Corrigé de l'examen de Master de Mécanique (Mathématiques) du 8 janvier 2009

Exercice 1.

1) le fait que $[0,\pi]\times[0,2\pi]\ni(\phi,\theta)\mapsto x(\phi,\theta)$ est une paramétrisation de S suit de la formule pour les coordonnées sphériques.

On calcule:

$$\frac{\partial x}{\partial\phi}=\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\theta\\ \cos\phi\sin\theta\\ -\sin\phi\end{pmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\sin\theta\\ \sin\phi\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

et
$$\frac{\partial x}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial x}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}\sin^2\phi\cos\theta\\ \sin^2\phi\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}=\sin\phi\; x(\phi,\theta).$$

Comme $\sin\phi\geq 0$ pour $\phi\in[0,\pi]$, le vecteur $\frac{\partial x}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial x}{\partial\theta}$ est colinéaire, de même direction au vecteur $\vec{\nu}(\phi,\theta)=x(\phi,\theta)$. La paramétrisation est donc compatible avec l'orientation.

On a $\quad d^2S=\left\|\frac{\partial x}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial x}{\partial\theta}\right\|d\phi\, d\theta=\sin\phi\, d\phi\, d\theta.$

2) Au point $x(\phi,\theta)$ on a:

$$\vec{F}(x(\phi,\theta))=\begin{pmatrix}0\\0\\ \sin^2\phi\cos^2\theta\cos\phi+\sin^2\phi\sin^2\theta\cos\phi+\cos^3\phi\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}0\\0\\ \cos\phi\end{pmatrix}$ et $\vec{F}(x(\phi,\theta))\cdot\vec{\nu}=\cos^2\phi$. On a donc:

$$I=\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{2\pi}d\theta\;\cos^2\phi\sin\phi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin\phi\, d\phi$$

$$=2\pi\times\left[-\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi}=\frac{4\pi}{3}.$$

3) On applique la formule de Green:

$$\iint_{\partial D}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\, d^2S=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, d^3x.$$

Comme $\partial D=S$ (avec l'orientation), on a:

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, d^3x=\frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 2.

1) La fonction $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ce qui entraîne que F est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r} f'(r) \qquad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{r} f'(r) - \frac{x_i^2}{r^3} f'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} f''(r),$$

et

$$\Delta F(x) = \left(\frac{3}{r} - \sum_1^3 \frac{x_i^2}{r^3}\right) f'(r) + \sum_1^3 \frac{x_i^2}{r^2} f''(r)$$

$$= \frac{2}{r} f'(r) + f''(r).$$

2) On passe en coordonnées sphériques (r, ϕ, θ).

L'élément de volume d^3x devient : $r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta$.

On a donc :

$$\iiint_D \Delta F(x) \, d^3x = \int_a^b dr \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \; r^2 \left(f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)\right) \sin\phi$$

$$= 2\pi \times \int_0^\pi \sin\phi \, d\phi \int_a^b r^2 f''(r) + 2r f'(r) \, dr$$

$$= 2\pi \times \left[-\cos\phi\right]_0^\pi \times \int_a^b (r^2 f'(r))' \, dr$$

$$= 4\pi \times \left[r^2 f'(r)\right]_a^b = 4\pi \left(b^2 f'(b) - a^2 f'(a)\right).$$

3). On applique la formule de Green :

$$\iiint_D \Delta F(x) \, d^3x = \iint_{\partial D} \vec{\nabla F}(x) \cdot \vec{\nu} \, d^2S.$$

Le bord de D est formé des deux sphères S_b et S_a de centre O et de rayons b et a. La normale à S_b pointe vers l'extérieur, la normale à S_a pointe vers O.

On a $\vec{\nabla} F(x) = \frac{x}{r} f'(r)$ pour $r = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$.

Sur S_b le vecteur normal au point x est égal à $\frac{x}{r}$, sur S_a il est égal à $-\frac{x}{r}$.

On a donc:

$$\iint_{\partial D} \vec{\nabla F}(x).\vec{\nu}\, d^2S = \iint_{S_b} f'(r)\, d^2S - \iint_{S_a} f'(r)\, d^2S$$

$= 4\pi b^2 f'(b) - 4\pi a^2 f'(a)$, car la surface de la sphère de rayon r est $4\pi r^2$.

Exercice 3.

1) On cherche F en écrivant:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F'(u)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = F'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$

$$= F'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \text{ si } F(u) = u^2.$$

si $v(t,x) = u^2(t,x)$, v vérifie l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v(0,x) = u^2(0,x) = g^2(x), \end{cases}$$ et on vérifie bien que $h(x) = g^2(x)$.

2) La caractéristique partant de y pour l'équation (2) est la courbe $x = y + t h(y)$. On obtient:

$$\begin{cases} x = y + 4t & \text{si } y \leq 0 \quad (\text{région I}) \\ x = y + (4-y)t & \text{si } 0 < y \leq 2 \quad (\text{région II}) \\ x = y + 2t & \text{si } 2 < y. \quad (\text{région III}). \end{cases}$$

2 ~~[illegible]~~ caractéristiques partant de la région I ou de la région III ne se coupent jamais.

Une caractéristique partant de la région I ne coupe jamais une caractéristique partant de la région ~~III~~.

Si on considère deux caractéristiques partant de la région II :

$$x = y_1 + (4 - y_1)t \qquad \text{et } x = y_2 + (4 - y_2)t$$

elles se coupent au temps t si :

$$y_1 + (4 - y_1)t = y_2 + (4 - y_2)t$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 - y_2 = t(y_1 - y_2) \Leftrightarrow t = 1.$$

Toutes les caractéristiques partant de la région II se coupent au temps $t = 1$, au point $x = 4$.

3) Pour $0 \leq t < 1$, on a :

-. $x = y + 4t$ avec $y \leq 0$ si $x \leq 4t$

et $u(t,x) = 4$

-. $x = y + (4 - y)t$ avec $0 \leq y \leq 2$ si $y = \dfrac{x - 4t}{1 - t}$, $4t < x \leq 2 + 2t$,

$$\text{et } u(t,x) = 4 - y = 4 - \frac{x - 4t}{1 - t} = \frac{4 - 4t - x + 4t}{1 - t} = \frac{4 - x}{1 - t}.$$

-. $x = y + 2t$ avec $y > 2$ si $x > 2 + 2t$

et $u(t,x) = 2$.

On a donc :

$$u(t,x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \leq 4t \\ \dfrac{4 - x}{1 - t} & \text{si } 4t < x \leq 2 + 2t \\ 2 & \text{si } 2 + 2t < x \end{cases}$$

On obtient :

$$v_1(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

4) On cherche une solution égale à v_g (resp. v_d) à gauche et à droite de la courbe de discontinuité $x = s(t)$.

On a $v_g = 4$, $v_d = 2$. La condition de Rankine-Hugoniot donne :

$$F(v_g) - F(v_d) = s'(t)(v_g - v_d), \qquad F(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = s'(t)\,(4-2)$$

où $s'(t) = 3$. Comme $s(1) = 4$ $s(t) = 1+3t$.

5) On a $v(t,x) = u^2(t,x)$ donc $u(t,x) = v(t,x)^{1/2}$. On obtient :

$$u(t,x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 4t,\ 0<t<1 \\ \left(\frac{4-x}{1-t}\right)^{1/2} & \text{si } 4t < x \le 2+2t,\ 0<t<1 \\ \sqrt{2} & \text{si } 2+2t < x \quad 0<t<1 \end{cases}$$

$$\text{et } u(t,x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1+3t,\ t \ge 1 \\ \sqrt{2} & \text{si } 1+3t < x,\ t \ge 1. \end{cases}$$

Exercice 4.

1) les caractéristiques partant de $y<0$ sont les courbes :

$x = y + t\,g(y) = y$.

On a donc $u(t,x) = 0$ dans $x<0$.

2) les caractéristiques partant de $y>0$ sont les courbes :

$x = y + t(1+y^2)$. On a donc $x>t$.

On résout en y l'équation :

$x = ty^2 + y + t \Leftrightarrow ty^2 + y + t - x = 0$.

le discriminant est $\Delta = 1 + 4t(x-t)$ $\Delta > 0$ si $x \ge t$.

la solution $y>0$ est

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1+4t(x-t)}}{2t}$$

on a $u(t,x) = 1+y^2$

$$= 1 + \frac{\left((1+4t(x-t))^{1/2} - 1\right)^2}{4t^2}$$

$$= \frac{4t^2 + 1 + 4t(x-t) + 1 - 2\left(1+4t(x-t)\right)^{1/2}}{4t^2}$$

$$= \frac{1 + 2tx - (1+4t(x-t))^{1/2}}{2t^2}$$

3) On complète $u(t,x)$ dans la région $0<x<t$ par une onde de raréfaction. D'après le cours une onde de raréfaction pour l'équation de Burgers dans $0<x<t$ est égale à $u(t,x) = \frac{x}{t}$.

Finalement:

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0<x<t \\ \frac{1+2tx-(1+4t(x-t))^{1/2}}{2t^2} & \text{si } t<x. \end{cases}$$