamma})$ est le groupe obtenu à partir du produit libre des groupes G_v en imposant comme uniques relations supplémentaires que les groupes G_v et G_w commutent dès lors que $vw \in E\Gamma$. Ainsi un groupe d'Artin–Tits à angles droits est un produit graphé dont tous les groupes de sommets sont isomorphes à \mathbb{Z} .

Soit $\Lambda \subseteq \Gamma$ un sous-graphe induit, i.e. tel que deux sommets de Λ sont reliés par une arête si et seulement s'ils le sont dans Γ . Le morphisme naturel $G_\Lambda \rightarrow G_\Gamma$ induit par l'inclusion $\Lambda \subseteq \Gamma$ est un plongement, dont l'image est appelée un *sous-groupe parabolique standard* de G_Γ . Plus généralement, un *sous-groupe parabolique* de G_Γ est un sous-groupe conjugué à un sous-groupe parabolique standard. Un *sous-groupe abélien standard* de G_Γ est un sous-groupe parabolique de la forme G_Λ , où Λ est un sous-graphe complet de Γ . Mentionnons en particulier que le sous-groupe trivial est considéré comme un sous-groupe abélien standard, associé au sous-graphe $\Lambda = \emptyset$.

Rappelons que pour tout $v \in V\Gamma$, le *link* $\text{lk}(v)$ est défini comme le sous-graphe induit dont les sommets sont ceux à distance 1 de v , et l'*étoile* $\text{st}(v)$ est le sous-graphe induit dont les sommets sont v et ceux de $\text{lk}(v)$. Un théorème de Laurence [Lau95], confirmant une conjecture de Servatius que celui-ci avait démontrée dans un certain nombre de cas [Ser89], affirme que le groupe des automorphismes de G_Γ est engendré par :

1. les automorphismes du graphe Γ , vus naturellement comme automorphismes de G_Γ ;
2. les *inversions* ι_v avec $v \in V\Gamma$: ici ι_v est l'automorphisme qui envoie v sur v^{-1} , et fixe u pour tout $u \in V\Gamma \setminus \{v\}$;
3. les *transvections* τ_{vw} , avec $v, w \in V\Gamma$ tels que $\text{lk}(v) \subseteq \text{st}(w)$; ici τ_{vw} est l'automorphisme qui envoie v sur vw , et fixe u pour tout $u \in V\Gamma \setminus \{v\}$;
4. les *conjugaisons partielles* $\alpha_{v,C}$, où $v \in V\Gamma$ et C est une composante connexe de $\Gamma \setminus \text{st}(v)$; ici $\alpha_{v,C}$ est l'automorphisme qui conjugue chaque sommet $w \in VC$ par v , et fixe chaque sommet $u \in V\Gamma \setminus VC$.

L'étude géométrique des groupes d'Artin–Tits à angles droits repose sur leurs actions sur plusieurs espaces (complexes cubiques $\text{CAT}(0)$, immeubles, graphes hyperboliques), que nous allons maintenant présenter.

Le complexe de Salvetti et son revêtement universel. Nous noterons X_Γ le complexe cubique obtenu à partir du graphe de Cayley $\text{Cay}(G_\Gamma)$, pour sa partie génératrice standard, en recollant un cube C_τ de dimension k sur chaque sous-graphe τ de $\text{Cay}(G_\Gamma)$ isomorphe au 1-squelette d'un k -cube, avec les recollements de faces évidents (si $\tau \subseteq \tau'$, alors C_τ est identifié à une face de $C_{\tau'}$). Le complexe obtenu est un complexe cubique $\text{CAT}(0)$, et c'est aussi le revêtement universel du complexe de Salvetti de G_Γ , voir [Sal87, CD95]. Remarquons que le complexe cubique X_Γ est localement fini, et sa dimension est égale au nombre maximal de sommets d'un sous-graphe complet de Γ . Par ailleurs G_Γ agit proprement discontinûment et cocompactement sur X_Γ . Dès lors, le groupe $\text{Aut}(X_\Gamma)$ des automorphismes cubiques de X_Γ , muni de la topologie de la convergence ponctuelle, est un groupe localement compact, dans lequel G_Γ se plonge comme réseau cocompact.

L'immeuble à angles droits de Davis. Soit (P, \leq) l'ensemble des classes à gauche de sous-groupes abéliens standard de G_Γ , partiellement ordonné par l'inclusion. Un *intervalle* dans P est un sous-ensemble de P de la forme $I_{F_1, F_2} = \{F \in P \mid F_1 \subseteq F \subseteq F_2\}$,

avec $F_1, F_2 \in P$. Les intervalles de P sont des treillis booléens de rang fini. Il existe donc, à isomorphisme près, un unique complexe cubique dont l'ensemble des cubes, partiellement ordonné par la relation de face, est isomorphe à (P, \leq) , voir par exemple [AB08, Proposition A.38]. Ce complexe cubique est appelé l'*immeuble à angles droits* de G_Γ , et sera noté \mathbb{B}_Γ . Plus concrètement, les sommets de \mathbb{B}_Γ correspondent aux classes à gauche de sous-groupes abéliens standard, les arêtes aux inclusions de codimension 1 (c'est-à-dire l'inclusion d'une classe à gauche d'un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^n dans une classe à gauche d'un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^{n+1}). Puis un cube C_k de dimension k est recollé sur chaque sous-graphe isomorphe au 1-squelette de C_k , avec les inclusions de faces évidentes. Davis a montré dans [Dav98] que ce complexe cubique est toujours CAT(0).

Chaque sommet v de \mathbb{B}_Γ correspond à la classe à gauche d'un sous-groupe abélien standard A_v de G_Γ . Le *rang* de v est défini comme le rang du groupe abélien A_v .

Le graphe d'extension de Kim–Koberda. Soit Γ un graphe simplicial fini. Le *graphe d'extension* de Γ , noté Γ^e , a été défini comme suit par Kim–Koberda [KK13], qui en ont finement étudié la géométrie dans [KK14] – en particulier il est quasi isométrique à un arbre simplicial, et est souvent perçu comme un analogue du graphe des courbes dans ce contexte. C'est le graphe simplicial dont les sommets sont les conjugués des sous-groupes cycliques de G_Γ associés aux sommets de Γ ; deux sommets distincts sont reliés par une arête si les sous-groupes associés commutent.

L'action par conjugaison de G_Γ sur lui-même induit une action de G_Γ sur Γ^e par automorphismes de graphe. Chaque sommet de Γ^e correspond à un sous-groupe monogène de la forme gG_vg^{-1} , avec $g \in G_\Gamma$ et $v \in V\Gamma$. Son stabilisateur est exactement le normalisateur de gG_vg^{-1} , égal à $gG_{\text{st}(v)}g^{-1}$, voir [CCV07, Proposition 2.2].

En général, le graphe d'extension Γ^e ne permet pas de retrouver Γ ; mais dans le cas où les groupes d'Artin–Tits à angles droits associés ont peu d'automorphismes extérieurs, Huang a démontré le résultat suivant.

Théorème 6.1 (Huang [Hua17, Corollary 4.16 et Lemma 4.17]). *Soit Γ_1 et Γ_2 deux graphes simpliciaux finis simples, tels que pour tout $i \in \{1, 2\}$, le groupe $\text{Out}(G_{\Gamma_i})$ soit fini.*

Alors Γ_1^e et Γ_2^e sont isomorphes si et seulement si Γ_1 et Γ_2 le sont.

Automorphismes du graphe d'extension et de l'immeuble à angles droits. Dans le cas où $|\text{Out}(G_\Gamma)| < +\infty$, il y a un isomorphisme de groupes polonais naturel entre les groupes d'automorphismes $\text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ et $\text{Aut}(\Gamma^e)$, munis de la topologie de la convergence ponctuelle. Nous le décrivons ci-dessous.

Appelons *plat standard* la classe à gauche dans G_Γ d'un sous-groupe abélien standard (ceci correspond naturellement à un plat dans le complexe X_Γ). Nous dirons que c'est une *droite standard* si le sous-groupe abélien en question est isomorphe à \mathbb{Z} . Deux droites standard $\ell_1 = g_1G_{v_1}$ et $\ell_2 = g_2G_{v_2}$ (avec $g_1, g_2 \in G_\Gamma$ et $v_1, v_2 \in V\Gamma$) sont *parallèles* si $v_1 = v_2$ et $g_2^{-1}g_1$ appartient au normalisateur de G_{v_1} – cette notion est bien définie, i.e. ne dépend pas du choix des représentants, au vu de la description des normalisateurs [CCV07, Proposition 2.2].

Une bijection $f : G_\Gamma \rightarrow G_\Gamma$ *préserve les plats* si f et f^{-1} envoient toutes deux chaque plat standard sur un plat standard. Tout automorphisme α de \mathbb{B}_Γ préserve le rang des sommets, voir par exemple [HHa, Lemma 2.4]. La restriction de α aux sommets de rang 0 détermine une bijection $\alpha_* : G_\Gamma \rightarrow G_\Gamma$. Deux sommets v, w de rang 0 correspondent à des éléments de G_Γ dans un même plat F si et seulement si v et w sont chacun dans un cube qui contient le sommet de rang $\dim(F)$ associé à F . En conséquence la bijection α_* préserve les plats.

Nous définissons maintenant une application $\Phi : \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma^e)$. Soit $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$. La restriction de α à l'ensemble des sommets de rang 0 de \mathbb{B}_Γ détermine une

bijection de G_Γ qui préserve les plats. On vérifie facilement que cette bijection préserve le parallélisme entre droites standard. En particulier α induit une permutation de l'ensemble des classes de parallélisme de droites standard. Mais ces classes de parallélisme sont naturellement en bijection avec les sommets de Γ^e , via l'application qui à une classe de parallélisme associe le stabilisateur commun de toutes les droites de cette classe (qui est un sous-groupe parabolique isomorphe à \mathbb{Z}). Ainsi α induit une permutation de $V\Gamma^e$, et on vérifie aisément que celle-ci détermine un automorphisme de graphe : c'est $\Phi(\alpha)$. On vérifie également que l'application $\Phi : \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma^e)$ ainsi définie est un morphisme de groupes topologiques. La proposition suivante repose de manière essentielle sur des techniques dues à Huang [Hua17] ; sa démonstration apparaît dans [HHa, partie 1].

Proposition 6.2. *Soit Γ un graphe simplicial fini, tel que $|\text{Out}(G_\Gamma)| < +\infty$. Alors l'application $\Phi : \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma^e)$ est un isomorphisme de groupes topologiques.*

6.2 Groupes mesurablement équivalents à G_Γ

Le problème de déterminer tous les groupes dénombrables mesurablement équivalents à un groupe d'Artin–Tits à angles droits G_Γ donné semble particulièrement difficile – le cas où G_Γ est un groupe libre est déjà très mystérieux, voir [Gab05b, BTW07] pour des exemples, ainsi que la partie 6.2.1 ci-dessous. Même dans le cas où $|\text{Out}(G_\Gamma)| < +\infty$, ce qui semble rigidifier la situation, ce problème est encore largement ouvert, mais nous pouvons malgré tout obtenir des informations de nature géométrique sur les groupes dénombrables mesurablement équivalents à G_Γ , voir la partie 6.2.3. Par ailleurs, nous comprenons la classification, à équivalence mesurée près, des groupes d'Artin–Tits à angles droits à groupe d'automorphismes extérieurs fini (partie 6.2.2).

6.2.1 Quelques exemples

Produits graphés de groupes moyennables. En étendant aux produits graphés un argument dû à Gaboriau dans le cas d'un produit libre [Gab05b, P_{ME}6], nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 6.3 (Horbez–Huang [HH22a, Proposition 4]). *Soit Γ un graphe simplicial fini. Soit $(G_v)_{v \in V\Gamma}$ et $(H_v)_{v \in V\Gamma}$ deux familles de groupes de sommets dénombrables. Soit G (respectivement H) le produit graphé des groupes G_v (respectivement des groupes H_v) sur Γ .*

Si pour tout $v \in V\Gamma$, les groupes G_v et H_v sont orbitalement équivalents, alors G et H sont orbitalement équivalents.

Rappelons que par un théorème d'Ornstein–Weiss, tous les groupes moyennables infinis dénombrables sont mesurablement équivalents, en fait orbitalement équivalents [OW80]. En particulier, un groupe d'Artin–Tits à angles droits G_Γ est toujours orbitalement équivalent à tout produit graphé de groupes moyennables infinis dénombrables sur le graphe Γ . En conséquence, pour tout groupe d'Artin–Tits à angles droits G_Γ , il existe une infinité de groupes d'Artin–Tits à angles droits deux à deux non isomorphes, tous mesurablement équivalents à G_Γ : il suffit de considérer des produits graphés de groupes abéliens libres sur Γ .

Mentionnons que la proposition ci-dessus devient fautive si l'on remplace *orbitalement équivalents* par *mesurablement équivalents*, déjà dans le cas des produits libres (voir [Gab05b, partie 2.2]). Par exemple, les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont mesurablement équivalents. Mais $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne le sont pas, puisque le premier est moyennable alors que le second ne l'est pas.

Réseaux du complexe de Cayley. Une autre source de défaut de rigidité de G_Γ est la suivante.

Proposition 6.4 (Horbez–Huang [HH22a, Theorem 6]). *Soit Γ un graphe simplicial fini qui n'est pas un graphe complet. Alors le groupe localement compact $\text{Aut}(X_\Gamma)$ contient un réseau non uniforme qui n'est pas de type fini. Tout tel réseau contient des sous-groupes finis de cardinal arbitrairement grands.*

En particulier, un tel réseau est mesurablement équivalent à G_Γ , mais ne lui est pas virtuellement isomorphe. Notre construction repose sur une idée de Huang [Hua18, partie 9]. Comme Γ n'est pas un graphe complet, il contient deux sommets $v, w \in V\Gamma$ non adjacents, qui déterminent un sous-complexe T de X_Γ isomorphe à un arbre. L'idée consiste alors à partir d'un réseau non uniforme H dans $\text{Aut}(T)$ (de tels réseaux ont été largement étudiés, voir notamment [BL01]), puis à étendre l'action de H sur T en une action d'un groupe \tilde{H} sur X_Γ . Nous renvoyons à la partie 4.2 de [HH22a] pour plus de détails.

Mentionnons que la question de construire des réseaux non uniformes de type fini dans $\text{Aut}(X_\Gamma)$ est ouverte en général, et un problème important. Des exemples dans le cas où X_Γ est un produit de deux arbres (correspondant au cas où Γ est un carré) ont été construits par Rémy à l'aide de groupes de Kac–Moody [Rém99], voir aussi [CR16] pour des exemples qui sont des groupes simples. Par ailleurs, dès que Γ contient un sous-graphe induit qui est un carré, $\text{Aut}(X_\Gamma)$ contient des réseaux cocompacts non commensurables à G_Γ par un théorème de Huang [Hua18, Theorem 1.8]. Par contre, Huang démontre également que pour une famille infinie de graphes Γ , contenant le n -gone pour tout $n \geq 5$, tout réseau cocompact de $\text{Aut}(X_\Gamma)$ est commensurable à G_Γ [Hua18, Théorème 1.2].

6.2.2 Théorème de classification

Théorème 6.5 (Horbez–Huang [HH22a]). *Deux groupes d'Artin–Tits à angles droits G, H à groupes d'automorphismes extérieurs finis sont mesurablement équivalents si et seulement s'ils sont isomorphes.*

Notons qu'au vu de la proposition 6.3 et du paragraphe qui la suit, il est important de supposer que G et H ont tous deux un groupe d'automorphismes extérieurs fini – voir aussi la partie 6.5.1 à ce sujet. Mentionnons que ce théorème est l'exact analogue de son pendant en quasi-isométrie, établi par Huang [Hua17]. Cependant, en général, les classifications des groupes d'Artin–Tits à angles droits en quasi-isométrie et en équivalence mesurée ne coïncident pas. Par le théorème d'Ornstein–Weiss, les groupes abéliens \mathbb{Z}^n sont tous mesurablement équivalents, mais ils ne sont pas quasi isométriques. Réciproquement, les groupes $F_n * (F_3 \times F_3)$ avec $n \geq 2$ sont tous quasi isométriques par un théorème de Whyte [Why99], mais ne sont pas mesurablement équivalents, par comparaison de leurs nombres de Betti ℓ^2 , voir [Gab02, Corollaire 0.3].

Idée et ingrédients de la démonstration. Notre démonstration du théorème 6.5 repose une fois de plus sur la stratégie de Kida présentée au chapitre 5. Les graphes d'extension de G et H jouent le rôle du graphe des courbes, et les ingrédients géométriques reposent sur la géométrie cubique des groupes considérés.

Nous allons supposer que les graphes de définition Γ_G et Γ_H sont de maille au moins 5, ce qui simplifie légèrement les arguments. Dans ce cas, les stabilisateurs de sommets du graphe d'extension Γ_G^e (pour l'action de G par conjugaison) sont tous isomorphes à $\mathbb{Z} \times F_n$, où F_n est un groupe libre non abélien – rappelons qu'ils sont conjugués à un sous-groupe de la forme $G_{\text{st}(v)}$ avec $v \in V\Gamma$. En fait, ce sont exactement les sous-groupes non moyennables maximaux de G qui normalisent un sous-groupe moyennable

infini – ceci peut être démontré par exemple en exploitant la dynamique de G_Γ sur le complexe cubique X_Γ . De même, soit \mathcal{R} une relation d'équivalence p.m.p. provenant d'une action libre et ergodique de G sur un espace de probabilité standard (ou plus généralement la restriction d'une telle relation d'équivalence à un sous-ensemble borélien de mesure positive). Nous démontrons que les sous-relations mesurables de \mathcal{R} partout non moyennables maximales et qui normalisent une sous-relation moyennable infinie, sont exactement (à une partition dénombrable de l'espace de base près) celles obtenues en restreignant l'action de G à $\text{Stab}_G(v)$ pour un certain $v \in V\Gamma_G^e$.

Comme dans la démonstration de Kida, ceci permet de montrer que pour tout couplage d'équivalence mesurée Ω entre G et H , il existe une application mesurable et $(G \times H)$ -équivariante $\Omega \rightarrow \text{Isom}(\Gamma_G^e \rightarrow \Gamma_H^e)$ – l'action de $G \times H$ sur $\text{Isom}(\Gamma_G^e \rightarrow \Gamma_H^e)$ est par pré/post-composition. Ceci donne en particulier un isomorphisme entre les graphes d'extension de G et H , ce qui suffit à conclure via le théorème 6.1 de Huang.

Pour démontrer la caractérisation ci-dessus des stabilisateurs de sommets du graphe d'extension, nous travaillons avec le bord de Roller $\partial_R X_\Gamma$ du complexe cubique X_Γ (voir [BCGNW09]), qui joue pour nous le rôle du bord de Thurston de l'espace de Teichmüller dans la démonstration de Kida. L'action de G sur le bord $\partial_R X_\Gamma$ est topologiquement moyennable [CN05, NS13]. Par ailleurs, les applications de réduction (comme en proposition 1.8) et barycentre (comme au théorème 1.11), cruciales pour faire fonctionner un argument similaire à celui de Kida, sont données par la proposition suivante, voir [HH22a, Theorem 7].

Proposition 6.6. *Il existe une partition borélienne $\partial_R X_\Gamma = \partial_R X_\Gamma^{\text{para}} \sqcup \partial_R X_\Gamma^\infty$ telle que*

1. *il existe une application mesurable G -équivariante qui associe à tout point de $\partial_R X_\Gamma^{\text{para}}$, un sous-groupe parabolique propre de G_Γ ;*
2. *il existe une application mesurable G -équivariante $\partial_R^{(3)} X_\Gamma^\infty \rightarrow X_\Gamma$, où $\partial_R^{(3)} X_\Gamma^\infty$ désigne l'espace des triplets de points deux à deux distincts de $\partial_R X_\Gamma^\infty$.*

Le sous-espace $\partial_R X_\Gamma^\infty$ est constitué des points *réguliers* au sense de Fernós [Fer18, Définition 7.3], et l'application barycentre vient d'un travail de Fernós–Lécureux–Mathéus [FLM18, Lemma 5.14 et Lemma 6.21]. Avec Huang, nous avons établi le premier point de la proposition.

6.2.3 Action sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$

Les outils présentés dans la partie précédente fournissent aussi des informations de nature géométrique sur les groupes mesurablement équivalents à G_Γ . Nous dirons qu'un groupe est à *torsion bornée* s'il existe une borne sur le cardinal de ses sous-groupes finis.

Théorème 6.7 (Horbez–Huang [HHa, Theorem 6]). *Soit $G = G_\Gamma$ un groupe d'Artin–Tits à angles droits, et soit H un groupe dénombrable mesurablement équivalent à G .*

Alors H agit avec noyau fini par automorphismes cubiques sur l'immeuble à angles droits \mathbb{B}_Γ avec stabilisateurs moyennables. Si de plus H est à torsion bornée, alors l'action peut être choisie cocompacte, c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini d'orbites de cubes.

L'idée de la démonstration est la suivante – j'omets l'argument de cocompacité. L'argument présenté en partie précédente assure que pour tout auto-couplage d'équivalence mesurée Ω de G , il existe une application mesurable $(G \times G)$ -équivariante $\Omega \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ – en utilisant ici l'isomorphisme entre $\text{Aut}(\Gamma^e)$ et $\text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ donné par la proposition 6.2. Soit maintenant Σ un couplage d'équivalence mesurée entre G et un groupe dénombrable H . Nous pouvons alors former l'auto-couplage $\Omega = \Sigma \times_H \Sigma$ de G , obtenu en quotientant $\Sigma \times \Sigma$ par l'action diagonale de H . Un argument issu des travaux de Furman [Fur99a] (voir sous cette forme [Kid11, Theorem 3.5] ou [BFS13, Theorem 2.6]) permet alors de

transférer l'énoncé de réduction des auto-couplages de G pour obtenir une représentation $H \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ à noyau fini, et une application mesurable $(G \times H)$ -équivariante $\Phi : \Omega \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$. En particulier H agit sur \mathbb{B} par automorphismes cubiques. Étant donné un sommet $v \in V\mathbb{B}_\Gamma$, le sous-espace $\Phi^{-1}(\text{Stab}(v))$, s'il est de mesure non nulle, est un couplage d'équivalence mesurée entre les stabilisateurs G_v et H_v , ce qui montre que H agit avec stabilisateurs moyennables sur \mathbb{B}_Γ . Assurer la non-nullité de la mesure est un point un peu subtil. Nous le contourrons en travaillant dans une extension d'indice finie \hat{G} de G qui a les mêmes orbites dans $\text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ que le groupe $\text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ entier. Ceci permet en effet d'assurer que les sous-espaces $\Phi^{-1}(\text{Aut}_{v \rightarrow w}(\mathbb{B}_\Gamma))$, avec w variant dans l'orbite sous $\text{Aut}(\mathbb{B}_\Gamma)$ de v , sont des translatés recouvrant Ω , et ont donc tous la même mesure strictement positive (ici $\text{Aut}_{v \rightarrow w}(\mathbb{B}_\Gamma)$ désigne l'ensemble des automorphismes envoyant v sur w).

6.3 Rigidité en équivalence mesurée intégrable

Nous présentons maintenant un théorème de superrigidité en équivalence mesurée sous une condition d'intégrabilité du cocycle d'équivalence mesurée.

Soit G un groupe de type fini, et $|\cdot|_G$ une distance des mots associée à une partie génératrice finie. Soit H un groupe dénombrable. Un couplage d'équivalence mesurée (Ω, μ) entre G et H est *intégrable de H vers G* s'il existe un domaine fondamental borélien X_G pour l'action de G sur Ω tel que, en notant $c : H \times X_G \rightarrow G$ le cocycle associé (où $c(h, x)$ est l'unique élément $g \in G$ tel que $ghx \in X_G$), nous ayons

$$\int_{X_G} |c(h, x)|_G d\mu(x) < +\infty$$

pour tout $h \in H$.

Cette condition d'intégrabilité, explicitée par Bader–Furman–Sauer [BFS13], trouve sa source dans la démonstration par Margulis de son théorème de superrigidité [Mar91], où l'intégrabilité d'un réseau (c'est-à-dire de l'autocouplage d'un réseau donné par son groupe de Lie ambient) est un point crucial dans des arguments d'induction – voir aussi [Sha00]. Elle trouve aussi une autre source dans un article de Belinskaya [Bel68] portant sur la rigidité d'actions de \mathbb{Z} en équivalence orbitale intégrable. L'équivalence mesurée intégrable est une notion qui retient mieux la géométrie du groupe que l'équivalence mesurée standard : par exemple elle en retient la croissance par un théorème de Bowen [Aus16b, appendice B], ou le profil isopérimétrique par un théorème de Delabie–Koivisto–Le Maître–Tessera [DKLMT22]. L'équivalence orbitale intégrable est aussi beaucoup étudiée du point de vue de la théorie ergodique, par exemple Austin a démontré un théorème de préservation de l'entropie [Aus16a], étendu par Kerr–Li dans [KL21]. Bader–Furman–Sauer ont démontré dans [BFS13] un théorème de rigidité en équivalence mesurée intégrable pour les réseaux dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ pour tout $n \geq 3$, et les réseaux cocompacts de $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$. Avec Huang, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 6.8 (Horbez–Huang [HHa, Theorem 1 et Corollary 2]). *Soit G un groupe d'Artin–Tits à angles droits avec $|\text{Out}(G)| < +\infty$. Soit H un groupe dénombrable à torsion bornée.*

S'il existe un couplage d'équivalence mesurée intégrable de H vers G , alors H est de type fini et quasi isométrique à G (en fait H agit proprement discontinûment et cocompactement sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ qui est quasi isométrique à G).

La précision sur l'existence d'une action propre et cocompacte de H sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ est due à Huang–Kleiner [HK18], j'y reviendrai un peu plus loin.

L'hypothèse de torsion bornée est nécessaire, autrement les réseaux non uniformes mentionnés dans la proposition 6.4 fournissent des contre-exemples. De même, l'hypothèse d'intégrabilité est nécessaire, sinon les produits graphés de groupes moyennables fournissent des contre-exemples (voir la proposition 6.3).

En combinant le théorème 6.8 avec un théorème de rigidité de certains groupes d'Artin–Tits à angles droits en quasi-isométrie obtenu par Huang [Hua18], nous déduisons le corollaire suivant, qui s'applique notamment dès que le graphe Γ est un n -gone, avec $n \geq 5$.

Corollaire 6.9. *Soit $G = G_\Gamma$ un groupe d'Artin–Tits à angles droits avec $|\text{Out}(G)| < +\infty$. Supposons que le graphe Γ est sans carré et satisfait la condition de rigidité locale suivante : pour tout sommet $v \in V\Gamma$ tout automorphisme de Γ fixant l'étoile de v point par point est l'identité. Soit H un groupe dénombrable à torsion bornée.*

S'il existe un couplage d'équivalence mesurée entre G et H , intégrable de H vers G , alors G et H possèdent des sous-groupes d'indice fini isomorphes.

Dans le théorème 6.8, si $G = G_\Gamma$, le complexe cubique sur lequel H agit est obtenu à partir d'une déformation assez simple de X_Γ , et en particulier il admet une projection H -équivariante vers l'immeuble à angles droits \mathbb{B}_Γ . Mais il est à noter qu'il dépend nécessairement de H . C'est là une différence subtile mais importante entre notre cadre et celui des réseaux dans des groupes de Lie simples : il n'existe pas de groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts dans lequel tous les groupes H comme dans l'énoncé se représentent comme réseaux, à un noyau fini près [HK18]. Nous montrons que lorsque G se scinde en un produit direct, ceci n'est même pas possible si l'on s'autorise à passer à un sous-groupe d'indice fini de H , ce qui contraste nettement avec le corollaire 6.9.

Théorème 6.10 (Horbez–Huang [HHa, Theorem 4]). *Soit G un groupe d'Artin–Tits à angles droits avec $|\text{Out}(G)| < +\infty$, qui se scinde en un produit direct de deux sous-groupes infinis.*

Il n'existe pas de groupe \mathfrak{G} localement compact à base dénombrable d'ouverts dans lequel tout groupe H ayant un couplage d'équivalence mesurée intégrable vers G , a un sous-groupe d'indice fini H^0 ayant un morphisme $H^0 \rightarrow \mathfrak{G}$ à noyau fini, et dont l'image est un réseau.

Notre démonstration du théorème 6.10 repose entre autres sur la construction par Burger–Mozes [BM00] de réseaux uniformes dans des produits d'arbres qui sont des groupes simples. Ces réseaux sont loin d'être virtuellement spéciaux au sens de Haglund–Wise [HW20]. Ceci contraste très nettement avec les groupes G_Γ apparaissant dans le corollaire 6.9, pour lesquels Huang montre dans [Hua18] que tout réseau cocompact dans $\text{Aut}(X_\Gamma)$ est virtuellement spécial et en fait commensurable à G_Γ .

Terminons cette partie par un mot sur notre démonstration du théorème 6.8. Par le théorème 6.7, nous savons que H agit sur l'immeuble à angles droits \mathbb{B}_Γ avec stabilisateurs moyennables. Dans un premier temps, en utilisant l'hypothèse d'intégrabilité, nous améliorons ceci et montrons que les H -stabilisateurs des sommets de rang 1 de \mathbb{B}_Γ sont virtuellement isomorphes à \mathbb{Z} (rappelons que leurs G -stabilisateurs sont isomorphes à \mathbb{Z}). Pour cela, nous utilisons un théorème de Bowen [Aus16b, Theorem B.10], qui entraîne que tout groupe de type fini H qui admet un couplage d'équivalence mesurée avec \mathbb{Z} intégrable vers \mathbb{Z} , est à croissance au plus linéaire, et donc virtuellement isomorphe à \mathbb{Z} . Une difficulté à surmonter malgré tout est que nous ne savons pas *a priori* que les stabilisateurs pour l'action de H sur \mathbb{B}_Γ sont de type fini, si bien que nous avons dû étendre l'argument de Bowen à tous les groupes dénombrables H à torsion bornée – en ce sens, le théorème 6.8 est en fait déjà nouveau pour $G = \mathbb{Z}$.

L'étape suivante consiste à appliquer un critère de quasi-isométrie dû à Huang–Kleiner [HK18] : il s'agit d'avoir un bon contrôle sur la manière dont H agit localement sur \mathbb{B}_Γ (ob-

tenu en comparant les actions de G et de H grâce au couplage), pour pouvoir construire un éclatement de \mathbb{B}_Γ sur lequel H agit proprement discontinûment et cocompactement. Nous renvoyons à la partie 3 de [HHa] pour une présentation de ce critère et plus de précisions.

6.4 Superrigidité des actions irréductibles

Une autre manière d’obtenir de la rigidité en équivalence mesurée pour les groupes d’Artin–Tits à angles droits, malgré les exemples présentés en partie 6.2.1, consiste à imposer des conditions plus fortes d’ergodicité sur les couplages considérés. C’est l’approche que nous adoptons avec Jingyin Huang et Adrian Ioana dans [HHI23], qui est inspirée par les travaux de Monod–Shalom [MS06] portant sur la rigidité de produits directs de groupes à courbure négative.

Nous dirons qu’une action préservant la mesure d’un groupe d’Artin–Tits à angles droits G sur un espace de probabilité standard X est *irréductible* si chacun des éléments d’une partie génératrice standard de G agit ergodiquement sur X . Rappelons aussi qu’une action préservant la mesure d’un groupe dénombrable H sur un espace de probabilité standard (Y, ν) est *modérément mélangeante* si pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d’éléments deux à deux distincts, et tout sous-ensemble mesurable $A \subseteq Y$, nous avons $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \nu(A \triangle g_n A) > 0$ sauf si $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A) = 1$.

Théorème 6.11 (Horbez–Huang–Ioana [HHI23, Theorem 2]). *Soit G un groupe d’Artin–Tits à angles droits à un bout, à centre trivial.⁴ Soit H un groupe dénombrable.*

Soit $\alpha_G : G \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ et $\alpha_H : H \rightarrow \text{Aut}(Y, \nu)$ des actions libres sur des espaces de probabilité standard. Supposons α_G irréductible et α_H modérément mélangeante.

Si les actions α_G et α_H sont stablement orbitalement équivalentes, alors elles sont virtuellement conjuguées.

Dans le cas où H est aussi un groupe d’Artin–Tits à angles droits à un bout et à centre trivial, il suffit de supposer α_H irréductible (plutôt que modérément mélangeante), et la conclusion est que les actions sont conjuguées [HHI23, Theorem 1]. Je mentionne qu’il est ici important de supposer les groupes à un bout : Bowen a démontré que tous les décalages de Bernoulli non triviaux de groupes libres non abéliens sont stablement orbitalement équivalents [Bow11], quoique non conjugués en général. Mentionnons enfin que dans le cas d’un décalage de Bernoulli de G , le théorème 6.11 découle aussi des travaux de Popa [Pop08].

6.5 Projets en cours, questions et perspectives

6.5.1 Sur la classification des groupes d’Artin–Tits à angles droits : projets et questions

Comme expliqué plus haut, dans le théorème 6.5, si l’on suppose seulement $|\text{Out}(G)| < +\infty$, il y a une infinité de groupes d’Artin–Tits à angles droits deux à deux non isomorphes qui sont mesurablement équivalents à G . Ceux-ci contiennent tous les produits graphés de groupes abéliens libres infinis dénombrables sur le graphe définissant G . Par ailleurs G contient des sous-groupes d’indice fini (donc mesurablement équivalents à G) qui sont eux-mêmes des groupes d’Artin–Tits à angles droits. Un exemple est le suivant : considérons un sommet $v \in V\Gamma$, et soit H le noyau du morphisme $G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ envoyant le générateur associé à v sur 1, et tout autre générateur sur 0. Alors H est un groupe d’Artin–Tits à angles droits, et le graphe définissant H est obtenu à partir de deux copies de Γ recollées

4. De manière équivalente, le graphe définissant G est connexe, et n’est pas contenu dans l’étoile d’un sommet.

sur $\text{lk}(v)$. La classification complète des sous-groupes d'indice fini de G_Γ qui sont eux-mêmes des groupes d'Artin–Tits à angles droits est due à Huang [Hua17, partie 6].

Dans un travail en cours avec Huang [HHb], nous espérons montrer qu'en itérant les opérations ci-dessus, nous obtenons tous les groupes d'Artin–Tits à angles droits mesurablement équivalents à G . Ainsi, sous la seule hypothèse que $|\text{Out}(G)| < +\infty$, nous obtiendrons la classification complète de tous les groupes d'Artin–Tits à angles droits qui sont mesurablement équivalents à G . Nous pensons aussi répondre à la même question pour l'équivalence orbitale plutôt que mesurée. L'énoncé espéré est le suivant.

Conjecture 6.12. *Soit $G = G_\Gamma$ et H deux groupes d'Artin–Tits à angles droits. Supposons $|\text{Out}(G)| < +\infty$. Alors*

- *les groupes G et H sont orbitalement équivalents si et seulement si H est un produit graphé de groupes abéliens libres infinis sur Γ ;*
- *les groupes G et H sont mesurablement équivalents si et seulement s'il existe un groupe d'Artin–Tits à angles droits $G^0 \subseteq G$ d'indice fini dans G de sorte que, si Λ est le graphe définissant G^0 , alors H est un produit graphé de groupes abéliens libres infinis sur Λ .*

Par contre, au-delà du cadre où $|\text{Out}(G)| < +\infty$, nous savons très peu sur la classification des groupes d'Artin–Tits à angles droits. Un théorème de Behrstock–Neumann [BN08] affirme que tous les groupes d'Artin–Tits à angles droits dont le graphe de définition est un arbre de diamètre au moins 3, sont quasi isométriques. Sont-ils tous mesurablement équivalents ? Qu'en est-il de leur classification à équivalence orbitale près ? Des notions classiques comme le coût, introduit par Levitt [Lev95] et largement étudié par Gaboriau [Gab00], ou les nombres de Betti ℓ^2 [Gab02], ne permettent pas de les distinguer.

6.5.2 Extension aux produits graphés : projet et questions

Dans un travail en cours avec Amandine Escalier, nous étendons plusieurs des énoncés présentés dans cette partie au cadre de produits graphés avec des groupes de sommets infinis dénombrables arbitraires. Un graphe Γ est *rigide* si $|\text{Out}(G_\Gamma)| < +\infty$. Nous démontrons le théorème suivant, qui étend le théorème 6.5.

Théorème 6.13 (Escalier–Horbez [EH]). *Soit Γ, Λ deux graphes simpliciaux finis rigides. Soit $(G_v)_{v \in V\Gamma}$ et $(H_w)_{w \in V\Lambda}$ deux familles de groupes de sommets infinis dénombrables. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *Les produits graphés $\mathbb{G}(\Gamma, (G_v)_{v \in V\Gamma})$ et $\mathbb{G}(\Lambda, (H_w)_{w \in V\Lambda})$ sont mesurablement équivalents.*
2. *Les produits graphés $\mathbb{G}(\Gamma, (G_v)_{v \in V\Gamma})$ et $\mathbb{G}(\Lambda, (H_w)_{w \in V\Lambda})$ sont orbitalement équivalents.*
3. *Il existe un isomorphisme de graphes $\theta : \Gamma \rightarrow \Lambda$ tel que pour tout $v \in V\Gamma$, les groupes G_v et $H_{\theta(v)}$ soient orbitalement équivalents.*

Nous donnons aussi des version *quantitatives* de ce théorème, où l'intégrabilité des couplages obtenus est quantifiée, au sens de Delabie–Koivisto–Le Maître–Tessera [DKLMT22]. Enfin, nous travaillons à une version du théorème 6.11 pour des produits graphés, avec des groupes de sommets infinis arbitraires.

La démonstration de ces théorèmes requiert de nouveaux arguments assez fins concernant la combinatoire des produits graphés. Nous espérons que les techniques que nous développons pourront être utiles pour traiter d'autres problèmes sur les produits graphés. Par exemple, la classification des produits graphés à isomorphisme près est toujours un problème ouvert, qui n'a été résolu que dans un petit nombre de cas [Gre90, Rad03, GP08,

Gen18], et il serait intéressant de voir ce que nos techniques permettent d’apporter. La classification des produits graphés à quasi-isométrie près est aussi largement ouverte, voir par exemple [HKS20, Appendix A].

Nous pourrions aussi nous interroger sur d’autres questions de rigidité : un produit graphé de groupes qui sont superrigides en équivalence mesurée, est-il superrigide en équivalence mesurée, du moins sous des hypothèses raisonnables ?

6.5.3 Actions L^∞ -orbitalement équivalentes d’un groupe d’Artin–Tits à angles droits

Comme nous l’avons expliqué au chapitre 5, la rigidité en équivalence mesurée permet souvent d’obtenir des théorèmes de rigidité en équivalence orbitale au niveau des actions de groupes. La propriété de tension en équivalence mesurée, qui est la forme de rigidité la plus forte possible pour les auto-couplages, est cruciale pour cela. Notre démonstration avec Huang du théorème 6.8 ne passe pas par un énoncé de tension des auto-couplages, et n’a donc pas pour conséquence un énoncé de rigidité en équivalence orbitale pour les actions libres, ergodiques, préservant une mesure de probabilité de G_Γ . En fait, dans un projet en cours avec Matthieu Joseph, nous démontrons le théorème suivant, qui étend le cas des groupes libres [Jos22, Corollary 5.8], et contraste avec le théorème 6.8, mais aussi avec le théorème 6.11 – pour les actions que nous considérons, les générateurs n’agissent pas ergodiquement.

Théorème 6.14 (Horbez–Joseph [HJ]). *Soit G_Γ un groupe d’Artin–Tits à angles droits non abélien. Alors il existe deux actions libres ergodiques préservant la mesure sur des espaces de probabilité standard de G_Γ , qui sont L^∞ -orbitalement équivalentes, mais non conjuguées.*

Notons $\alpha_1 : G_\Gamma \rightarrow \text{Aut}(X_1)$ et $\alpha_2 : G_\Gamma \rightarrow \text{Aut}(X_2)$ les deux actions. Dire qu’elles sont L^∞ -orbitalement équivalentes signifie qu’il existe un isomorphisme $f : X_1 \rightarrow X_2$ d’espaces mesurés envoyant orbite sur orbite (presque partout) tel que pour tout $g \in G_\Gamma$, les applications $c_1(g, \cdot) : X_1 \rightarrow G_\Gamma$ et $c_2(g, \cdot) : X_2 \rightarrow G_\Gamma$ définies par $f(gx) = c_1(g, x)f(x)$ et $f^{-1}(gy) = c_2(g, y)f^{-1}(y)$, ne prennent essentiellement qu’un nombre fini de valeurs.

Nous travaillons maintenant à trouver d’autres familles de groupes dans lesquelles des phénomènes du même type se produisent.

6.5.4 Autres questions et perspectives

Réseaux non uniformes de type fini dans les complexes cubiques CAT(0). Dans le théorème 6.8, nous ne savons pas si l’hypothèse de torsion bornée peut être remplacée par celle que H est de type fini. Un contre-exemple pourrait provenir de l’existence d’un réseau non uniforme de type fini dans $\text{Aut}(X_\Gamma)$. Des exemples de réseaux non uniformes de type fini dans des produits d’arbres ont été construits par Rémy à l’aide de groupes de Kac–Moody [Rém99]. Ceci correspond au cas où $G_\Gamma = F_2 \times F_2$, qui ne satisfait pas $|\text{Out}(G_\Gamma)| < +\infty$. Par ailleurs, des restrictions sur les propriétés de finitude d’un tel réseau ont été établies par Gandini [Gan12] – par exemple on ne peut pas espérer obtenir un réseau non uniforme de présentation finie en général. Je pense que c’est un problème important en soi de comprendre quelles sont les propriétés de finitude possibles d’un réseau dans le groupe des automorphismes d’un complexe cubique CAT(0), et notamment dans le cas du complexe X_Γ . Existe-t-il un réseau non uniforme de type fini dans $\text{Aut}(X_\Gamma)$ lorsque Γ est un pentagone ? un joint de deux pentagones ? La théorie de Morse discrète développée par Bestvina–Brady [BB97] peut donner des outils à cette fin – elle s’est avérée utile par exemple dans un travail de Bux–Köhl–Witzel portant sur les propriétés de finitude de groupes arithmétiques réductifs en caractéristique strictement positive [BKW13].

Questions d'intégrabilité. Dans le théorème 6.8, si nous supposons H de type fini, l'hypothèse d'intégrabilité L^1 est-elle optimale, ou peut-elle être remplacée par une hypothèse d'intégrabilité L^p avec $p > 1/2$? Le cas $p < 1/2$ est exclu, car il autorise des produits graphés dont les groupes de sommets sont \mathbb{Z}^2 . Sans supposer H de type fini, un exemple d'équivalence orbitale L^p pour tout $p < 1$ du sous-groupe de \mathbb{Q} formé des entiers dyadiques vers \mathbb{Z} , m'a été expliqué par Matthieu Joseph, François Le Maître et Romain Tessera.

Groupes de Coxeter à angles droits. Les méthodes développées dans ce chapitre s'appliquent aux groupes d'Artin–Tits à angles droits, ou plus généralement aux produits graphés de groupes infinis. Mais nous ne savons essentiellement rien sur la théorie mesurée des groupes de Coxeter à angles droits – définis comme les groupes d'Artin–Tits à angles droits en imposant de plus que chaque générateur est d'ordre 2 – ou plus généralement des produits graphés de groupes finis. Peut-on les classifier, du moins certaines classes, à équivalence mesurée près – voir par exemple [DT17a, NT19, BX20] pour des résultats de classification en quasi-isométrie? Certains sont-ils rigides en équivalence mesurée et/ou en quasi-isométrie? Ou du moins, tout groupe mesurablement équivalent (ou quasi isométrique) à un tel groupe, est-il nécessairement un réseau dans un complexe cubique associé (par exemple le complexe de Davis)? La question est forcément plus délicate en général : le groupe de Coxeter à angles droits associé à un n -gone avec $n \geq 5$, par exemple, est toujours commensurable à un groupe de surface hyperbolique. Par ailleurs, peut-on espérer montrer un théorème de rigidité dans l'esprit de celui de Monod–Shalom, analogue au théorème 6.11? Dans le cas où G_Γ est un groupe d'Artin–Tits à angles droits, nous avons dû nous restreindre au cas où le graphe Γ est connexe. Dans le cas des groupes de Coxeter à angles droits, je suspecte que la bonne condition consiste à considérer ceux qui ne sont pas relativement hyperboliques – ceci fournit suffisamment de *régions produit* dans le groupe ou un complexe cubique associé, à partir desquelles travailler, voir [BHS17b].

7 Rigidité et algèbres de von Neumann

7.1 Algèbres de von Neumann de groupes et d'actions

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe, dont nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, supposé linéaire en la première variable, et antilinéaire en la seconde. L'ensemble $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés sur \mathcal{H} , muni de l'opération $x \mapsto x^*$ envoyant un opérateur sur son adjoint, et de la norme d'opérateurs, est une algèbre stellaire unifère.

Le *commutant* d'un sous-ensemble $X \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est $X' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall S \in X, ST = TS\}$. Une *algèbre de von Neumann* sur \mathcal{H} est une sous-algèbre stellaire unifère M de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ égale à son bicommutant, i.e. telle que $(M')' = M$. De manière équivalente par un théorème fondateur de von Neumann [vN30], une algèbre de von Neumann est une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ fermée en *topologie faible d'opérateurs*, qui est la topologie sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour laquelle une base de voisinages ouverts d'un élément $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est donnée par les ensembles

$$\mathcal{U}(S, \varepsilon, (\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n)) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \langle (T - S)\xi_i, \eta_i \rangle < \varepsilon, \forall i \in \{1, \dots, n\}\},$$

avec $\varepsilon > 0$ et $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{H}$.

À tout groupe dénombrable G , Murray–von Neumann [MvN43] associent une algèbre de von Neumann $L(G)$, sur $\mathcal{H} = \ell^2(G)$, définie comme suit. Le groupe G agit sur $\ell^2(G)$ via $u_g(\delta_h) = \delta_{gh}$, et $L(G) = \{u_g \mid g \in G\}''$.

De même, à toute action libre, ergodique, préservant la mesure $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ d'un groupe dénombrable G sur un espace de probabilité standard (X, μ) , une construction de Murray–von Neumann [MvN36] associe une algèbre de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$, sur $\mathcal{H} = \ell^2(G) \otimes L^2(X, \mu)$, définie comme suit. D'abord, à tout $f \in L^\infty(X, \mu)$ est associé un opérateur borné α_f , défini par $\alpha_f(\delta_h \otimes F) = \delta_h \otimes fF$. Ensuite, à tout $g \in G$ est associé un opérateur borné u_g , défini par $u_g(\delta_h \otimes F) = \delta_{gh} \otimes F(g^{-1}\cdot)$. L'algèbre de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ est l'algèbre de von Neumann sur \mathcal{H} engendrée par les opérateurs α_f , avec $f \in L^\infty(X, \mu)$, et u_g , avec $g \in G$.

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les algèbres de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$, et la question centrale est la suivante : dans quelle mesure $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ retient-elle l'action α de G sur X ? Autrement dit, si deux actions libres ergodiques préservant la mesure de groupes G, H sur des espaces de probabilité standard X, Y engendrent des algèbres de von Neumann isomorphes, les actions doivent-elles être conjuguées ? Nous dirons qu'une action $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ comme ci-dessus est *W^* -superrigide* si pour tout groupe dénombrable H , et toute action libre ergodique préservant une mesure de probabilité $\beta : H \rightarrow \text{Aut}(Y)$, si $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ est isomorphe à $L^\infty(Y) \rtimes_\beta H$, alors les deux actions α et β sont virtuellement conjuguées.

Une observation de Singer [Sin55] (voir aussi [FM77]) assure que deux actions $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ et $\beta : H \rightarrow \text{Aut}(Y)$ comme ci-dessus sont orbitalement équivalentes si et seulement s'il existe un isomorphisme $\theta : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \rightarrow L^\infty(Y) \rtimes_\beta H$ tel que $\theta(L^\infty(X)) = L^\infty(Y)$. Ainsi, pour montrer la W^* -superrigidité d'une action $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(X)$, il suffit de montrer sa rigidité en équivalence orbitale, ainsi que l'unicité de $L^\infty(X)$ comme sous-algèbre de Cartan de $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ (c'est-à-dire comme sous-algèbres abélienne maximale dont le normalisateur engendre $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$), à conjugaison unitaire près.

7.2 Groupes dont toutes les actions sont W^* -superrigides

L'unicité de la sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près est un problème difficile, et il y a de nombreux exemples d'algèbres de von Neumann où cette propriété

n'est pas satisfaite, voir par exemple les travaux de Connes–Jones [CJ82]. Les premiers exemples d'actions de groupes donnant lieu à des algèbres de von Neumann ayant une unique sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près, ont été exhibés par Ozawa–Popa [OP10], dans le cadre de la théorie de la déformation/rigidité de Popa [Pop06a, Pop06b]. Cette théorie a eu au cours des deux dernières décennies des développements spectaculaires : mentionnons notamment un théorème de Popa–Vaes [PV14], qui affirme que pour toute action libre, ergodique, préservant la mesure α d'un groupe libre non abélien F_N de type fini sur un espace de probabilité standard X , la sous-algèbre $L^\infty(X)$ est, à conjugaison unitaire près, l'unique sous-algèbre de Cartan de $L^\infty(X) \rtimes_\alpha F_N$.

Le premier exemple d'un groupe dont toutes les actions libres ergodiques préservant une mesure de probabilité sont W^* -superrigides a été exhibé par Houdayer–Popa–Vaes [PV10, HPV13], il s'agit du produit amalgamé $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}) *_\Sigma \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, où Σ est le groupe formé des matrices g pour lesquelles $g_{31} = g_{32} = 0$. Les exemples de tels groupes sont à ce jour très rares (voir aussi [CIK15]); nos travaux en équivalence orbitale nous ont permis d'en exhiber de nouvelles classes.

En utilisant le théorème de Popa–Vaes mentionné plus haut, Ioana a pu l'étendre à un cadre plus général de groupes se scindant en produit amalgamé [Ioa15]. Il démontre que si un groupe dénombrable G se scinde en un produit amalgamé $G = A *_C B$, avec $[A : C] \geq 2$ et $[B : C] \geq 3$, de sorte qu'il existe un ensemble fini $\{C_1, \dots, C_k\}$ de conjugués de C dans G d'intersection triviale, alors pour toute action libre, ergodique, préservant la mesure α de G sur un espace de probabilité standard X , la sous-algèbre $L^\infty(X)$ est, à conjugaison unitaire près, l'unique sous-algèbre de Cartan de $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$.

Les groupes de Higman présentés en partie 5.5 admettent de telles décompositions en produits amalgamés, en écrivant, avec les notations de cette partie,

$$\mathrm{Hig}_\sigma = \langle a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \rangle *_{\langle a_{i-1}, a_{i+1} \rangle} \langle a_j \mid j \neq i \rangle.$$

De même pour les groupes d'Artin–Tits qui apparaissent dans le théorème 5.5. En vérifiant le critère de malnormalité dans le théorème de Ioana susmentionné, et en le combinant avec les théorèmes de rigidité en équivalence orbitale présentés au chapitre 5, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 7.1 (Horbez–Huang [HH22b, Corollary 1.4], [HH20, Theorem 9]). *Si G est l'un des groupes suivants, alors toute action libre, ergodique, préservant la mesure de G sur un espace de probabilité standard est W^* -superrigide :*

- le groupe de Higman généralisé Hig_σ , où $\sigma = ((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ est un k -uplet d'entiers non nuls, avec $k \geq 5$ et $|m_i| \neq |n_i|$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$;
- le groupe d'Artin–Tits A_Γ , où Γ est un k -gone, avec $k \geq 4$, dont toutes les arêtes sont étiquetées par un entier supérieur à 3.

Dans le cas des groupes de Higman classiques Hig_k , avec $k \geq 5$, la conclusion est même un peu plus forte : on peut remplacer “virtuellement conjuguées” par “conjuguées” dans la définition de W^* -superrigides, en tirant profit du fait, démontré par Higman dans [Hig51], que Hig_k n'a pas de sous-groupe d'indice fini propre.

7.3 Proximalité propre

Nous nous concentrons maintenant sur des résultats de W^* -superrigidité portant sur des actions profinies de groupes. Rappelons qu'une action libre ergodique préservant la mesure d'un groupe dénombrable G sur un espace de probabilité standard est *profinie* si elle est la limite inverse d'une suite d'actions ergodiques préservant la mesure sur des espaces de probabilité finis. Par exemple, si G est résiduellement fini, et si $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$ est une suite de sous-groupes d'indice fini distingués d'intersection triviale,

alors la limite inverse \hat{G} des G/G_n est naturellement un groupe topologique compact, et l'action de G sur \hat{G} par multiplication à gauche est une action libre ergodique préservant la mesure de Haar. Ozawa et Popa ont introduit une notion plus générale d'action *faiblement compacte*, pour laquelle nous renvoyons à [OP10, partie 3].

Groupes proprement proximaux. Boutonnet–Ioana–Peterson ont introduit dans [BIP21] une notion de *proximalité propre* d'un groupe dénombrable G , issue de la dynamique topologique et inspirée de la notion de *proximalité forte* de Furstenberg [Fur63], et démontré que celle-ci entraîne des phénomènes de W^* -superrigidité pour les actions faiblement compactes de G .

Suivant [BIP21, Definition 4.1], nous dirons qu'un groupe dénombrable discret G est *proprement proximal* s'il existe des actions de G par homéomorphismes sur des espaces compacts K_1, \dots, K_n (avec $n \in \mathbb{N}$), et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, une mesure de probabilité $\eta_i \in \text{Prob}(K_i)$, de sorte que

1. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il n'existe pas de mesure de probabilité G -invariante sur K_i ;
2. pour tout ultrafiltre non principal ω sur G , il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que pour tout $h \in G$, nous ayons $\lim_{g \rightarrow \omega} (g_*(h_*\eta_i) - g_*\eta_i) = 0$ en topologie faible-*.

Voici un critère suffisant, peut-être un peu plus concret, assurant la proximalité propre d'un groupe dénombrable G . Supposons que G admette une action par homéomorphismes sur un espace compact K , sans mesure de probabilité invariante, et qu'il existe un sous-espace borélien G -invariant $K^* \subseteq K$ contenant un sous-espace de Cantor, tel que pour toute suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G deux à deux distincts, il existe une sous-suite $(g_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\xi^-, \xi^+ \in K$ tels que pour tout $\xi \in K^* \setminus \{\xi^-\}$, la suite $(g_{\sigma(n)}\xi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ξ^+ . Alors G est proprement proximal. C'est une variante autour de la dynamique nord-sud : plus forte en ce sens qu'elle doit s'appliquer à toute suite d'éléments deux à deux distincts de G (et pas seulement aux puissances d'un élément), mais moins forte en ce qu'elle ne doit s'appliquer qu'aux points ξ du sous-ensemble K^* .

Un exemple est le suivant. Soit $G = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$. Le graphe de Cayley X , pour sa partie génératrice standard, est un "arbre de plats". Le critère présenté ci-dessus s'applique en prenant pour K le bord visuel de X , et pour K^* le sous-espace formé des directions dites *de Morse*, i.e. celles qui ne sont au bord d'aucun plat. Cet exemple sera généralisé un peu plus bas.

Boutonnet–Ioana–Peterson démontrent la proximalité propre de nombreux groupes, incluant notamment les réseaux de groupes de Lie semi-simples non compacts et les groupes hyperboliques non élémentaires [BIP21, Proposition 1.6]. D'autres exemples, incluant des familles de groupes agissant sur des arbres, certains produits en couronne, ont été donnés par Ding–Kunnawalkam Elayavalli dans [DKE21], et Ding a démontré que tous les groupes dénombrables ayant un premier nombre de Betti ℓ^2 strictement positif sont proprement proximaux [Din22]. À l'inverse les groupes moyennables (et plus généralement les groupes intérieurement moyennables) ne sont pas proprement proximaux [BIP21, Proposition 1.6]. La classe des groupes proprement proximaux est stable par produit direct, par commensurabilité et plus généralement par équivalence mesurée par un théorème d'Ishan–Peterson–Ruth [IPR19].

Avec Jingyin Huang et Jean Lécureux, nous avons démontré le théorème suivant, qui répond à une question de Boutonnet–Ioana–Peterson [BIP21, Question 1(a)].

Théorème 7.2 (Horbez–Huang–Lécureux [HHL20, Theorem 7]). *Soit $g, n \geq 0$, avec $3g + n - 4 \geq 0$. Soit $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ une surface connexe orientable obtenue à partir d'une surface fermée de genre g en retirant n points.*

Alors $\text{Mod}(\Sigma)$ est proprement proximal.

La conclusion est vraie plus généralement de tout sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma)$ qui agit avec deux isométries loxodromiques indépendantes sur le graphe des courbes de Σ . Ceci inclut des exemples intéressants comme le sous-groupe de Torelli, ou les groupes modulaires de corps en anses que nous avons présenté en partie 5.3.

Notre démonstration utilise la structure hiérarchiquement hyperbolique de $\text{Mod}(\Sigma)$, établie par Masur–Minsky [MM00], et formalisée par Behrstock–Hagen–Sisto [BHS17a, BHS19]. Masur–Minsky montrent notamment que la distance des mots dans $\text{Mod}(\Sigma)$ peut s'évaluer à partir de la distance dans le complexe des courbes de Σ , et de celles dans tous les complexes de courbes des sous-surfaces essentielles de Σ . L'espace K avec lequel nous travaillons est la *compactification hiérarchique* de $\text{Mod}(\Sigma)$, définie par Durham–Hagen–Sisto [DHS17] : c'est un espace compact qui contient (comme sous-espace mesurable) le bord de Gromov du complexe des courbes de Σ (qui correspond au sous-espace K^*), ainsi que du complexe des courbes de toute sous-surface essentielle de Σ . Le critère ci-dessus est vérifié par des arguments de dynamique d'actions de groupes sur des espaces hyperboliques, en utilisant les applications de projection entre les différents espaces hyperboliques provenant de la structure hiérarchique.

Nous démontrons également la proximalité propre de nombreux groupes agissant sur des espaces $\text{CAT}(0)$. Nous renvoyons à [HHL20] pour les définitions nécessaires.

Théorème 7.3 (Horbez–Huang–Lécureux [HHL20, Theorem 1, Corollary 3 et Theorem 4]). *Les groupes suivants sont proprement proximaux :*

1. *tout groupe dénombrable agissant proprement non élémentairement par isométries sur un espace $\text{CAT}(0)$ propre avec une isométrie de rang 1 ;*
2. *tout groupe dénombrable agissant proprement non élémentairement par automorphismes cubiques sur un complexe cubique $\text{CAT}(0)$ propre de dimension finie ;*
3. *tout groupe dénombrable agissant proprement, minimalement, non élémentairement par isométries sur un immeuble affine épais localement fini.*

Applications à la rigidité d'algèbres de von Neumann d'actions de groupes. La proximalité propre d'un groupe dénombrable G a les conséquences suivantes [BIP21, Theorem 1.4 et Theorem 1.5]. D'abord, l'algèbre de von Neumann du groupe $L(G)$ n'a pas de sous-algèbre de Cartan. Ensuite, soit $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ une action libre ergodique préservant la mesure de G sur un espace de probabilité standard X . Si l'action α est faiblement compacte, alors $L^\infty(X)$ est à conjugaison unitaire près l'unique sous-algèbre de Cartan faiblement compacte (au sens de [OP10, Definition 3.1]) de $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$. Si l'action α n'est pas faiblement compacte, alors $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ ne contient aucune sous-algèbre de Cartan faiblement compacte. En conséquence dans les deux cas, si une action libre ergodique p.m.p. faiblement compacte β d'un groupe dénombrable H sur un espace de probabilité Y est telle que $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ est isomorphe à $L^\infty(Y) \rtimes_\beta H$, alors les deux actions sont orbitalement équivalentes.

En combinant la proximalité propre de $\text{Mod}(\Sigma)$ avec le théorème de rigidité en équivalence orbitale de Kida [Kid08b], nous obtenons le corollaire suivant – le même énoncé est aussi valable pour les actions de groupes modulaires de corps en anses de dimension 3, en utilisant le théorème 5.4.

Corollaire 7.4 ([HHL20, Theorem 4.3]). *Soit $g, n \geq 0$, avec $3g + n - 4 \geq 0$. Soit $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ une surface connexe orientable obtenue à partir d'une surface fermée de genre g en retirant n points.*

Soit $\alpha : \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(X)$ une action libre ergodique préservant la mesure sur un espace de probabilité standard. Soit H un groupe dénombrable, et soit $\beta : H \rightarrow \text{Aut}(Y)$ une action libre ergodique préservant la mesure faiblement compacte (par exemple profinie) sur un espace de probabilité standard.

Si les algèbres de von Neumann $L^\infty(X) \rtimes_\alpha \text{Mod}(\Sigma)$ et $L^\infty(Y) \rtimes_\beta H$ sont isomorphes, alors les actions α et β sont virtuellement conjuguées.

Mentionnons pour finir que dans une direction opposée aux actions profinies, de nombreux théorèmes de rigidité sont connus pour les actions de Bernoulli d’une large classe de groupes, qui ont été obtenus dans le cadre de la théorie de déformation/rigidité de Popa. Ainsi Popa a démontré la rigidité en équivalence orbitale des actions de Bernoulli des groupes ayant la propriété (T) de Kazhdan [Pop06b] et des groupes se scindant en produit direct de deux groupes infinis dont l’un au moins est non moyennable [Pop08]. Pour chacune de ces deux classes de groupes, la rigidité W^* des actions de Bernoulli a été démontrée, respectivement par Ioana [Ioa11] et Ioana–Popa–Vaes [IPV13]. Le deuxième théorème de Popa concernant la rigidité en équivalence orbitale s’applique en fait plus généralement à tout groupe dénombrable G qui possède une partie génératrice finie $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ formée d’éléments d’ordre infini, telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les éléments s_i et s_{i+1} commutent, et le centralisateur de s_1 est non moyennable. En fait l’argument de Ioana–Popa–Vaes permet plus généralement de démontrer la rigidité W^* des actions de Bernoulli pour des groupes dénombrables à classes de conjugaison infinies de groupes ayant une partie génératrice commutant en chaîne comme ci-dessus, voir [HH123, Theorem 3]. Ceci s’applique notamment aux actions de Bernoulli des groupes modulaires de surfaces connexes orientables de type fini (sauf exceptions de petite complexité) ainsi que de nombreux groupes d’Artin–Tits.

7.4 Questions et perspectives

Proximité propre de $\text{Out}(F_N)$. Une question qui ressort naturellement de ce chapitre, déjà posée par Boutonnet–Ioana–Peterson [BIP21, Question 1(a)], est celle de la proximalité propre de $\text{Out}(F_N)$. Notre démonstration pour les groupes modulaires de surfaces repose essentiellement sur leur structure hiérarchiquement hyperbolique, et $\text{Out}(F_N)$ n’est pas hiérarchiquement hyperbolique (voir [BHS19, Corollary 7.6]) car sa fonction de Dehn est exponentielle [BV95, HV96, HM13b, BV12]. Ainsi, la construction même d’un espace compact qui permettrait de témoigner de la proximalité propre de $\text{Out}(F_N)$ est manquant. Adapter en partie la théorie de Masur–Minsky [MM00] au cadre de $\text{Out}(F_N)$ est certainement une question importante, et la question de la proximalité propre peut aussi servir de question test à cette fin.

Plus généralement, les groupes acylindriquement hyperboliques sont-ils proprement proximaux (voir [Oya23, Question 1.3]) ? Par ailleurs, qu’en est-il des groupes satisfaisant d’autres propriétés de courbure négative, par exemple les groupes systoliques au sens de [Che00, JS06], pour lesquels une compactification naturelle a été construite par Osajda–Przytycki [OP09] ?

Proximité propre des groupes linéaires. Une autre question posée par Boutonnet–Ioana–Peterson [BIP21, Question 2(b)] est celle de la proximalité propre des sous-groupes de $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ à radical résoluble trivial, par exemple $\text{SL}_d(\mathbb{Z}[t])$. Ces groupes agissant sur des immeubles, il est possible que certaines des techniques introduites dans [HHL20] puissent être utiles à cette fin. Nous avons commencé à réfléchir à cette question avec Sami Douba, Bruno Duchesne et Jean Lécureux, et pensons à ce stade pouvoir traiter le cas où $d = 2$ où l’immeuble est un arbre – les considérations géométriques nécessaires semblent beaucoup plus délicates lorsque $d \geq 3$.

Classification W^* des produits graphés. Un autre problème qui émerge des deux derniers chapitres de ce mémoire, et sur lequel j’ai commencé à travailler avec Adrian Ioana, est celui de classer les groupes d’Artin–Tits à angles droits à équivalence W^* près, autrement

dit : que peut-on dire de deux groupes d’Artin–Tits à angles droits dont les algèbres de von Neumann sont isomorphes ? Cette même question peut se poser plus généralement dans le cadre des produits graphés. L’inspiration vient du cas de l’équivalence mesurée, pour laquelle une étape-clé est de “reconnaître” les sous-relations d’équivalence moyennables à normalisateur non moyennables. Ici de même, des techniques issues de la théorie de la déformation/rigidité de Popa, apparaissant par exemple dans des travaux de Ioana [Ioa15] et Vaes [Vae14], permettent de localiser en un sens les sous-algèbres de von Neumann de $L(G)$ dont le normalisateur est suffisamment gros. Notons que les produits graphés ont connu un intérêt croissant dans l’étude des algèbres de von Neumann ces dernières années, en lien notamment avec des questions de rigidité [CF17, CKE21, CDD22, CDD23].

Structure et rigidité d’algèbres de von Neumann de groupes. Un groupe dénombrable Γ est W^* -superrigide si pour tout groupe dénombrable Λ , si les algèbres de von Neumann $L(\Gamma)$ et $L(\Lambda)$ sont isomorphes, alors Γ et Λ sont isomorphes. Les premiers exemples de groupes W^* -superrigides ont été construits par Ioana–Popa–Vaes [IPV13] en utilisant des constructions de produits en couronne. D’autres exemples ont été donnés par la suite, certains utilisant des constructions par produits amalgamés [CI18]. Récemment, Chifan–Ioana–Osin–Sun ont donné les premiers exemples de groupes W^* -superrigides ayant la propriété (T) de Kazhdan [CIOS] – mentionnons qu’une célèbre conjecture de Connes [Con82] suggère que tous les groupes dénombrables ayant la propriété (T) devraient être W^* -superrigides.

Certains des groupes étudiés dans ce mémoire (groupes modulaires de surfaces et de corps en anses, $\text{Out}(F_N)$, groupes d’Artin–Tits) sont-ils W^* -superrigides ? Dans le cas des groupes d’Artin–Tits, nous pourrions espérer exploiter leurs nombreuses décompositions en produits amalgamés. Par ailleurs, beaucoup de questions structurelles concernant les algèbres de von Neumann de ces groupes (et de leurs actions) se posent, comme leur primalité (i.e. leur indécomposabilité en un produit tensoriel de deux algèbres de von Neumann de dimension infinie) ou le calcul de leur groupe de symétries, par exemple.

Bibliographie

- [ABFG21] M. Abért, N. Bergeron, M. Frączyk, et D. Gaboriau. On homology torsion growth. *arXiv :2106.13051*, 2021. Accepté dans *J. Eur. Math. Soc.*
- [AB08] P. Abramenko et K.S. Brown. *Buildings*, volume 248 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. Theory and applications.
- [Ada94a] S. Adams. Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups. *Topology*, 33(4) :765–783, 1994.
- [Ada94b] S. Adams. Indecomposability of equivalence relations generated by word hyperbolic groups. *Topology*, 33(4) :785–798, 1994.
- [Ada96] S. Adams. Reduction of cocycles with hyperbolic targets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(6) :1111–1145, 1996.
- [AD02] C. Anantharaman-Delaroche. Amenability and exactness for dynamical systems and their C^* -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(10) :4153–4178, 2002.
- [Ago13] I. Agol. The virtual Haken conjecture. *Doc. Math.*, 18 :1045–1087, 2013.
- [AK11] Y. Algom-Kfir. Strongly contracting geodesics in outer space. *Geom. Topol.*, 15(4) :2181–2233, 2011.
- [AKP17] Y. Algom-Kfir et C. Pfaff. Normalizers and centralizers of cyclic subgroups generated by lone axis fully irreducible outer automorphisms. *New York J. Math.*, 23 :365–381, 2017.
- [ADR00] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault. *Amenable groupoids*, volume 36 de *Monographies de L’Enseignement Mathématique* 2000
- [And65] S. Andreadakis. On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 15 :239–268, 1965.
- [AM22] N. Andrew et A. Martino. Centralisers of linear growth automorphisms of free groups. *arXiv :2205.12865*, 2022.
- [Aus16a] T. Austin. Behaviour of entropy under bounded and integrable orbit equivalence. *Geom. Funct. Anal.*, 26(6) :1483–1525, 2016.
- [Aus16b] T. Austin. Integrable measure equivalence for groups of polynomial growth. *Groups Geom. Dyn.*, 10(1) :117–154, 2016.
- [BCFS22] U. Bader, P.-E. Caprace, A. Furman et A. Sisto. Hyperbolic actions of higher-rank lattices come from rank-one factors. *arXiv :2206.06431*, 2022.
- [BF14a] U. Bader et A. Furman. Boundaries, rigidity of representations, and Lyapunov exponents. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III*, pages 71–96. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
- [BF] U. Bader et A. Furman. Superrigidity via Weyl groups : hyperbolic-like targets. En cours de préparation.
- [BFS13] U. Bader, A. Furman, et R. Sauer. Integrable measure equivalence and rigidity of hyperbolic lattices. *Invent. Math.*, 194(2) :313–379, 2013.
- [BFS20] U. Bader, A. Furman, et R. Sauer. Lattice envelopes. *Duke Math. J.*, 169(2) :213–278, 2020.
- [BB19a] A. Bartels et M. Bestvina. The Farrell-Jones conjecture for mapping class groups. *Invent. Math.*, 215(2) :651–712, 2019.
- [BB10] L. Bartholdi et O. Bogopolski. On abstract commensurators of groups. *J. Group Theory*, 13(6) :903–922, 2010.
- [BL01] H. Bass et A. Lubotzky. *Tree lattices*, volume 176 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [BHS17a] J. Behrstock, M.F. Hagen, et A. Sisto. Hierarchically hyperbolic spaces, I : Curve complexes for cubical groups. *Geom. Topol.*, 21(3) :1731–1804, 2017.
- [BHS17b] J. Behrstock, M.F. Hagen, et A. Sisto. Thickness, relative hyperbolicity, and randomness in Coxeter groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(2) :705–740, 2017.

- [BHS19] J. Behrstock, M. Hagen, et A. Sisto. Hierarchically hyperbolic spaces II : Combination theorems and the distance formula. *Pacific J. Math.*, 299(2) :257–338, 2019.
- [BKMM12] J. Behrstock, B. Kleiner, Y. Minsky, et L. Mosher. Geometry and rigidity of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 16(2) :781–888, 2012.
- [BN08] J.A. Behrstock et W.D. Neumann. Quasi-isometric classification of graph manifold groups. *Duke Math. J.*, 141(2) :217–240, 2008.
- [Bel68] R.M. Belinskaja. Partitionings of a Lebesgue space into trajectories which may be defined by ergodic automorphisms. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 2(3) :4–16, 1968.
- [BF08] G.C. Bell et K. Fujiwara. The asymptotic dimension of a curve graph is finite. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 77(1) :33–50, 2008.
- [Bes02] M. Bestvina. The topology of $\text{Out}(F_n)$. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 373–384. Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [BB97] M. Bestvina et N. Brady. Morse theory and finiteness properties of groups. *Invent. Math.*, 129(3) :445–470, 1997.
- [BB19b] M. Bestvina et K. Bromberg. On the asymptotic dimension of the curve complex. *Geom. Topol.*, 23(5) :2227–2276, 2019.
- [BBF15] M. Bestvina, K. Bromberg, et K. Fujiwara. Constructing group actions on quasitrees and applications to mapping class groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 122 :1–64, 2015.
- [BBF16] M. Bestvina, K. Bromberg, et K. Fujiwara. Stable commutator length on mapping class groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 66(3) :871–898, 2016.
- [BCH21] M. Bestvina, J. Chaika, et S. Hensel. Connectivity of the Gromov Boundary of the Free Factor Complex. *arXiv :2105.01537*, 2021.
- [BF92a] M. Bestvina et M. Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. *J. Differential Geom.*, 35(1) :85–101, 1992.
- [BF92b] M. Bestvina et M. Feighn. Outer limits. *preprint*, 1992.
- [BF95] M. Bestvina et M. Feighn. Stable actions of groups on real trees. *Invent. Math.*, 121(2) :287–321, 1995.
- [BF10] M. Bestvina et M. Feighn. A hyperbolic $\text{Out}(F_n)$ -complex. *Groups Geom. Dyn.*, 4(1) :31–58, 2010.
- [BF14b] M. Bestvina et M. Feighn. Hyperbolicity of the complex of free factors. *Adv. Math.*, 256 :104–155, 2014.
- [BF14c] M. Bestvina et M. Feighn. Subfactor projections. *J. Topol.*, 7(3) :771–804, 2014.
- [BFH97] M. Bestvina, M. Feighn, et M. Handel. Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 7(2) :215–244, 1997.
- [BFH00] M. Bestvina, M. Feighn, et M. Handel. The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$. I. Dynamics of exponentially-growing automorphisms. *Ann. of Math. (2)*, 151(2) :517–623, 2000.
- [BFH04] M. Bestvina, M. Feighn, et M. Handel. Solvable subgroups of $\text{Out}(F_n)$ are virtually Abelian. *Geom. Dedicata*, 104 :71–96, 2004.
- [BFH05] M. Bestvina, M. Feighn, et M. Handel. The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$. II. A Kolchin type theorem. *Ann. of Math. (2)*, 161(1) :1–59, 2005.
- [BF02] M. Bestvina and K. Fujiwara. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 6 :69–89, 2002.
- [BGH22] M. Bestvina, V. Guirardel, et C. Horbez. Boundary amenability of $\text{Out}(F_N)$. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 55(5) :1379–1431, 2022.
- [BH92] M. Bestvina et M. Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 135(1) :1–51, 1992.

- [BH19] M. Bestvina et C. Horbez. A compactification of outer space which is an absolute retract. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 69(6) :2395–2437, 2019.
- [BHW20] M. Bestvina, C. Horbez, et R.D. Wade. On the topological dimension of the Gromov boundaries of some hyperbolic $\text{Out}(F_N)$ -graphs. *Pacific J. Math.*, 308(1) :1–40, 2020.
- [BR15] M. Bestvina and P. Reynolds. The boundary of the complex of free factors. *Duke Math. J.*, 164(11) :2213–2251, 2015.
- [Bon88] F. Bonahon. The geometry of Teichmüller space via geodesic currents. *Invent. Math.*, 92(1) :139–162, 1988.
- [Bon91] F. Bonahon. Geodesic currents on negatively curved groups. In *Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988)*, volume 19 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 143–168. Springer, New York, 1991.
- [Bor66] A. Borel. Density and maximality of arithmetic subgroups. *J. Reine Angew. Math.*, 224 :78–89, 1966.
- [BX20] J. Bounds et X. Xie. Quasi-isometric rigidity of a class of right-angled Coxeter groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(2) :553–568, 2020.
- [BIP21] R. Boutonnet, A. Ioana, et J. Peterson. Properly proximal groups and their von Neumann algebras. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 54(2) :445–482, 2021.
- [Bow98] B.H. Bowditch. Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups. *Acta Math.*, 180(2) :145–186, 1998.
- [Bow11] L. Bowen. Stable orbit equivalence of Bernoulli shifts over free groups. *Groups Geom. Dyn.*, 5(1) :17–38, 2011.
- [BH99] M.R. Bridson et A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BTW07] M.R. Bridson, M. Tweeddale, et H. Wilton. Limit groups, positive-genus towers and measure-equivalence. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(3) :703–712, 2007.
- [BV95] M.R. Bridson et K. Vogtmann. On the geometry of the automorphism group of a free group. *Bull. London Math. Soc.*, 27(6) :544–552, 1995.
- [BV00] M.R. Bridson et K. Vogtmann. Automorphisms of automorphism groups of free groups. *J. Algebra*, 229(2) :785–792, 2000.
- [BV01] M.R. Bridson et K. Vogtmann. The symmetries of outer space. *Duke Math. J.*, 106(2) :391–409, 2001.
- [BV12] M.R. Bridson et K. Vogtmann. The Dehn functions of $\text{Out}(F_n)$ and $\text{Aut}(F_n)$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 62(5) :1811–1817, 2012.
- [BW11] M.R. Bridson et R.D. Wade. Actions of higher-rank lattices on free groups. *Compos. Math.*, 147(5) :1573–1580, 2011.
- [BW22] M.R. Bridson et R.D. Wade. Direct products of free groups in $\text{Aut}(F_N)$. *arXiv :2209.01123*, 2022.
- [BW23] M.R. Bridson et R.D. Wade. Commensurations of $\text{Aut}(F_N)$ and its Torelli subgroup. *arXiv :2306.13437*, 2023.
- [Bri00] P. Brinkmann. Hyperbolic automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 10(5) :1071–1089, 2000.
- [BCGNW09] J. Brodzki, S. J. Campbell, E. Guentner, G. A. Niblo, et N. J. Wright. Property A and $\text{CAT}(0)$ cube complexes. *J. Funct. Anal.*, 256(5) :1408–1431, 2009.
- [BG20] B. Brück et R. Gupta. Homotopy type of the complex of free factors of a free group. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 121(6) :1737–1765, 2020.
- [BM00] M. Burger et S. Mozes. Lattices in product of trees. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (92) :151–194 (2001), 2000.
- [BKW13] K.-U. Bux, R. Köhl, et S. Witzel. Higher finiteness properties of reductive arithmetic groups in positive characteristic : the rank theorem. *Ann. of Math. (2)*, 177(1) :311–366, 2013.

- [CN05] S. Campbell et G.A. Niblo. Hilbert space compression and exactness of discrete groups. *J. Funct. Anal.*, 222(2) :292–305, 2005.
- [CCMT15] P.-E. Caprace, Y. Cornulier, N. Monod, et R. Tessera. Amenable hyperbolic groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(11) :2903–2947, 2015.
- [CM09] P.-E. Caprace et N. Monod. Isometry groups of non-positively curved spaces : discrete subgroups. *J. Topol.*, 2(4) :701–746, 2009.
- [CR16] P.-E. Caprace et B. Rémy. Simplicity of twin tree lattices with non-trivial commutation relations. In *Topology and geometric group theory*, volume 184 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 143–151. Springer, 2016.
- [CS11] P.-E. Caprace et M. Sageev. Rank rigidity for CAT(0) cube complexes. *Geom. Funct. Anal.*, 21(4) :851–891, 2011.
- [CF17] M. Caspers et P. Fima. Graph products of operator algebras. *J. Noncommut. Geom.*, 11(1) :367–411, 2017.
- [CCV07] R. Charney, J. Crisp et K. Vogtmann. Automorphisms of 2-dimensional right-angled Artin groups. *Geom. Topol.*, 11 :2227–2264, 2007.
- [CD95] R. Charney et M.W. Davis. The $K(\pi, 1)$ -problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(3) :597–627, 1995.
- [CV09] R. Charney et K. Vogtmann. Finiteness properties of automorphism groups of right-angled Artin groups. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(1) :94–102, 2009.
- [Che00] V. Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Adv. in Appl. Math.*, 24(2) :125–179, 2000.
- [CDD22] I. Chifan, M. Davis, et D. Drimbe. Rigidity for von Neumann algebras of graph product groups. I. Structure of automorphisms. *arXiv :2209.12996*, 2022.
- [CDD23] I. Chifan, M. Davis, et D. Drimbe. Rigidity for von Neumann algebras of graph product groups. II. Superrigidity results. *arXiv :2304.05500*, 2023.
- [CI18] I. Chifan et A. Ioana. Amalgamated free product rigidity for group von Neumann algebras. *Adv. Math.*, 329 :819–850, 2018.
- [CIK15] I. Chifan, A. Ioana, et Y. Kida. W^* -superrigidity for arbitrary actions of central quotients of braid groups. *Math. Ann.*, 361(3-4) :563–582, 2015.
- [CIOS] I. Chifan, A. Ioana, D. Osin, et B. Sun. Wreath-like products of groups and their von Neumann algebras I : W^* -superrigidity. *arXiv :2111.04708*. Accepté dans *Ann. of Math.* (2).
- [CKE21] I. Chifan et S. Kunnawalkam Elayavalli. Cartan subalgebras in von Neumann algebras associated with graph product groups. *arXiv :2107.04710*, 2021. Accepté dans *Groups Geom. Dyn.*
- [CU20] M. Clay et C. Uyanik. Atoroidal dynamics of subgroups of $\text{Out}(F_N)$. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 102(2) :818–845, 2020.
- [CL95] M.M. Cohen et M. Lustig. Very small group actions on \mathbf{R} -trees and Dehn twist automorphisms. *Topology*, 34(3) :575–617, 1995.
- [Con82] A. Connes. Classification des facteurs. In *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*, volume 38 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 43–109. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.
- [CJ82] A. Connes et V. Jones. A II_1 factor with two nonconjugate Cartan subalgebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(2) :211–212, 1982.
- [CHL07] T. Coulbois, A. Hilion, et M. Lustig. Non-unique ergodicity, observers’ topology and the dual algebraic lamination for \mathbb{R} -trees. *Illinois J. Math.*, 51(3) :897–911, 2007.
- [CHL08a] T. Coulbois, A. Hilion, et M. Lustig. \mathbb{R} -trees and laminations for free groups. I. Algebraic laminations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3) :723–736, 2008.
- [CHL08b] T. Coulbois, A. Hilion, et M. Lustig. \mathbb{R} -trees and laminations for free groups. II. The dual lamination of an \mathbb{R} -tree. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3) :737–754, 2008.

- [CHR15] T. Coulbois, A. Hilion, et P. Reynolds. Indecomposable F_N -trees and minimal laminations. *Groups Geom. Dyn.*, 9(2) :567–597, 2015.
- [Cri05] J. Crisp. Automorphisms and abstract commensurators of 2-dimensional Artin groups. *Geom. Topol.*, 9 :1381–1441, 2005.
- [CV86] M. Culler et K. Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1) :91–119, 1986.
- [DGO17] F. Dahmani, V. Guirardel, et D. Osin. Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 245(1156) :v+152, 2017.
- [DT17a] P. Dani et A. Thomas. Bowditch’s JSJ tree and the quasi-isometry classification of certain Coxeter groups. *J. Topol.*, 10(4) :1066–1106, 2017.
- [Dav98] M.W. Davis. Buildings are CAT(0). In *Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994)*, volume 252 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 108–123, Cambridge, 1998. Cambridge Univ. Press.
- [DKLMT22] T. Delabie, J. Koivisto, F. Le Maître, et R. Tessera. Quantitative measure equivalence between amenable groups. *Ann. H. Lebesgue*, 5 :1417–1487, 2022.
- [dIST19] M. de la Salle et R. Tessera. Characterizing a vertex-transitive graph by a large ball. *J. Topol.*, 12(3) :705–743, 2019.
- [Din22] C. Ding. First ℓ^2 -Betti numbers and proper proximality. *arXiv :2211.05951*, 2022.
- [DKE21] C. Ding et S. Kunnawalkam Elayavalli. Proper proximality for various families of groups. *arXiv :2107.02917*, 2021. Accepté dans *Groups Geom. Dyn.*
- [DT17b] S. Dowdall et S.J. Taylor. The co-surface graph and the geometry of hyperbolic free group extensions. *J. Topol.*, 10(2) :447–482, 2017.
- [Dro87] C. Droms. Isomorphisms of graph groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(3) :407–408, 1987.
- [Duc18] B. Duchesne. Groups acting on spaces of non-positive curvature. In *Handbook of group actions. Vol. III*, volume 40 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 101–141. Int. Press, Somerville, MA, 2018.
- [DS99] M. J. Dunwoody et M. E. Sageev. JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. *Invent. Math.*, 135(1) :25–44, 1999.
- [DHS17] M.G. Durham, M.F. Hagen, et A. Sisto. Boundaries and automorphisms of hierarchically hyperbolic spaces. *Geom. Topol.*, 21(6) :3659–3758, 2017.
- [Dye59] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformations. I. *Amer. J. Math.*, 81 :119–159, 1959.
- [Dye63] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformations. II. *Amer. J. Math.*, 85 :551–576, 1963.
- [EH] A. Escalier et C. Horbez. Graph products and measure equivalence : classification, rigidity, and quantitative aspects. *En cours de préparation*.
- [Esk98] A. Eskin. Quasi-isometric rigidity of nonuniform lattices in higher rank symmetric spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(2) :321–361, 1998.
- [EF97] A. Eskin et B. Farb. Quasi-flats and rigidity in higher rank symmetric spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(3) :653–692, 1997.
- [FH07] B. Farb et M. Handel. Commensurations of $\text{Out}(F_n)$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :1–48, 2007.
- [FM98] B. Farb et H. Masur. Superrigidity and mapping class groups. *Topology*, 37(6) :1169–1176, 1998.
- [FM12] B. Farb et D. Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [FJ93] F.T. Farrell et L.E. Jones. Isomorphism conjectures in algebraic K -theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(2) :249–297, 1993.

- [FLP79] M. Fathi, F. Laudenbach et V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, volume 66 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay, With an English summary.
- [FM77] J. Feldman and C.C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2) :289–324, 1977.
- [FSZ89] J. Feldman, C. E. Sutherland, et R. J. Zimmer. Subrelations of ergodic equivalence relations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(2) :239–269, 1989.
- [Fer18] T. Fernós. The Furstenberg-Poisson boundary and CAT(0) cube complexes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 38(6) :2180–2223, 2018.
- [FLM18] T. Fernós, J. Lécureux, et F. Mathéus. Random walks and boundaries of CAT(0) cubical complexes. *Comment. Math. Helv.*, 93(2) :291–333, 2018.
- [FH06] D. Fisher et T. Hitchman. Cocycle superrigidity and harmonic maps with infinite-dimensional targets. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 72405, 19, 2006.
- [FFW22] F. Fournier-Facio et R.D. Wade. Aut-invariant quasimorphisms on groups. *arXiv :2211.00800*, 2022. Accepté dans *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [FMS21] S. Francaviglia, A. Martino, et D. Syrigos. On the action of relatively irreducible automorphisms on their train tracks. *arXiv :2108.01680*, 2021.
- [Fuj02] K. Fujiwara. On the outer automorphism group of a hyperbolic group. *Israel J. Math.*, 131 :277–284, 2002.
- [FP06] K. Fujiwara et P. Papasoglu. JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups. *Geom. Funct. Anal.*, 16(1) :70–125, 2006.
- [Fur99a] A. Furman. Gromov’s measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Ann. of Math. (2)*, 150(3) :1059–1081, 1999.
- [Fur99b] A. Furman. Orbit equivalence rigidity. *Ann. of Math. (2)*, 150(3) :1083–1108, 1999.
- [Fur01] A. Furman. Mostow-Margulis rigidity with locally compact targets. *Geom. Funct. Anal.*, 11(1) :30–59, 2001.
- [Fur11] A. Furman. A survey of measured group theory. In *Geometry, rigidity, and group actions*, Chicago Lectures in Math., pages 296–374. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 2011.
- [Fur63] H. Furstenberg. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 77 :335–386, 1963.
- [Gab09] D. Gabai. Almost filling laminations and the connectivity of ending lamination space. *Geom. Topol.*, 13(2) :1017–1041, 2009.
- [Gab00] D. Gaboriau. Coût des relations d’équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, 139(1) :41–98, 2000.
- [Gab02] D. Gaboriau. Invariants l^2 de relations d’équivalence et de groupes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (95) :93–150, 2002.
- [Gab05b] D. Gaboriau. Examples of groups that are measure equivalent to the free group. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(6) :1809–1827, 2005.
- [Gab10] D. Gaboriau. Orbit equivalence and measured group theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, pages 1501–1527. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
- [GGH22] D. Gaboriau, Y. Guerch, et C. Horbez. On the homology growth and the l^2 -Betti numbers of $\text{Out}(W_n)$. *arXiv :2209.02760*, 2022.
- [GL95] D. Gaboriau et G. Levitt. The rank of actions on \mathbf{R} -trees. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(5) :549–570, 1995.
- [GLP94] D. Gaboriau, G. Levitt, et F. Paulin. Pseudogroups of isometries of \mathbf{R} and Rips’ theorem on free actions on \mathbf{R} -trees. *Israel J. Math.*, 87(1-3) :403–428, 1994.
- [GN21] D. Gaboriau et C. Noûs. On the top-dimensional l^2 -Betti numbers. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 30(5) :1121–1137, 2021.

- [Gan12] G. Gandini. Bounding the homological finiteness length. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 44(6) :1209–1214, 2012.
- [Gen18] A. Genevois. Automorphisms of graph products of groups and acylindrical hyperbolicity. *arXiv :1807.00622*, 2018. Accepté dans Mem. Amer. Math. Soc.
- [Gen19] A. Genevois. Negative curvature in automorphism groups of one-ended hyperbolic groups. *J. Comb. Algebra*, 3(3) :305–329, 2019.
- [GH21a] A. Genevois et C. Horbez. Acylindrical hyperbolicity of automorphism groups of infinitely ended groups. *J. Topol.*, 14(3) :963–991, 2021.
- [Gho23] P. Ghosh. Relative hyperbolicity of free-by-cyclic extensions. *Compos. Math.*, 159(1) :153–183, 2023.
- [Gre90] E.R. Green. *Graph products of groups*. PhD thesis, University of Leeds, 1990.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Gro03] M. Gromov. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1) :73–146, 2003.
- [GHW05] E. Guentner, N. Higson, et S. Weinberger. The Novikov conjecture for linear groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (101) :243–268, 2005.
- [GK02b] E. Guentner et J. Kaminker. Exactness and the Novikov conjecture. *Topology*, 41(2) :411–418, 2002.
- [GK02a] E. Guentner et J. Kaminker. Addendum to : “Exactness and the Novikov conjecture”. *Topology*, 41(2) :419–420, 2002.
- [GN11] E. Guentner et G.A. Niblo. Complexes and exactness of certain Artin groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(3) :1471–1495, 2011.
- [Gue21a] Y. Guerch. Commensurations of the outer automorphism group of a universal Coxeter group. *arXiv :2101.07101*, 2021. Accepté dans Groups. Geom. Dyn.
- [Gue21b] Y. Guerch. Currents relative to a malnormal subgroup system. *arXiv :2112.01112*, 2021. Accepté aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse : Mathématiques.
- [Gue21c] Y. Guerch. North-south type dynamics of relative atoroidal automorphisms of free groups on a relative space of currents. *arXiv :2203.04112*, 2021. Accepté dans Conform. Geom. Dyn.
- [Gue22a] Y. Guerch. Polynomial growth and subgroups of $\text{Out}(F_n)$. *arXiv :2204.02700*, 2022. Accepté aux Annales Henri Lebesgue.
- [Gue22b] Y. Guerch. Roots of outer automorphisms of free groups and centralizers of abelian subgroups of $\text{Out}(F_N)$. *arXiv :2212.07674*, 2022.
- [GHSS23] Y. Guerch, S. Hughes et L.J. Sánchez Saldaña. Centralisers and the virtually cyclic dimension of $\text{Out}(F_N)$. *arXiv :2308.01590*, 2023.
- [Gui05] V. Guirardel. Cœur et nombre d’intersection pour les actions de groupes sur les arbres. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(6) :847–888, 2005.
- [GH19] V. Guirardel et C. Horbez. Algebraic laminations for free products and arational trees. *Algebr. Geom. Topol.*, 19(5) :2283–2400, 2019.
- [GH21b] V. Guirardel et C. Horbez. Measure equivalence rigidity of $\text{Out}(F_N)$. *arXiv :2103.03696*, 2021.
- [GH22] V. Guirardel et C. Horbez. Boundaries of relative factor graphs and subgroup classification for automorphisms of free products. *Geom. Topol.*, 26(1) :71–126, 2022.
- [GHa] V. Guirardel et C. Horbez. Acylindrical hyperbolicity of the outer automorphism group of a free product. *En cours de préparation*.

- [GHb] V. Guirardel et C. Horbez. A strong Tits alternative for $\text{Out}(F_N)$. *En cours de préparation*.
- [GHL22] V. Guirardel, C. Horbez, et J. Lécureux. Cocycle superrigidity from higher rank lattices to $\text{Out}(F_N)$. *J. Mod. Dyn.*, 18 :291–344, 2022.
- [GL07a] V. Guirardel et G. Levitt. Deformation spaces of trees. *Groups Geom. Dyn.*, 1(2) :135–181, 2007.
- [GL07b] V. Guirardel et G. Levitt. The outer space of a free product. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 94(3) :695–714, 2007.
- [GL11] V. Guirardel et G. Levitt. Trees of cylinders and canonical splittings. *Geom. Topol.*, 15(2) :977–1012, 2011.
- [GL15] V. Guirardel et G. Levitt. Splittings and automorphisms of relatively hyperbolic groups. *Groups Geom. Dyn.*, 9(2) :599–663, 2015.
- [GL17] V. Guirardel et G. Levitt. JSJ decompositions of groups. *Astérisque*, (395) :vii+165, 2017.
- [Gup17] R. Gupta. Relative currents. *Conform. Geom. Dyn.*, 21 :319–352, 2017.
- [Gup18] R. Gupta. Loxodromic elements for the relative free factor complex. *Geom. Dedicata*, 196 :91–121, 2018.
- [GW19] R. Gupta and D. Wigglesworth. Loxodromics for the cyclic splitting complex and their centralizers. *Pacific J. Math.*, 301(1) :107–142, 2019.
- [GP08] M. Gutierrez et A. Piggott. Rigidity of graph products of abelian groups. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 77(2) :187–196, 2008.
- [Hae20] T. Haettel. Hyperbolic rigidity of higher rank lattices. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 53(2) :439–468, 2020.
- [HW08] F. Haglund et D.T. Wise. Special cube complexes. *Geom. Funct. Anal.*, 17(5) :1551–1620, 2008.
- [Ham07] U. Hamenstädt. Geometry of the mapping class groups III : Quasi-isometric rigidity. *arXiv :math/0512429*, 2007.
- [Ham09] U. Hamenstädt. Geometry of the mapping class groups. I. Boundary amenability. *Invent. Math.*, 175(3) :545–609, 2009.
- [Ham12] U. Hamenstädt. The boundary of the free splitting graph and the free factor graph. *arXiv :1211.1630*, 2012.
- [HH12] U. Hamenstädt et S. Hensel. The geometry of the handlebody groups I : distortion. *J. Topol. Anal.*, 4(1) :71–97, 2012.
- [HH15] U. Hamenstädt et S. Hensel. Spheres and projections for $\text{Out}(F_n)$. *J. Topol.*, 8(1) :65–92, 2015.
- [HH21a] U. Hamenstädt et S. Hensel. The geometry of the handlebody groups II : Dehn functions. *Michigan Math. J.*, 70(1) :23–53, 2021.
- [HM09] M. Handel et L. Mosher. Subgroup classification in $\text{Out}(f_n)$. *arXiv :0908.1255*, 2009.
- [HM13a] M. Handel et L. Mosher. The free splitting complex of a free group, I : hyperbolicity. *Geom. Topol.*, 17(3) :1581–1672, 2013.
- [HM13b] M. Handel et L. Mosher. Lipschitz retraction and distortion for subgroups of $\text{Out}(F_n)$. *Geom. Topol.*, 17(3) :1535–1579, 2013.
- [HM14] M. Handel et L. Mosher. Relative free splitting and free factor complexes I : Hyperbolicity. *arXiv :1407.3508*, 2014.
- [HM15] M. Handel et L. Mosher. Hyperbolic actions and 2nd bounded cohomology of subgroup of $\text{Out}(F_n)$. Part I. Infinite lamination subgroups. *arXiv :1511.06913*, 2015. Accepté dans Mem. Amer. Math. Soc.
- [HM17] M. Handel et L. Mosher. Hyperbolic actions and 2nd bounded cohomology of subgroup of $\text{Out}(F_n)$. Part II. Finite lamination subgroups. *arXiv :1702.08050*, 2017. Accepté dans Mem. Amer. Math. Soc.

- [HM19] M. Handel et L. Mosher. The free splitting complex of a free group, II : Loxodromic outer automorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(6) :4053–4105, 2019.
- [HM20] M. Handel et L. Mosher. Subgroup decomposition in $\text{Out}(F_n)$. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 264(1280) :vii+276, 2020.
- [HM21] M. Handel et L. Mosher. Second bounded cohomology and WWPD. *Kyoto J. Math.*, 61(4) :873–904, 2021.
- [Har86] J.L. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. *Invent. Math.*, 84(1) :157–176, 1986.
- [Har81] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, volume 97 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 245–251. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
- [HV96] A. Hatcher et K. Vogtmann. Isoperimetric inequalities for automorphism groups of free groups. *Pacific J. Math.*, 173(2) :425–441, 1996.
- [HV98] A. Hatcher et K. Vogtmann. The complex of free factors of a free group. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 49(196) :459–468, 1998.
- [HJ19] H.A. Helfgott et K. Juschenko. Soficity, short cycles, and the Higman group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(4) :2771–2795, 2019.
- [Hen18] S. Hensel. Rigidity and flexibility for handlebody groups. *Comment. Math. Helv.*, 93(2) :335–358, 2018.
- [Hen20] S. Hensel. A primer on handlebody groups. In *Handbook of group actions. V*, volume 48 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 143–177. Int. Press, Somerville, MA, 2020.
- [Hen21] S. Hensel. (Un)distorted stabilisers in the handlebody group. *J. Topol.*, 14(2) :460–487, 2021.
- [HH21b] S. Hensel et C. Horbez. Measure equivalence rigidity of the handlebody groups. *arXiv :2111.10064*, 2021.
- [HHW19] S. Hensel, C. Horbez, et R.D. Wade. Rigidity of the Torelli subgroup in $\text{Out}(F_N)$. *arXiv :1910.10189*, 2019.
- [Hig51] G. Higman. A finitely generated infinite simple group. *J. London Math. Soc.*, 26 :61–64, 1951.
- [Hig00] N. Higson. Bivariant K -theory and the Novikov conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 10(3) :563–581, 2000.
- [HR00] N. Higson and J. Roe. Amenable group actions and the Novikov conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 519 :143–153, 2000.
- [HH17] A. Hilion et C. Horbez. The hyperbolicity of the sphere complex via surgery paths. *J. Reine Angew. Math.*, 730 :135–161, 2017.
- [Hor14] C. Horbez. The Tits alternative for the automorphism group of a free product. *arXiv :1408.0546*, 2014.
- [Hor16a] C. Horbez. Hyperbolic graphs for free products, and the Gromov boundary of the graph of cyclic splittings. *J. Topol.*, 9(2) :401–450, 2016.
- [Hor16b] C. Horbez. A short proof of Handel and Mosher’s alternative for subgroups of $\text{Out}(F_N)$. *Groups Geom. Dyn.*, 10(2) :709–721, 2016.
- [Hor17] C. Horbez. The boundary of the outer space of a free product. *Israel J. Math.*, 1 :179–234, 2017.
- [HH20] C. Horbez et J. Huang. Boundary amenability and measure equivalence rigidity among two-dimensional Artin groups of hyperbolic type. *arXiv :2004.09325*, 2020.
- [HH22a] C. Horbez et J. Huang. Measure equivalence classification of transvection-free right-angled Artin groups. *J. Éc. polytech. Math.*, 9 :1021–1067, 2022.
- [HH22b] C. Horbez et J. Huang. Measure equivalence rigidity among the Higman groups. *arXiv :2206.00884*, 2022.

- [HHa] C. Horbez et J. Huang. Integrable measure equivalence rigidity of right-angled Artin groups via quasi-isometry. *En cours de préparation*.
- [HHb] C. Horbez et J. Huang. On the measure and orbit equivalence classification of right-angled Artin groups. *En cours de préparation*.
- [HHI23] C. Horbez, J. Huang, et A. Ioana. Orbit equivalence rigidity of irreducible actions of right-angled Artin groups. *Compos. Math.*, 159(4) :860–887, 2023.
- [HHL20] C. Horbez, J. Huang, et J. Lécureux. Proper proximality in non-positive curvature. *arXiv :2005.08756*, 2020. Accepté dans Amer. J. Math.
- [HJ] C. Horbez et M. Joseph. Isometric orbit equivalent actions of right-angled Artin groups. *En cours de préparation*.
- [HW20] C. Horbez and R.D. Wade. Commensurations of subgroups of $\text{Out}(F_N)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(4) :2699–2742, 2020.
- [HPV13] C. Houdayer, S. Popa, and S. Vaes. A class of groups for which every action is W^* -superrigid. *Groups Geom. Dyn.*, 7(3) :577–590, 2013.
- [Hua17] J. Huang. Quasi-isometric classification of right-angled Artin groups I : the finite out case. *Geom. Topol.*, 21(6) :3467–3537, 2017.
- [Hua18] J. Huang. Commensurability of groups quasi-isometric to RAAGs. *Invent. Math.*, 213(3) :1179–1247, 2018.
- [HK18] J. Huang et B. Kleiner. Groups quasi-isometric to right-angled Artin groups. *Duke Math. J.*, 167(3) :537–602, 2018.
- [HKS20] J. Huang, B. Kleiner, et S. Stadler. Morse Quasiflats II. *arXiv :2003.08912*, 2020.
- [HO17] J. Huang et D. Osajda. Quasi-Euclidean tilings over 2-dimension Artin groups and their applications. *arXiv :1711.00122*, 2017. Accepté dans Mem. Amer. Math. Soc.
- [Ioa11] A. Ioana. W^* -superrigidity for Bernoulli actions of property (T) groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(4) :1175–1226, 2011.
- [Ioa15] A. Ioana. Cartan subalgebras of amalgamated free product II_1 factors. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 48(1) :71–130, 2015.
- [IPV13] A. Ioana, S. Popa, et S. Vaes. A class of superrigid group von Neumann algebras. *Ann. of Math. (2)*, 178(1) :231–286, 2013.
- [IPR19] I. Ishan, J. Peterson, et L. Ruth. Von Neumann equivalence and properly proximal groups. *arXiv :1910.08682*, 2019. Accepté dans Duke Math. J.
- [Iva92] N.V. Ivanov. *Subgroups of Teichmüller modular groups*, volume 115 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [Iva97] N.V. Ivanov. Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces. *Internat. Math. Res. Notices*, (14) :651–666, 1997.
- [JS06] T. Januszkiewicz et J. Świątkowski. Simplicial nonpositive curvature. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (104) :1–85, 2006.
- [JMM07] C. Jensen, J. McCammond, et J. Meier. The Euler characteristic of the Whitehead automorphism group of a free product. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) :2577–2595, 2007.
- [Jos22] M. Joseph. Isometric orbit equivalence for probability measure-preserving actions. *arXiv :2203.14598*, 2022.
- [Kai04] V.A. Kaimanovich. Boundary amenability of hyperbolic spaces. In *Discrete geometric analysis*, volume 347 of *Contemp. Math.*, pages 83–111. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [KM96] V.A. Kaimanovich et H. Masur. The Poisson boundary of the mapping class group. *Invent. Math.*, 125(2) :221–264, 1996.
- [Kap05] I. Kapovich. The frequency space of a free group. *Internat. J. Algebra Comput.*, 15(5-6) :939–969, 2005.

- [Kap06] I. Kapovich. Currents on free groups. In *Topological and asymptotic aspects of group theory*, volume 394 of *Contemp. Math.*, pages 149–176. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [KL09] I. Kapovich et M. Lustig. Geometric intersection number and analogues of the curve complex for free groups. *Geom. Topol.*, 13(3) :1805–1833, 2009.
- [KL11] I. Kapovich et M. Lustig. Stabilizers of \mathbb{R} -trees with free isometric actions of F_N . *J. Group Theory*, 14(5) :673–694, 2011.
- [KR14] I. Kapovich et K. Rafi. On hyperbolicity of free splitting and free factor complexes. *Groups Geom. Dyn.*, 8(2) :391–414, 2014.
- [KL21] D. Kerr et H. Li. Entropy, Shannon orbit equivalence, and sparse connectivity. *Math. Ann.*, 380(3-4) :1497–1562, 2021.
- [Kid08a] Y. Kida. The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 196(916) :viii+190, 2008.
- [Kid08b] Y. Kida. Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of the mapping class group. *Geom. Dedicata*, 131 :99–109, 2008.
- [Kid10] Y. Kida. Measure equivalence rigidity of the mapping class group. *Ann. of Math. (2)*, 171(3) :1851–1901, 2010.
- [Kid11] Y. Kida. Rigidity of amalgamated free products in measure equivalence. *J. Topol.*, 4(3) :687–735, 2011.
- [KK13] S.-h. Kim et T. Koberda. Embedability between right-angled Artin groups. *Geom. Topol.*, 17(1) :493–530, 2013.
- [KK14] S.-H. Kim et T. Koberda. The geometry of the curve graph of a right-angled Artin group. *Internat. J. Algebra Comput.*, 24(2) :121–169, 2014.
- [KW99] E. Kirchberg et S. Wassermann. Permanence properties of C^* -exact groups. *Doc. Math.*, 4 :513–558, 1999.
- [Kla99] E. Klarreich. The Boundary at Infinity of th Curve Complex and the Relative Teichmüller Space. *arXiv :1803.10339*, 1999.
- [KL97] B. Kleiner et B. Leeb. Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (86) :115–197 (1998), 1997.
- [Kob88] T. Kobayashi. Heights of simple loops and pseudo-Anosov homeomorphisms. In *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 78 of *Contemp. Math.*, pages 327–338. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [KS09] M. Korkmaz et S. Schleimer. Automorphisms of the disk complex. *arXiv :0910.2038*, 2009.
- [Lau95] M.R. Laurence. A generating set for the automorphism group of a graph group. *J. London Math. Soc. (2)*, 52(2) :318–334, 1995.
- [Léc10] J. Lécureux. Amenability of actions on the boundary of a building. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (17) :3265–3302, 2010.
- [Lev83] G. Levitt. Foliations and laminations on hyperbolic surfaces. *Topology*, 22(2) :119–135, 1983.
- [Lev95] G. Levitt. On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(6) :1173–1181, 1995.
- [Lev09] G. Levitt. Counting growth types of automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 19(4) :1119–1146, 2009.
- [LP97] G. Levitt et F. Paulin. Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1) :83–102, 1997.
- [Lüc94] W. Lück. Approximating L^2 -invariants by their finite-dimensional analogues. *Geom. Funct. Anal.*, 4(4) :455–481, 1994.
- [Lüc02] W. Lück. *L^2 -invariants : theory and applications to geometry and K-theory*, volume 44 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

- [MT18] J. Maher et G. Tiozzo. Random walks on weakly hyperbolic groups. *J. Reine Angew. Math.*, 742 :187–239, 2018.
- [Man14a] B. Mann. Hyperbolicity of the cyclic splitting graph. *Geom. Dedicata*, 173 :271–280, 2014.
- [Man14b] B. Mann. *Some hyperbolic $Out(FN)$ -graphs and nonunique ergodicity of very small FN -trees*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2014. Thesis (Ph.D.)—The University of Utah.
- [Mar91] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Mar17] A. Martin. On the cubical geometry of Higman’s group. *Duke Math. J.*, 166(4) :707–738, 2017.
- [Mar21] A. Martin. Acylindrical actions on $CAT(0)$ square complexes. *Groups Geom. Dyn.*, 15(1) :335–369, 2021.
- [MP22] A. Martin et P. Przytycki. Acylindrical actions for two-dimensional Artin groups of hyperbolic type. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (17) :13099–13127, 2022.
- [MM99] H.A. Masur et Y.N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1) :103–149, 1999.
- [MM00] H. A. Masur et Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure. *Geom. Funct. Anal.*, 10(4) :902–974, 2000.
- [McC85] J. McCarthy. A “Tits-alternative” for subgroups of surface mapping class groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(2) :583–612, 1985.
- [McC17] J. McCammond. The mysterious geometry of Artin groups. *Winter Braids Lect. Notes*, 4(Winter Braids VII (Caen, 2017)) :Exp. No. 1, 30, 2017.
- [MW02] J.P. McCammond et D.T. Wise. Fans and ladders in small cancellation theory. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 84(3) :599–644, 2002.
- [MS04] N. Monod et Y. Shalom. Cocycle superrigidity and bounded cohomology for negatively curved spaces. *J. Differential Geom.*, 67(3) :395–455, 2004.
- [MS06] N. Monod et Y. Shalom. Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology. *Ann. of Math. (2)*, 164(3) :825–878, 2006.
- [Mos73] G. D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.
- [MvN36] F. J. Murray et J. von Neumann. On rings of operators. *Ann. of Math. (2)*, 37(1) :116–229, 1936.
- [MvN43] F. J. Murray et J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44 :716–808, 1943.
- [NS13] A. Nevo et M. Sageev. The Poisson boundary of $CAT(0)$ cube complex groups. *Groups Geom. Dyn.*, 7(3) :653–695, 2013.
- [Nie24] J. Nielsen. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.*, 91 :169–209, 1924.
- [NT19] H.T. Nguyen et H.C. Tran. On the coarse geometry of certain right-angled Coxeter groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 19(6) :3075–3118, 2019.
- [Now09] P.W. Nowak. Zero-in-the-spectrum conjecture on regular covers of compact manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 84(1) :213–222, 2009.
- [OW80] D.S. Ornstein et B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 2(1) :161–164, 1980.
- [OP09] D. Osajda et P. Przytycki. Boundaries of systolic groups. *Geom. Topol.*, 13(5) :2807–2880, 2009.
- [Osi16] D. Osin. Acylindrically hyperbolic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(2) :851–888, 2016.

- [Osi18] D.V. Osin. Groups acting acylindrically on hyperbolic spaces. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures*, pages 919–939. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.
- [Oya23] K. Oyakawa. Small cancellation groups are bi-exact. *arXiv :2306.06606*, 2023.
- [Oza00] N. Ozawa. Amenable actions and exactness for discrete groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(8) :691–695, 2000.
- [Oza06a] N. Ozawa. Amenable actions and applications. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 1563–1580. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [Oza06b] N. Ozawa. Boundary amenability of relatively hyperbolic groups. *Topology Appl.*, 153(14) :2624–2630, 2006.
- [OP10] N. Ozawa et S. Popa. On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra. *Ann. of Math. (2)*, 172(1) :713–749, 2010.
- [Pan14] S. Pandit. The complex of non-separating embedded spheres. *Rocky Mountain J. Math.*, 44(6) :2029–2054, 2014.
- [Pau88] F. Paulin. Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.*, 94(1) :53–80, 1988.
- [Pau89] F. Paulin. The Gromov topology on \mathbf{R} -trees. *Topology Appl.*, 32(3) :197–221, 1989.
- [Pau11] F. Paulin. Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface. Number 339, pages Exp. No. 1023, ix, 323–356. 2011. Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026.
- [PT86] V. P. Platonov et O. I. Tavgen’. On the Grothendieck problem of profinite completions of groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 288(5) :1054–1058, 1986.
- [Pop06a] S. Popa. On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants. *Ann. of Math. (2)*, 163(3) :809–899, 2006.
- [Pop06b] S. Popa. Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w -rigid groups. I. *Invent. Math.*, 165(2) :369–408, 2006.
- [Pop08] S. Popa. On the superrigidity of malleable actions with spectral gap. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(4) :981–1000, 2008.
- [PV10] S. Popa et S. Vaes. Group measure space decomposition of II_1 factors and W^* -superrigidity. *Invent. Math.*, 182(2) :371–417, 2010.
- [PV14] S. Popa et S. Vaes. Unique Cartan decomposition for II_1 factors arising from arbitrary actions of free groups. *Acta Math.*, 212(1) :141–198, 2014.
- [Pra73] G. Prasad. Strong rigidity of \mathbf{Q} -rank 1 lattices. *Invent. Math.*, 21 :255–286, 1973.
- [PS21] P. Przytycki et M. Sabok. Unicorn paths and hyperfiniteness for the mapping class group. *Forum Math. Sigma*, 9 :Paper No. e36, 10, 2021.
- [Rad03] D.G. Radcliffe. Rigidity of graph products of groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 3 :1079–1088, 2003.
- [Rém99] B. Rémy. Construction de réseaux en théorie de Kac-Moody. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(6) :475–478, 1999.
- [Ren15] J. Renault. Topological amenability is a Borel property. *Math. Scand.*, 117(1) :5–30, 2015.
- [Rey12] P. Reynolds. Reducing systems for very small trees. *arXiv :1211.3378*, 2012.
- [RS97] E. Rips et Z. Sela. Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. *Ann. of Math. (2)*, 146(1) :53–109, 1997.
- [Rod13] M. Rodenhausen. *Centralisers of polynomially growing automorphisms of free groups*. PhD thesis, Universität Bonn, 2013.
- [RW15] M. Rodenhausen et R.D. Wade. Centralisers of Dehn twist automorphisms of free groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 159(1) :89–114, 2015.
- [RS75] D. Ruelle et D. Sullivan. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology*, 14(4) :319–327, 1975.

- [Sal87] M. Salvetti. Topology of the complement of real hyperplanes in \mathbf{C}^N . *Invent. Math.*, 88(3) :603–618, 1987.
- [Sel97] Z. Sela. Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3) :561–593, 1997.
- [Ser89] H. Servatius. Automorphisms of graph groups. *J. Algebra*, 126(1) :34–60, 1989.
- [Sha00] Y. Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141(1) :1–54, 2000.
- [Sha05] Y. Shalom. Measurable group theory. In *European Congress of Mathematics*, pages 391–423. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.
- [Sin55] I. M. Singer. Automorphisms of finite factors. *Amer. J. Math.*, 77 :117–133, 1955.
- [Sol69] L. Solomon. The Steinberg character of a finite group with BN -pair. In *Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968)*, pages 213–221. Benjamin, New York, 1969.
- [SZ91] R.J. Spatzier et R.J. Zimmer. Fundamental groups of negatively curved manifolds and actions of semisimple groups. *Topology*, 30(4) :591–601, 1991.
- [Tho12] A. Thom. About the metric approximation of Higman’s group. *J. Group Theory*, 15(2) :301–310, 2012.
- [Thu97] W.P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [Tit72] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20 :250–270, 1972.
- [Tit74] J. Tits. *Buildings of spherical type and finite BN -pairs*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 386. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [Vae14] S. Vaes. Normalizers inside amalgamated free product von Neumann algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 50(4) :695–721, 2014.
- [vdL83] H. van der Lek. *The homotopy type of complex hyperplane complements*. Katholieke Universiteit te Nijmegen, 1983.
- [Vog02] K. Vogtmann. Automorphisms of free groups and outer space. In *Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000)*, volume 94, pages 1–31, 2002.
- [Vog18] K. Vogtmann. The topology and geometry of automorphism groups of free groups. In *European Congress of Mathematics*, pages 181–202. Eur. Math. Soc., Zürich, 2018.
- [vN30] J. von Neumann. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Math. Ann.*, 102(1) :370–427, 1930.
- [vS47] K.G.C. von Staudt. *Geometrie der Lage*. Nürnberg F. Korn, 1847.
- [Why99] K. Whyte. Amenability, bi-Lipschitz equivalence, and the von Neumann conjecture. *Duke Math. J.*, 99(1) :93–112, 1999.
- [Yu00] G. Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.*, 139(1) :201–240, 2000.
- [Zim78] R.J. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *J. Functional Analysis*, 27(3) :350–372, 1978.
- [Zim80] R.J. Zimmer. Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 112(3), 1980.
- [Zim91] R.J. Zimmer. Groups generating transversals to semisimple Lie group actions. *Israel J. Math.*, 73(2) :151–159, 1991.

Titre : Géométrie ergodique à l'infini de $\text{Out}(F_N)$, équivalence mesurée, rigidité

Mots clés : Automorphismes de groupes libres ; Groupes d'Artin-Tits ; Équivalence mesurée ; Algèbres de von Neumann ; Rigidité

Résumé : Le contexte général de ce travail est la théorie géométrique, ergodique et mesurée des groupes, avec des emprunts aux algèbres d'opérateurs, à la théorie des marches aléatoires, à la topologie. Les deux thèmes centraux sont la géométrie asymptotique du groupe $\text{Out}(F_N)$ des automorphismes extérieurs d'un groupe libre, et l'équivalence mesurée, analogue mesurable à la notion de quasi-isométrie.

Le théorème central du mémoire est un théorème de rigidité, obtenu avec Guirardel : pour tout $N \geq 3$, tout groupe dénombrable qui est mesurablement équivalent à $\text{Out}(F_N)$, lui est virtuellement isomorphe.

Les premiers chapitres mettent en place les outils géométriques qui entrent dans sa démonstration, et notamment l'action de $\text{Out}(F_N)$ sur des espaces à courbure négative. Nous présentons au passage d'autres théorèmes obtenus sur $\text{Out}(F_N)$: classification de ses sous-groupes, moyennabilité à l'infini, rigidité de commensurateur.

Nous présentons ensuite le théorème de rigidité de $\text{Out}(F_N)$ en équivalence mesurée, et ses analogues dans d'autres cadres : pour les groupes d'Artin-Tits, les groupes modulaires de corps en anses, les groupes de Higman. Nous étudions aussi les groupes d'Artin-Tits à angles droits du point de vue de l'équivalence mesurée. Le mémoire se clôt sur quelques applications en théorie des algèbres d'opérateurs.

Title : Ergodic geometry at infinity of $\text{Out}(F_N)$, measure equivalence, rigidity

Keywords : Automorphisms of free groups ; Artin-Tits groups ; Measure equivalence ; von Neumann algebras ; Rigidity

Abstract : The general context of this work is geometric, ergodic and measured group theory, with some insights from operator algebras, random walks, or topology. The main themes are the asymptotic geometry of $\text{Out}(F_N)$, the outer automorphism group of a free group, and measure equivalence, a measurable analogue to quasi-isometry,

The main theorem is a rigidity theorem obtained with Guirardel: for every $N \geq 3$, every countable group which is measure equivalent to $\text{Out}(F_N)$, is in fact virtually isomorphic to $\text{Out}(F_N)$.

In the first chapters, we present the geometric tools used in the proof, in particular the action of $\text{Out}(F_N)$ on negatively curved spaces. We also present other theorems regarding $\text{Out}(F_N)$: subgroup classification theorems, boundary amenability, commensurator rigidity.

We then present the measure equivalence rigidity theorem for $\text{Out}(F_N)$, and its analogues in other settings: for Artin-Tits groups, handlebody groups, Higman groups. We also study right-angled Artin-Tits groups from the viewpoint of measure equivalence. Finally, we present some applications in the theory of operator algebras.