Examen de Mathématiques Master 1 Mécanique n° 1

Durée 3h.

Le Mardi 5 Janvier 2010.

Corrigé.

Exercice 1.

1) On a :

$$\partial_{x_i} u(t,x) = \tfrac{x_i}{|x|}\partial_r U(t,|x|),$$
$$\partial^2_{x_i} u(t,x) = \tfrac{x_i^2}{|x|^2}\partial_r^2(t,|x|) + \tfrac{1}{|x|}\partial_r U(t,|x|) - \tfrac{x_i^2}{|x|^3}U'(t,|x|),$$

et donc en sommant sur les indices i :

$$\Delta_x u(t,x) = \partial_r^2 U(t,r) + \frac{2}{r}\partial_r U(t,r).$$

On obtient donc le point 1).

2) On calcule

$$\partial_r V(t,r) = r\partial_r U(t,r) + U(t,r),\ \partial_r^2 V(t,r) = r\partial_r^2 U(t,r) + 2\partial_r U(t,r).$$

Si on multiplie l'équation (E') par r on obtient l'équation (E''). Le fait que $V(t,0) = 0$ est évident car $V(t,r) = rU(t,r)$.

3) En appliquant la formule donnée dans l'énoncé, on obtient

$$U(t,r) = \begin{cases} \frac{1}{2r}\left((r+t)F(r+t) + (r-t)F(r-t)\right), \text{ si } 0 \le r \le t, \\ \frac{1}{2r}\left((r+t)F(r+t) - (t-r)F(t-r)\right), \text{ si } 0 \le t \le r, \end{cases}$$

ce qui donne la formule :

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2|x|}\left((|x|+t)F(|x|+t) + (|x|-t)F(|x|-t)\right), \text{ si } 0 \le |x| \le t, \\ \frac{1}{2|x|}\left((|x|+t)F(|x|+t) - (t-|x|)F(t-|x|)\right), \text{ si } 0 \le t \le |x|. \end{cases}$$

4) La fonction F est égale à 1 si $0 \le r \le 1$, à 0 si $r > 1$.

Si $t \ge 0$ et $|x| > t+1$ on a $|x| \ge t$ donc on applique la deuxième formule. D'autre part $|x| + t > 2t + 1 > 1$ et $t - |x| < -1$ donc les deux termes dans la formule sont nuls.

De même si $t > 1$ et $|x| < t - 1$ on a $|x| < t$ donc on applique la première formule. On a $|x| - t < -1$ et $|x| + t > 1$ donc les deux termes dans la formule sont encore nuls. On en déduit le résultat.

Exercice 2.

On cherche la courbe caractéristique partant de (t_0, x_0) :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}t(s) = 1, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x(t,s) = x(s)t(s), \\ t(0) = t_0,\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On a $t(s) = t_0 + s$, on reporte dans l'équation pour $x(s)$ qui devient $x'(s) = (t_0+s)x(s)$ dont la solution (variation de la constante) est :

$$x(s) = x_0 \mathrm{e}^{t_0 s - s^2/2}.$$

En posant $y(s, t_0, x_0) = x(s)$, on sait d'après le cours que la solution de l'équation de transport est donnée par :

$$u(t, x) = f(x(-t, t, x)),$$

ce qui donne :

$$u(t, x) = f(x\mathrm{e}^{-t^2/2}).$$

2) Evidemment

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, x) = \lim_{t \to +\infty} f(x\mathrm{e}^{-t^2/2}) = \lim_{y \to 0} f(y) = f(0).$$

3) En appliquant les formules vues en cours, on a :

$$u(t, x) = f(x\mathrm{e}^{-t^2/2}) + \int_{-t}^{0} h(x\mathrm{e}^{st+s^2/2})\ \mathrm{d}s.$$

Exercice 3.

1)Les courbes caractéristiques sont tracées sur la Figure 1. On voit que la solution comportera un choc partant de $x = -1$ et une onde de raréfaction partant de $x = 0$.

2) Comme vu en cours la solution $u_d(t, x)$ est donnée par :

$$u_d(t, x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ \frac{x}{t} \text{ si } 0 < x \leq 2t, \\ 2 \text{ si } 2t < x. \end{cases}$$

3) On cherche la solution $u(t, x)$ sous la forme d'une solution faible :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g(t, x), \text{ si } x < s(t), \\ u_d(t, x), \text{ si } x > s(t), \end{cases}$$

la forme de la courbe de choc $x = s(t)$ étant déterminée par les conditions de Rankine-Hugoniot. La courbe de choc part du point $x = -1$ à $t = 0$. On va prendre $u_g(t, x) \equiv 1$. Pour des temps assez petits la solution $u_d(t, x)$ vaut 0. La condition de Rankine-Hugoniot s'écrit :

$$\frac{1}{2}u_g(t, s(t))^2 - \frac{1}{2}u_d(t, s(t))^2 = s'(t)\left(u_g(t, s(t)) - u_d(t, s(t))\right),$$

ou de manière équivalente :

$$s'(t) = \frac{1}{2}\left(u_g(t, s(t)) + u_d(t, s(t))\right).$$

On obtient donc pour t petit :

$$s'(t) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}, \text{ et } s(0) = -1,$$

soit :

$$s(t) = -1 + t/2.$$

Cette solution est correcte tant que la courbe de choc ne rencontre pas le bord de gauche de l'onde de raréfaction qui est la courbe $\{x = 0\}$, c'est à dire tant que $-1 + t/2 \leq 0$ soit $0 \leq t \leq 2$. A partir de $t = 2$, la solution u_d change de forme est devient $u_d(t, x) = \frac{x}{t}$. La condition de Rankine-Hugoniot devient :

$$s'(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s(t)}{t}\right), \text{ et } s(2) = 0.$$

On résout d'abord l'équation homogène :

$$s'(t) = \frac{1}{2}\frac{s(t)}{t},$$

dont la solution est :

$$s(t) = Ct^{\frac{1}{2}}.$$

Puis on cherche la solution sous la forme $s(t) = C(t)t^{\frac{1}{2}}$ (variation de la constante), on obtient :

$$s'(t) = C'(t)t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C(t)t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}C(t)t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2},$$

soit $C'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$, $C(t) = C + t^{\frac{1}{2}}$. La solution est donc :

$$s(t) = t + Ct^{\frac{1}{2}},$$

on trouve que $C = -\sqrt{2}$ par la condition initiale $s(2) = 0$. Finalement on obtient

$$s(t) = \begin{cases} -1 + t/2, \ \text{si } t \leq 2, \\ t - (2t)^{\frac{1}{2}}, \ \text{si } 2 < t. \end{cases}$$

On remarque que la courbe de choc ne rencontrer jamais le bord de droite de l'onde de raréfaction car $t - (2t)^{\frac{1}{2}} < 2t$ pour tout t.

La formule finale donnant la solution est :

$$\text{si } 0 \leq t \leq 2: \ u(t,x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq -1 + t/2, \\ 0 \text{ si } \ -1 + t/2 < x \leq 0, \\ \frac{x}{t} \text{ si } 0 < x \leq 2t, \\ 2 \text{ si } 2 < x, \end{cases}$$

et :

$$\text{si } 2 < t: \ u(t,x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq t - (2t)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{x}{t} \text{ si } t - (2t)^{\frac{1}{2}} < x \leq 2t, \\ 2 \text{ si } 2t < x. \end{cases}$$

4) On vérifie la condition d'entropie qui est :

$$F'(u_g) > s'(t) > F'(u_d), \ \text{sur la courbe de choc.}$$

Pour $0 \leq t \leq 2$, la vitesse à gauche vaut 1, la vitesse de la courbe vaut $\frac{1}{2}$, la vitesse à droite est 0, donc la condition est vérifiée.

Pour $t \geq 2$; la vitesse à gauche vaut 1, la vitesse de la courbe est $s'(t) = 1 - (\frac{1}{2t})^{\frac{1}{2}}$, la vitesse à droite vaut $\frac{t-(2t)^{\frac{1}{2}}}{t} = 1 - (\frac{2}{t})^{\frac{1}{2}}$. La condition est encore vérifiée (car $\sqrt{2} > 1$).

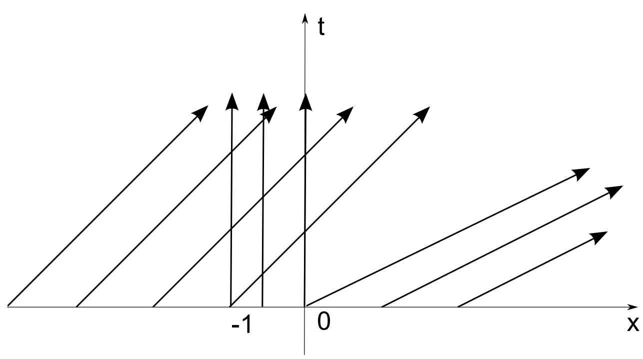

FIGURE 1 – Les courbes caractéristiques