Corrigé du Partiel de Mathématiques
Master I de Mécanique.

Exercice 1.

les équations 1, 2, 5 sont linéaires, 3, 4 sont non linéaires.
1 et 5 sont d'ordre 2, 2 d'ordre 4, 3 d'ordre 3,
4 d'ordre 1.

Exercice 2.

1) on a $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f_1 f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + f_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

$$\Delta(f_1 f_2) = \Delta f_1\, f_2 + f_1 \Delta f_2 + 2\nabla f_1 . \nabla f_2 .$$

2) on a $\frac{\partial}{\partial x_i} F\circ f = F'\circ f \times \frac{\partial f}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F\circ f = F''\circ f \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + F'\circ f \times \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

$$\Delta F\circ f = \Delta f \times F'\circ f + |\nabla f|^2 \times F''\circ f .$$

Exercice 3.

1) On sait que si $a \neq 0$, l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$ possède une solution unique.

En échangeant les rôles de t et x et en divisant l'équation par a, on obtient que l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a^{-1}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(t,0) = f(t) \end{cases}$$ possède une solution unique.

Soit $u(t,x)$ la solution de (1) (obtenue pour $\alpha = c^{-1}$)

et $v(t,x) = u(t+1,x)$. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^2 \\ v(t,0) = u(t+1,0) = f(t+1) = f(t), & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

v vérifie la même équation que u, avec la même donnée initiale donc $v = u$, c'est à dire que $u(t+1,x) = u(t,x)$.

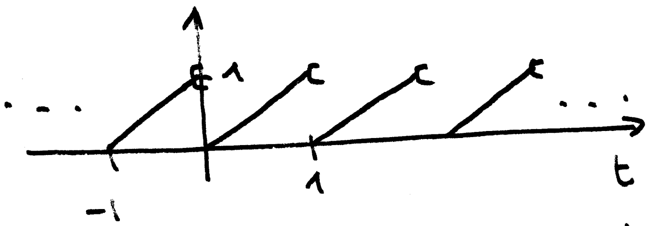
2). La solution générale de $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ est

$u(t,x) = h(x-ct)$. Comme $u(t,0) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$

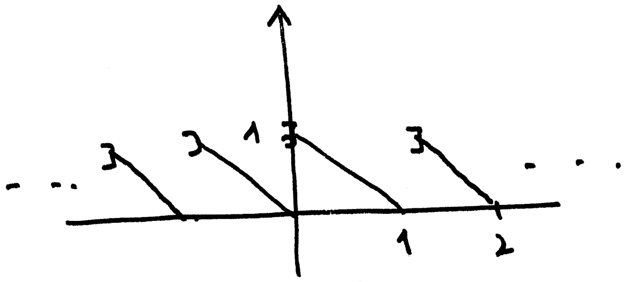
on obtient $h(-ct) = f(t)$ ou $h(s) = f(-c^{-1}s)$.

Donc $u(t,x) = f\left(\dfrac{ct-x}{c}\right) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$.

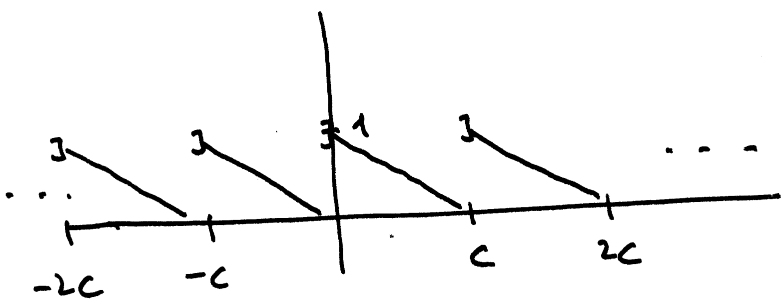
3) $u(0,x) = f\left(-\dfrac{x}{c}\right)$. Le graphe de f est ainsi :



Le graphe de $f(-s)$ est ainsi (reflection | Oy) :



Le graphe de $f\left(-\frac{s}{c}\right)$ est ainsi :



Exercice 4

$v = \frac{\partial u}{\partial x}$ vérifie $\quad \frac{\partial v}{\partial t} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 1$,

dont la solution générale est

$$v(t,x) = f(x-3t)+t \qquad f \text{ fonction arbitraire.}$$

Puis on résout :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = f(x-3t)+t,$$

dont la solution est :

$$u(t,x) = \int_0^x f(y-3t)\,dy + tx + c = \int_{-3t}^{x-3t} f(y)\,dy + tx + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ et la fonction f sont arbitraires.

Exercice 5.

1) On cherche les courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds}(s) = 1 \\ \frac{dx}{ds}(s) = s\,x(s) \\ t(0) = t^0,\ y(0) = x^0 \end{cases}$$

solution : $t(s) = t^0 + s \qquad \frac{dx}{x} = s\,ds$

$$x(s) = x^0 e^{s^2/2}.$$

la courbe passant par (t^0, x^0) arrive en $t=0$ pour $s = -t^0$

et donc $x(-t^0) = x^0 e^{t^{0\,2}/2}$.

on a donc : $u(t^0,x^0) = g(x(-t^0)) = g(x^0 e^{-t^{0\,2}/2})$

On a donc :

$$u(t,x) = g(x e^{-t^2/2}).$$

2) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = g(0)$, si g est continue.

Exercice 6.

1) On pose $f(\lambda) = u(\lambda t, \lambda x)$ pour t, x fixés.

$$\lambda f'(\lambda) = \lambda t \frac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda x) + \lambda x \frac{\partial u}{\partial x}(\lambda t, \lambda x) \equiv 0.$$

Donc $f'(\lambda) = 0$ pour $\lambda > 0$ et donc

$$f(\lambda) = f(1) = u(t, x).$$

2) Pour $\lambda = t^{-1}$ on a : $u(t,x) = u(1, \frac{x}{t}) = g(\frac{x}{t})$.

pour $x = 0$ $\lim\limits_{t \to +\infty} g(\frac{0}{t}) = g(0)$

pour $x > 0$ $\lim\limits_{t \to 0^+} g(\frac{x}{t})$ existe si et seulement si $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y)$ existe,

et de même si $x < 0$ il faut que $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y)$ existe.