Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 4

Espaces complets. Théorème du point fixe.

Exercice 1

Etablir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad]0,1], \quad [0,+\infty[, \quad \mathbb{Z}.$$

Exercice 2

1. Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. On considère sur E la norme définie par
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$
Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
2. Montrer que l'espace S des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme uniforme, n'est pas complet.
3. Trouver un espace métrique complet T contenant S, tel que S est dense dans T.

Exercice 3

Soit $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites sommables, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\forall (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad \left\|(u_n)_{n\geq 0}\right\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Montrer que $\left(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\right)$ est un espace de Banach.

Exercice 4

On munit l'espace $]0,+\infty[$ de la distance δ définie par

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad \delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

1. Vérifier que δ définit bien une distance sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $(]0,+\infty[, \delta)$ et $(]0,+\infty[, |\cdot|)$ ont les mêmes ouverts.
3. Montrer que l'espace métrique $(]0,+\infty[, \delta)$ n'est pas complet.
4. Montrer que $(]0,1], \delta)$ est complet.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application contractante pour la distance usuelle de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto x + f(x)$ est bijective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Exercice 6

Montrer qu'il existe une unique fonction f continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \sup_{y \in [0,1]} \left(\cos(x^2 - y^{12}) + \frac{f(y)}{2} \right) .$$

Exercice 7

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in]0,1[$ tels que l'application $f^r = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (r fois) est k-contractante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 8

Soit (X, δ) un espace métrique, et (E, d) un espace métrique complet. Soit

$$F : \begin{array}{ccc} X \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & F(\lambda, x) \end{array}$$

une application continue.
On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tout $\lambda \in X$ et tout $(x, y) \in E^2$,

$$d\big(F(\lambda, x), F(\lambda, y)\big) \leq k d(x, y) .$$

1. Montrer que pour tout $\lambda \in X$, l'application

$$F(\lambda, \cdot) : x \longmapsto F(\lambda, x)$$

   admet un unique point fixe, que l'on notera $x(\lambda)$.
2. Montrer que l'application $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ est continue sur X .