L'espace des sous-groupes d'un groupe de Baumslag-Solitar

Yves Stalder
(Université Clermont Auvergne)

Travail commun avec :
A. Carderi, D. Gaboriau, F. Le Maître

I Introduction

Γ - groupe dénombrable

$$\mathrm{Sub}(\Gamma) = \{ \Lambda : \Lambda \leq \Gamma \} \subseteq \{0,1\}^{\Gamma}$$

a) Cantor - Bendixson

$$X^{(0)} := \mathrm{Sub}(\Gamma)$$

$$X^{(\alpha+1)} := X^{(\alpha)} \setminus \{ \text{pts isolés de } X^{(\alpha)} \}$$

$$X^{(\alpha)} := \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} \quad \text{si } \alpha \text{ ordinal limite}$$

donne $\mathrm{Sub}(\Gamma) = \underbrace{K(\Gamma)}_{\text{coeur parfait}} \sqcup \mathcal{U}(\Gamma)$ et $rg_{CB}(\Gamma)$

plus grand fermé sans pt isolé

b) Dynamique $\qquad \mathrm{Sub}(\Gamma) \curvearrowleft \Gamma, \quad (\Lambda, \gamma) \longmapsto \gamma^{-1} \Lambda \gamma$

$\rightsquigarrow \mathcal{K}(\Gamma) \curvearrowleft \Gamma$ avec $\mathcal{K}(\Gamma)$ vide ou Cantor

<u>Déf</u> une action $X \curvearrowleft \Gamma$ par homéos est topologiquement transitive si

$\forall\, U_1, U_2$ ouverts non vides

$\exists\, \gamma \in \Gamma$ t.q $U_2 \cap (U_1 \cdot \gamma) \neq \emptyset$

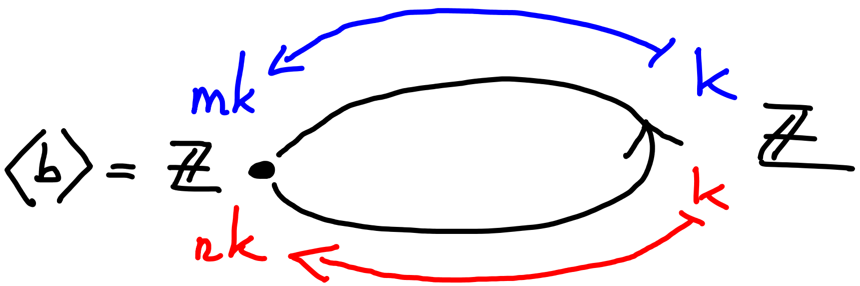
Peut-on trouver des « pièces » topo transitives ?

c) Groupes de Baumslag-Solitar

$$\mathrm{BS}(m,n) := \langle t, b \mid t b^{m} = b^{n} t \rangle$$

$$\mathrm{BS}(m,n) = \mathrm{HNN}(\underbrace{\mathbb{Z}}_{\langle b\rangle}, \underbrace{n\mathbb{Z}}_{\langle b^n\rangle}, \underbrace{m\mathbb{Z}}_{\langle b^m\rangle}, \vartheta : nk \longmapsto mk)$$

$= \pi_1 \Big($



$\Big)$

II Résultats (CGLMS)

Soit $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$; $\Gamma := BS(m,n)$

Thm A $K(\Gamma) = \mathcal{L} := \{ \Lambda \leq \Gamma : \Lambda \backslash \Gamma / \langle b \rangle \text{ infini} \}$

Rem : $\Lambda \backslash \Gamma / \langle b \rangle$ infini $\Longleftrightarrow$ graphe de Bass-Serre infini

Prop A' • Si $|m| \neq |n|$, $\mathcal{L} = \{ \Lambda \leq \Gamma \text{ d'indice } \infty \}$

• Si $|m| = |n|$, on regarde $\pi : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma / \langle b^m \rangle$

$\mathcal{L} = \{ \Lambda \leq \Gamma : \pi(\Lambda) \text{ d'indice } \infty \text{ dans } \Gamma / \langle b^m \rangle \}$

<u>Prop B'</u> Il existe $\mathrm{Ph} : \mathrm{Sub}(\Gamma) \twoheadrightarrow Q_{m,n} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$

- Γ-invariante, avec $Q_{m,n}$ infini
- tq $\mathrm{Ph}^{-1}(q)$ ouvert si $q < \infty$ (fermé ssi $|m| = |n|$)
- tq $\mathrm{Ph}^{-1}(q)$ fermé si $q = \infty$ (pas ouvert)

$\rightsquigarrow$ Partition Γ-invariante $\quad K(\Gamma) = \bigsqcup_{q \in Q_{m,n}} K_q(\Gamma)$

<u>Thm B</u> Pour tout phénotype q (ie tout $q \in Q_{m,n}$)
$K_q(\Gamma) \curvearrowleft \Gamma$ est topo transitive

III Graphes de Schreier et de Bass-Serre

a) Actions transitives pointées

Γ groupe dénombrable

$X \curvearrowleft^{\alpha} \Gamma$ transitive, $v \in X$

$$(\alpha, v) \rightsquigarrow \mathrm{Stab}_\alpha(v)$$

$$(\Lambda\backslash\Gamma \curvearrowleft \Gamma, \Lambda) \leftarrow\!\!\!\sim \Lambda$$

Donc $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ "$=$" $\{[\alpha, v]$ classes d'actions transitives pointées $\}$

Rem $\underset{\text{action sur Sub}(\Gamma)}{[\alpha, v] \cdot \gamma} = \underset{\text{action } \alpha}{[\alpha, v \cdot \gamma]}$ car $\mathrm{Stab}_\alpha(v \cdot \gamma) = \gamma^{-1} \mathrm{Stab}_\alpha(v) \gamma$

Déf $S \subseteq \Gamma$; $[\alpha, v] \in \mathrm{Sub}(\Gamma)$ où $X \curvearrowright^{\alpha} \Gamma$

* Graphe de Schreier $\mathrm{Sch}_S(\alpha)$: · ens sommets $= X$

· arêtes étiquetées positives $\overset{x}{\bullet} \xrightarrow{\ s\ } \overset{x\cdot\alpha(s)}{\bullet}$ pour $\begin{cases} s \in S \\ x \in X = \mathrm{dom}(\alpha(s)) \end{cases}$

* Boules $B_S(\alpha, v, R)$: boules $B(v, R)$ dans $\mathrm{Sch}_S(\alpha)$

Exercice Si $\Gamma = \langle S \rangle$ avec S fini, les

$$\mathcal{N}([\alpha, v], R) := \left\{ [\alpha', v'] \ : \ B_S(\alpha, v, R) \cong B_S(\alpha', v', R) \right\}$$

forment une base de voisinages clouverts de $[\alpha, v]$.

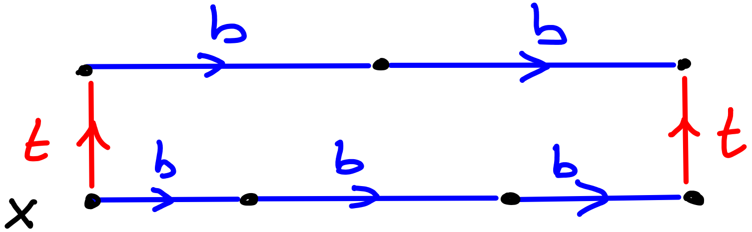
b) Préactions de $BS(m,n) =: \Gamma$

Déf Une préaction sur X est un couple $(\overset{\alpha(b)}{\beta}, \overset{\alpha(t)}{\tau})$ où

- β bijection de X
- τ bijection partielle de X
- tq $\tau \beta^m = \beta^n \tau$ comme bij partielles

Elle est
- transitive si $Sch(\beta, \tau)$ est connexe.
- saturée si τ est bij de X.

NB :



cellule de base de $Sch(\beta, \tau)$ [si $m=2$, $n=3$, $x \in dom(\tau)$]

c) Graphes de Bass-Serre $\quad \alpha$ préaction de Γ sur X

$BS(\alpha)$ est le graphe orienté étiqueté suivant :

- $V := X / \langle \alpha(b) \rangle$ (un sommet est une b-orbite)

- $E^+ := \{$ cl d'arêtes $\uparrow t$ « parallèles » $\}$

$$E^+ = \mathrm{dom}(\alpha(t)) / \langle \alpha(b^n) \rangle \cong \mathrm{im}(\alpha(t)) / \langle \alpha(b^m) \rangle$$

- $$L(V \sqcup E^+) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$$

$$x \longmapsto \text{cardinal de l'orbite}$$

Propriétés : ① Equation de transfert

$$(\mathrm{TR}) \quad \forall e \in E^+, \quad \frac{L(s(e))}{L(s(e)) \wedge n} = L(e) = \frac{L(t(e))}{L(t(e)) \wedge m}$$

② Degrés entrants et sortants

$$\forall v \in V \quad \begin{array}{l} \deg_{out}(v) \leqslant L(v) \wedge n \\ \deg_{in}(v) \leqslant L(v) \wedge m \end{array}$$

<u>Def</u>. G est un (m,n)-graphe si ① et ②

- saturé si égalités dans ②

Rem : α action $\Longleftrightarrow$ préaction α saturée

$\Updownarrow$

$BS(\alpha)$ est saturé

<u>Proposition</u> Soit α_0 une préaction transitive de Γ

① $\exists\ \mathcal{G}$ (m,n)-graphe connexe saturé tq $BS(\alpha_0) \subseteq \mathcal{G}$

② Pour tout tel $\mathcal{G}$, $\exists$ action α tq

- α étend α_0 (ens sous-jacent plus grand)
- $BS(\alpha) = \mathcal{G}$

IV Idées pour thm A (cœur parfait)

$m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ $\Gamma = BS(m,n)$

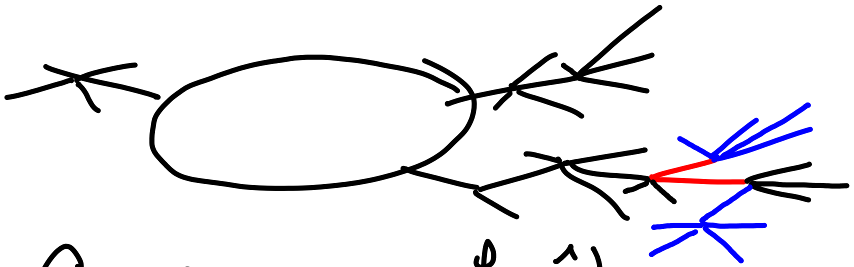
$\mathcal{L} = \{ [\alpha, v] \in \mathrm{Sub}(\Gamma) : BS(\alpha) \text{ infini} \}$

* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$ Soit $[\alpha, v]$ avec $BS(\alpha)$ infini
  soit $R > 0$ grand

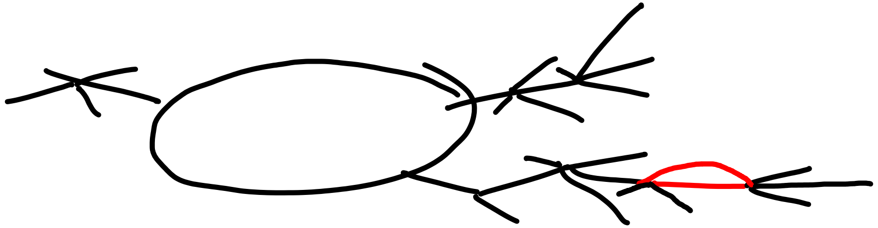
① α_0 préaction sur réunion des b-orbites des pts de $B(\alpha, v, R+1)$

$\rightsquigarrow BS(\alpha_0)$ fini, $\subset BS(\alpha)$

② Saturer $BS(\alpha_0)$ de deux façons



$\mathcal{G}_1$ avec une forêt
(avec degrés max possibles)



$\mathcal{G}_2$ avec un circuit en plus
(utilise $|m| \geq 2$, $|n| \geq 2$)

③ Prop donne extensions α_1, α_2 de α_0 et

- $[\alpha_i, v] \in \mathcal{N}([\alpha, v], R)$ $(i = 1, 2)$
- $BS(\alpha_i)$ est infini $(i = 1, 2)$
- $[\alpha_1, v] \neq [\alpha_2, v]$

Donc $\mathcal{N}([\alpha, v], R) \cap \mathcal{L} \setminus \{[\alpha, v]\} \neq \emptyset$

donc $\mathcal{L}$ est sans point isolé.

donc $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$

* $\mathcal{K}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}$ Si $[\alpha, v] \notin \mathcal{L}$ (ie $BS(\alpha)$ fini)

$\exists$ voisinage de $[\alpha, v]$ où les $BS(\alpha')$ sont tous quotients de $BS(\alpha)$

$\rightsquigarrow$ voisinage dénombrable

$\rightsquigarrow [\alpha, v] \notin \mathcal{K}(\Gamma)$

V Phénotype

$m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Pour $k \geq 1$, p premier

$|k|_p :=$ exposant de p dans la factorisation de k

$$(TR) \quad \forall e \in E^+, \quad \frac{L(s(e))}{L(s(e)) \wedge n} = L(e) = \frac{L(t(e))}{L(t(e)) \wedge m}$$

devient $\forall e \in E^+$, $\forall p$ premier

$$\max\left(0, |L(s(e))|_p - |n|_p\right) = |L(e)|_p = \max\left(0, |L(t(e))|_p - |m|_p\right)$$

Question : est-ce que (TR) garantit $|L(s(e))|_p = |L(t(e))|_p$?

* NON si $|m|_p \neq |n|_p$
* OUI si $|m|_p = |n|_p = 0$
* NON si $|m|_p = |n|_p > 0$ et $|L(e)|_p = 0$
* OUI si $|m|_p = |n|_p > 0$ et $|L(e)|_p \geqslant 1$

Déf $Ph_{m,n}(\infty) := \infty$; si $k = p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$Ph_{m,n}(k) := \prod_j p_j^{i_j}$ sur les j tq $|m|_{p_j} = |n|_{p_j} = 0$

ou $i_j > |m|_{p_j} = |n|_{p_j} > 0$

<u>Rem</u> Si α préaction transitive
alors $BS(\alpha)$ est connexe
et $Ph_{m,n} \circ L$ est constante sur les sommets

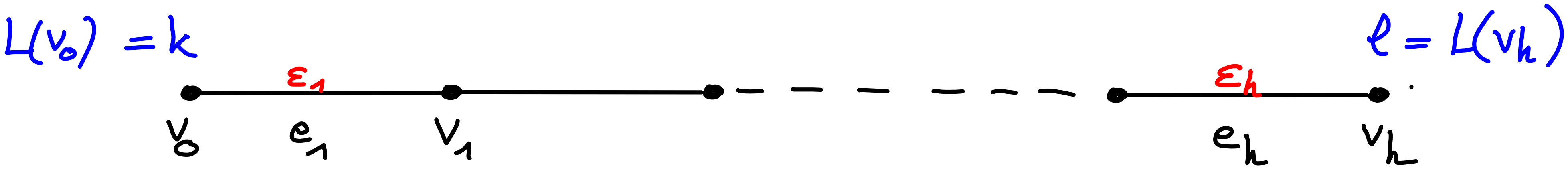
$\rightsquigarrow$ $Ph(\alpha)$ phénotype de α (sans pt base)

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}\mathrm{h} : \mathrm{Sub}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geqslant 1} \cup \{\infty\}$
fonction phénotype ; Γ-invariante

Lemme de connexion $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Si $Ph_{m,n}(k) = Ph_{m,n}(\ell)$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_h \in \{+, -\}$,

alors il existe un (m,n)-graphe de la forme



($\varepsilon_1, \varepsilon_h$ donnent les orientations de e_1, e_h

k, ℓ sont les étiquettes de v_0, v_h)

VI Idées pour thm B

$m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$\Gamma = BS(m,n)$

Prop B' quasi-évidente :

si $\mathrm{Ph}(\alpha) = q < \infty$ (et pt base v)

alors $q = \mathrm{Ph}_{m,n}(|v \cdot \langle b \rangle|)$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ph}^{-1}(q)$ ouvert si $q < \infty$

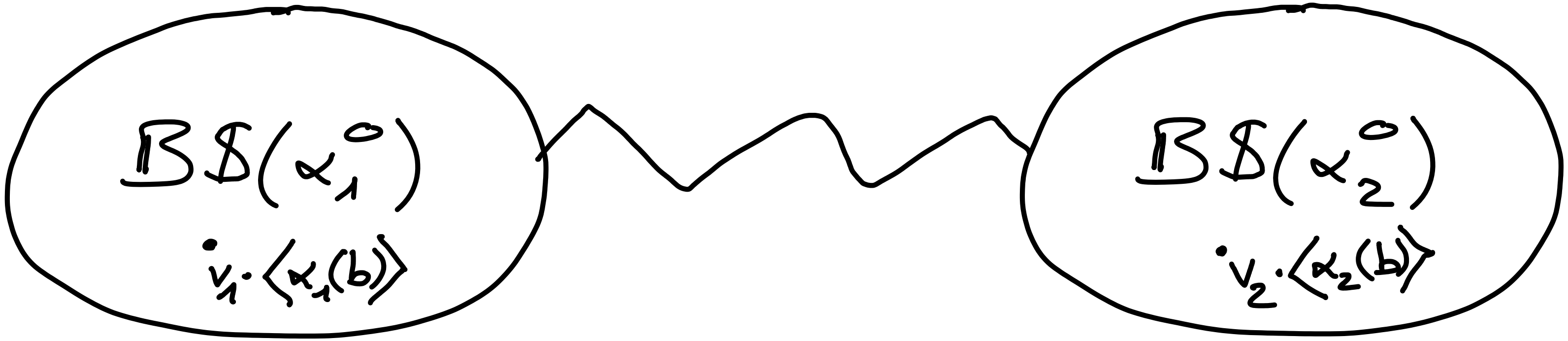
Soit $q \in Q_{m,n}$, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ouverts

OPS $\mathcal{U}_i = \mathcal{N}([\alpha_i ; v_i], R)$

1. α_i^0 préaction sur réunion des b-orbites des pts de $B(\alpha_i, v_i, R+1)$

$\rightsquigarrow BS(\alpha_i^0)$ fini, $\subset BS(\alpha_i)$

2. Grâce au lemme de connexion, $\exists\, \mathcal{G}$ (m,n)-graphe



③ On sature $\mathcal{G}$

On trouve une action α transitive telle que

* α prolonge α_1° et α_2°
* $BS(\alpha) = \mathcal{G}$

④ Alors :

$$[\alpha, v_i] \in \mathcal{N}([\alpha_i, v_i]) = U_i \quad (i = 1, 2)$$

$[\alpha, v_1]$ et $[\alpha, v_2]$ dans même orbite

VII Autres résultats

Thm C $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ tq $|m| \neq |n|$, q phénotype fini

$$Ph^{-1}(\infty) \cap \overline{Ph^{-1}(q)} = \{ \Lambda \in Ph^{-1}(\infty) : \Lambda \leq \langle\langle b \rangle\rangle \}$$

Rem : (1) indépendant de q

(2) si $|m| = |n|$ $\overline{Ph^{-1}(q)} = Ph^{-1}(q)$

Thm D $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$

* Si $|m| = |n|$, tout sg de phén ∞ est limite de sg de phénotypes finis (variables)

* Si $|m| \neq |n|$, alors

$$\overline{\bigcup_{q \text{ fini}} \mathrm{Ph}^{-1}(q)}$$ est d'intérieur vide dans $\mathrm{Ph}^{-1}(\infty)$