Examen de Mathématiques Master 1 Mécanique n° 1

Durée 3h.

Le Mardi 8 Janvier 2008.

Rappels de cours

On rappelle quelques résultats sur les intégrales généralisées : si $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, on dit que l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x) d^3x$$

converge si la limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} f(x) d^3x$$

existe dans $\mathbf{R}$. On pose alors :

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x) d^3x := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} f(x) d^3x.$$

Une condition suffisante pour que l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^3} f(x) d^3x$ converge est qu'il existe une constante C telle que

$$\int_{B(0,R)} |f(x)| d^3x \leq C, \quad \forall R \geq 1,$$

où $B(0, R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon R .

Exercice 1. Equation de Schroedinger

Soit $\Psi : \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3 : (t, x) \mapsto \Psi(t, x) \in \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$ à valeurs complexes. On note par $\overline{\Psi}$ la fonction complexe conjuguée :

$$\overline{\Psi}(t, x) = \overline{\Psi(t, x)}.$$

On associe à la fonction Ψ la fonction positive :

$$\rho(t, x) := \overline{\Psi}(t, x) \Psi(t, x) = |\Psi(t, x)|^2$$

appelée *densité de probabilité* et le champ de vecteurs :

$$\vec{j}(t, x) = \frac{1}{2i} (\overline{\Psi}(t, x) \nabla_x \Psi(t, x) - \Psi(t, x) \nabla_x \overline{\Psi}(t, x)),$$

appelé *courant de probabilité*.

1) Vérifier que chaque composante de $\vec{j}(t, x)$ est à valeurs réelles et donc que $\vec{j}(t, x)$ appartient bien à $\mathbf{R}^3$ pour tous $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$.

Montrer que

$$\operatorname{div} \vec{j}(t, x) = \frac{1}{2i} (\overline{\Psi}(t, x) \Delta_x \Psi(t, x) - \Psi(t, x) \Delta_x \overline{\Psi}(t, x)).$$

2) On suppose que la fonction Ψ vérifie l'équation de *Schroedinger* :

$$\partial_t \Psi(t, x) = \frac{i}{2} \Delta_x \Psi(t, x) - iV(x) \Psi(t, x), \text{ dans } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3,$$

où $V : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, à valeurs *réelles*.

Montrer en utilisant 1) que si Ψ vérifie l'équation de Schroedinger alors :

$$\partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div} \vec{j}(t, x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3.$$

3) On pose pour $t \in \mathbf{R}$ et $R > 0$:

$$I(t, R) = \int_{B(0, R)} \rho(t, x) d^3 x,$$

où $B(0, R)$ désigne la boule de centre 0 de rayon R .

Montrer en utilisant la formule de Green-Riemann que

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t, R) = - \int_{\partial B(0, R)} \vec{j}(t, x) \cdot \vec{\nu}(x) d^2 S,$$

où $\partial B(0, R)$ désigne la sphère de centre 0 et de rayon R et $\vec{\nu}$ le vecteur normal extérieur à $\partial B(0, R)$.

4) Montrer que si

$$|\Psi(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}, \text{ pour un } \alpha > \frac{3}{2}$$

alors l'intégrale

$$I(t) = \int_{\mathbf{R}^3} \rho(t, x) d^3 x \text{ converge.}$$

5) Montrer que si de plus

$$|\nabla_x \Psi(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-\beta}, \text{ pour un } \beta > \frac{1}{2},$$

alors pour tous temps t_1, t_2 , on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(t_1, R) - I(t_2, R) = 0,$$

où $I(t, R)$ est définie au point 5).

6) En déduire que sous ces deux conditions l'intégrale $I(t)$ est indépendante de t .

Exercice 2. Solutions particulières du système de Saint-Venant.

L'écoulement de l'eau dans un canal peu profond est décrit par le système d'équations de transport non linéaires appelé *système de Saint-Venant* :

$$(SV) \begin{cases} \partial_t h(t, x) + \partial_x(hu)(t, x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ \partial_t(hu)(t, x) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}h^2)(t, x) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \end{cases}$$

avec des conditions initiales

$$h(0, x) = h_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Les fonctions inconnues $h(t, x)$ et $u(t, x)$ représentent respectivement la hauteur de l'eau au point $x \in \mathbf{R}$ et à l'instant $t \in \mathbf{R}$ et la vitesse à l'instant t le long de l'axe des x de la colonne d'eau au dessus du point x .

1) Soit (h, u) un couple de fonctions de classe C^1 dans $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$. Montrer que (h, u) est solution de (SV) si et seulement si le couple de fonctions (h, hu) est solution de :

$$(1.3) \quad \partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} (t, x) + M(h, u) \partial_x \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} (t, x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R},$$

où $M(h, u)$ est la matrice 2×2 :

$$M(h, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + h & 2u \end{pmatrix}$$

2) Soit maintenant $\alpha = \alpha(t, x)$ une fonction scalaire et (h, u) un couple de fonctions de classe C^1 telles que :

$$(1.4) \quad \partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} (t, x) + \alpha(t, x) \partial_x \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} (t, x) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}.$$

On supposera que la fonction h est toujours strictement positive.

On suppose de plus la condition suivante vérifiée :

(C) pour tout (t, x) le vecteur

$$\partial_x \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} (t, x)$$

est un vecteur propre de la matrice $M(h, u)(t, x)$ pour la valeur propre $\alpha(t, x)$.

Montrer qu'alors le couple de fonctions (h, u) est solution de (SV).

3) Montrer que (C) est vérifiée si et seulement si

$$(1.5) \quad \alpha(t, x) = u(t, x) \pm \sqrt{h}(t, x),$$

et

$$(1.6) \quad -\alpha(t, x) \partial_x h(t, x) + \partial_x(hu)(t, x) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dans la suite on choisira $\alpha = u + \sqrt{h}$.

4) Montrer que pour ce choix de α l'équation (1.6) est équivalente à :

$$(1.7) \quad \partial_x(u - 2\sqrt{h})(t, x) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

5) Soit $h_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive et C une constante arbitraire.

Soit $h(t, x)$ une fonction de classe C^1 dans $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ solution de :

$$(1.8) \quad \begin{cases} \partial_t h + (3\sqrt{h} + C) \partial_x h = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \\ h(0, x) = h_0(x), \text{ dans } \mathbf{R}. \end{cases}$$

Expliquer pourquoi la fonction $h(t, x)$ est strictement positive.

Vérifier en utilisant tout ce qui précède que si

$$u(t, x) = 2\sqrt{h}(t, x) + C,$$

alors (h, hu) est solution de (1.4), la condition (C) est vérifiée, et donc (h, u) est solution du système de Saint-Venant (SV) pour les données initiales (h_0, u_0) avec

$$u_0(x) = 2\sqrt{h_0}(x) + C.$$

6) On fixe maintenant les données initiales :

$$h_0(x) = \begin{cases} 4 \text{ pour } x \leq 0, \\ 4^{-1}(4-x)^2 \text{ pour } 0 < x \leq 2, \\ 1 \text{ pour } 2 < x, \end{cases}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 \text{ pour } x \leq 0, \\ (2-x) \text{ pour } 0 < x \leq 2, \\ 0 \text{ pour } 2 < x, \end{cases}$$

En utilisant les résultats précédents déterminer la solution C^1 de (SV) pour les données initiales (h_0, u_0) sur un intervalle de temps $[0, T_{\max}]$ que l'on déterminera.

7) Prolonger la solution en une solution faible pour $t \geq T_{\max}$. Comment interpréter physiquement la solution ainsi obtenue ?