Notes de cours sur la transformation de Fourier
Master de Mécanique

1 Définitions

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux (ou plus généralement localement intégrable au sens de Riemann). On dira que f appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$, si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty,$$

c'est à dire si l'intégrale ci-dessus est convergente. De même on dira que f appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x < \infty.$$

On note :

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\mathrm{d}x, \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

$$\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour } f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Les quantités $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ sont des *normes*, c'est à dire que :

$$\|f+g\|_i \leq \|f\|_i + \|g\|_i, \ \|\lambda f\|_i = |\lambda|\|f\|_i, \text{ et } \|f\|_i = 0 \ \Rightarrow f = 0.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on pose :

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\mathrm{d}x, \ k \in \mathbb{R}^d,$$

où $k \cdot x = \sum_{i=1}^d k_i x_i$. La fonction $\widehat{f}$ est appelée la *transformée de Fourier* de la fonction f.

On écrit aussi :

$$\widehat{f} = \mathcal{F}f \text{ ou } \mathcal{F}(f),$$

où la transformation :

$$\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$$

est appelée la *transformation de Fourier*. C'est donc un opérateur qui transforme des fonctions de la variable x en fonctions de la variable k.

Si la variable x représente une position (sa dimension est donc des m), la variable k représente une *impulsion*, sa dimension est des m^{-1}.

En traitement du signal, on a $d = 1$, la variable x est notée t et a la dimension d'un temps (s), la variable k est notée τ et a la dimension d'une fréquence (s^{-1}).

2 Propriétés

On utilise les notations suivantes : le symbole ∂_{x_j}, désigne l'*opérateur de dérivation* par rapport à x_j :

$$\partial_{x_j} f(x) := \frac{\partial}{\partial x_j} f(x).$$

Le symbole x_j désigne l'*opérateur de multiplication* par x_j :

$$x_j f(x) := x_j f(x).$$

On utilise les mêmes conventions pour les symboles ∂_{k_j} et k_j, qui agissent sur des fonctions de la variable k.

Proposition 2.1 (1) *si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}f$ *est une fonction continue et bornée sur* $\mathbb{R}^d$ *;*

(2) *si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}f$ *est une fonction de classe* C^1 *et :*

$$\partial_{k_j} \mathcal{F}f(k) = -\mathrm{i}\mathcal{F}(x_j f)(k);$$

(3) *si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $k_j \mathcal{F}f$ *est bornée et :*

$$k_j \mathcal{F}(f)(k) = -\mathrm{i}\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(k).$$

La chose à retenir est que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ transforme l'opérateur *d'impulsion*

$$D_j = \mathrm{i}^{-1}\partial_{x_j},$$

en l'opérateur de multiplication k_j :

$$\mathcal{F}(D_j f) = k_j \mathcal{F}(f).$$

On donne maintenant quelques transformées de Fourier de fonctions usuelles. On commence par le cas $d = 1$.

$$f(x) = 1\!\!1_{[-a,a])}(x), \quad \mathcal{F}f(k) = \begin{cases} 2\frac{\sin(ak)}{a}, \ k \neq 0, \\ 0, \ k = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

On rappelle que $1\!\!1_I(x)$ désigne la *fonction indicatrice* de l'ensemble I, égale à 1 si $x \in I$ et à 0 sinon.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}, \ a > 0, \quad \mathcal{F}f(k) = 2\frac{a}{a^2 + k^2}. \tag{2.2}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2/2}, \ a > 0, \quad \mathcal{F}f(k) = (\frac{2\pi}{a})^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-a^{-1}k^2/2}. \tag{2.3}$$

(La transformée de Fourier d'une Gaussienne est une Gaussienne).

En dimension d quelconque, la dernière formule se généralise :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\sum_1^d a_i x_i^2/2}, \quad \mathcal{F}f(k) = \prod_1^d (\frac{2\pi}{a_i})^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\sum_1^d a_i^{-1}k_i^2/2}, \tag{2.4}$$

pour $a_i > 0$.

Proposition 2.2 (Lien avec la convolution) *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On pose :*

$$h(x) := f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y.$$

La fonction $f * g$ est appelée le produit de convolution *de f et g. On a :*

(1) $f * g = g * f$;

(2) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$;

(3) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

En d'autres termes, la transformation de Fourier transforme le produit de convolution en le produit ordinaire des fonctions.

3 Transformation de Fourier inverse

Proposition 3.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a :*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\widehat{f}(k)\mathrm{d}k.$$

On peut réécrire ce résultat comme :

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} g(k)\mathrm{d}k,$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la *transformation de Fourier inverse*, qui transforme des fonctions de la variable k en fonctions de la variable x.

Preuve :

on suppose $d = 1$ pour simplifier. Soit

$$g(x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \widehat{f}(k)\mathrm{d}k.$$

On a :

$$\begin{aligned} g(x) = & \lim_{\epsilon\to 0^+}(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\epsilon|k|}\widehat{f}(k)\mathrm{d}k \\ = & \lim_{\epsilon\to 0^+}(2\pi)^{-1}\int\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\mathrm{e}^{-\epsilon|k|}f(y)\mathrm{d}k\mathrm{d}y \\ = & \lim_{\epsilon\to 0^+}(2\pi)^{-1}\int \mathrm{d}y f(y)\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\mathrm{e}^{-\epsilon|k|}\mathrm{d}k \\ = & \lim_{\epsilon\to 0^+}(2\pi)^{-1}\int f(y)\tfrac{2\epsilon}{\epsilon^2+(x-y)^2}\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

en utilisant l'identité (2.2). Par le changement de variable $y = x + \epsilon t$, on obtient :

$$g(x) = \lim_{\epsilon ø 0^+}\pi^{-1}\int f(x+\epsilon t)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Quand $\epsilon \to 0$, $f(x + \epsilon t)$ tend vers $f(x)$, et donc :

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0^+}\pi^{-1}\int f(x+\epsilon t)\tfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ = & f(x)\pi^{-1}\int \tfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = f(x)\pi^{-1}[\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = f(x). \end{aligned}$$

On a donc montré la proposition. □

4 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

Proposition 4.1 (Formule de Plancherel) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x = (2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}|^2(k)\mathrm{d}k.$$

Preuve : soit $g(x) = \overline{f}(-x)$, où la barre désigne la conjuguaison complexe. On a $\mathcal{F}(k) = \overline{\mathcal{F}f}(k)$ et :

$$|\widehat{f}(k)|^2 = \widehat{g}(k)\widehat{f}(k) = \mathcal{F}(f * g)(k),$$

par la Prop. 2.2. On a donc :

$$\int |\widehat{f}(k)|^2 \mathrm{d}k = \int \mathcal{F}(f * g)(k)\mathrm{d}k = (2\pi)^d f * g(0),$$

par la Prop. 3.1. Puis on a :

$$\begin{aligned} (2\pi)^d f * g(0) = \quad & (2\pi)^d \int g(x-y) f(y)\mathrm{d}y|_{x=0} \\ = \quad & (2\pi)^d \int \overline{f}(y) f(y)\mathrm{d}y = (2\pi)^d \int |f(y)|^2 \mathrm{d}y \ \square \end{aligned}$$

La Prop. 4.1 permet d'étendre la transformation de Fourier de l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.2 (Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$) *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Posons*

$$\widehat{f_\epsilon}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \mathrm{e}^{-\epsilon x^2} f(x)\mathrm{d}x.$$

Alors

$$\widehat{f}(k) := \mathcal{F}f(k) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \widehat{f_\epsilon}(k)$$

existe et est appelée la transformée de Fourier de f.

La limite est à comprendre dans le sens L^2, c'est à dire que :

$$\int |\widehat{f}(k) - \widehat{f_\epsilon}(k)|^2 \mathrm{d}k \to 0 \text{ quand } \epsilon \to 0.$$

La transformation de Fourier étendue aux fonctions de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ possède encore les mêmes propriétés.

5 Application à l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(C) \ \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \sum_1^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d, \\ u(0,x) = g(x) \text{ dans } \mathbb{R}_x^d. \end{cases}$$

La fonction $u(t,x)$ représente la température au temps t et au point x, la fonction $g(x)$ représente la distribution initiale de température. Dans d'autres situations, la fonction $u(t,x)$ peut représenter une densité de particules.

On résout facilement cette équation en faisant la transformation de Fourier partielle par rapport à x : on pose :

$$\widehat{u}(t,k) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} u(t,x)\mathrm{d}x.$$

La fonction $\widehat{u}(t,k)$ vérifie donc l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(t,k) + \sum_1^d k_j^2 \widehat{u}(t,k) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_k^d, \\ \widehat{u}(0,k) = \widehat{g}(k) \text{ dans } \mathbb{R}_k^d. \end{cases}$$

La solution est évidemment :

$$\widehat{u}(t,k) = \mathrm{e}^{-tk^2}\widehat{g}(k), \; k^2 = \sum_1^d k_j^2.$$

On retrouve $u(t,x)$ en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\begin{aligned} u(t,x) = & \quad (2\pi)^{-d} \textstyle\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot k - tk^2} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}k \\ = & \quad \textstyle\int K_t(x-y)g(y)\mathrm{d}y = K_t * g(x) \end{aligned}$$

où

$$K_t(x) = (2\pi)^{-d} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot k}\mathrm{e}^{-tk^2}\mathrm{d}k.$$

La fonction $K_t(x)$ peut se calculer exactement, car c'est la transformée de Fourier d'une Gaussienne. A l'aide de la formule (2.4), on obtient :

$$K_t(x) = (4\pi)^{-d/2} t^{-n/2} \mathrm{e}^{-x^2/t},$$

ce qui donne finalement :

Proposition 5.1 *La solution de l'équation de la chaleur (C) est donnée par :*

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}^{d/2} \int \mathrm{e}^{-(x-y)^2/t} g(y)\mathrm{d}y.$$

Cette formule a plusieurs conséquences importantes :

-tout d'abord une température (exprimée en dégrés Kelvin), ou une densité sont toujours positives. Comme la fonction $K_t(x)$ est positive, on voit que si $g(x)$ est une fonction positive, il en est de même de la fonction $u(t, x)$.

- si $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on obtient :

$$|u(t, x)| \leq (4\pi t)^{-d/2} \int |g(y)| \mathrm{d}y,$$

et donc la température en un point x fixé, décroit quand $t \to +\infty$ comme $t^{-d/2}$.

- Supposons que $g(x) \geq 0$ pour tout x et que g n'est pas identiquement nulle. Il existe donc un point $x^0 \in \mathbb{R}^d$ avec $g(x^0) > 0$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \quad (4\pi t)^{-d/2} \int \mathrm{e}^{-(x-y)^2/t} g(y) \mathrm{d}y \\ \geq & \quad (4\pi t)^{-d/2} \int_{|y-x^0| \leq \epsilon} \mathrm{e}^{-(x-y)^2/t} g(y) \mathrm{d}y > 0, \end{aligned}$$

en choisissant $\epsilon > 0$ assez petit. En d'autres termes la température $u(t, x)$ est strictement positive en tout point x et pour tout temps $t > 0$. L'interprétation physique est que la chaleur se propage à *vitesse infinie*, contrairement à l'équation des ondes.

6 Application à l'équation de Schroedinger

En mécanique quantique, une particule dans $\mathbb{R}^d$ est représentée par une *fonction d'onde*, c'est à dire une fonction

$$\psi : \ \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x \ni (t, x) \mapsto \psi(t, x) \in \mathbb{C},$$

telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(t, x)|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

L'interprétation de la fonction d'onde est que l'intégrale :

$$\int_D |\psi(t, x)|^2 \mathrm{d}x$$

représente la probabilité $P(D)$ de trouver la particule au temps t dans le domaine $D \subset \mathbb{R}^d$. Comme

$$\int_D |\psi(t, x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(t, x)|^2 \mathrm{d}x = 1,$$

$P(D)$ est bien inférieure à 1. La probabilité de trouver la particule dans $\mathbb{R}^d$ est évidemment 1, la probabilité de trouver la particule en un point x^0 fixé, est égale à

$$\int_{\{x^0\}} |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

On postule que la fonction d'onde $\psi(t,x)$ est solution de *l'équation de Schroedinger* :

$$(S) \quad \begin{cases} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) + \frac{\hbar^2}{2m}\sum_1^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\psi(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d, \\ \psi(0,x) = g(x) \text{ dans } \mathbb{R}_x^d, \end{cases}$$

où m est la masse de la particule et $\hbar$ est la constante de Planck. La fonction g est la fonction d'onde à l'instant $t = 0$, qui doit vérifier :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

Par changement d'unités, on se ramène au cas où $\hbar = m = 1$.

Pour résoudre (S), on applique à nouveau la transformation de Fourier en x : on pose :

$$\widehat{\psi}(t,k) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\psi(t,x)\mathrm{d}x,$$

et on voit que $\widehat{\psi}(t,k)$ doit vérifier l'équation :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\psi}(t,k) - \frac{k^2}{2}\widehat{\psi}(t,k) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_k^d, \\ \widehat{\psi}(0,k) = \widehat{g}(k) \text{ dans } \mathbb{R}_k^d, \end{cases}$$

La solution est évidemment :

$$\widehat{\psi}(t,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tk^2/2}\widehat{g}(k),$$

et donc :

$$\psi(t,x) = (2\pi)^{-n} \iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot k - \mathrm{i}tk^2/2} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}k.$$

D'autre part, en appliquant l'identié de Plancherel, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x = &\quad (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\psi}(t,k)|^2 \mathrm{d}k \\ = &\quad (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{g}(k)|^2 \mathrm{d}k \\ = &\quad \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 \mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

La fonction $\psi(t,x)$ est donc bien une fonction d'onde.

On peut montrer en étendant l'identité (2.4), que :

$$\psi(t,x) = (2\mathrm{i}\pi t)^{-d/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(x-y)^2/t} g(y)\mathrm{d}y. \tag{6.1}$$

A nouveau cette formule explicite a plusieurs conséquences importantes :

- supposons que la fonction d'onde initiale g est à support dans une boule $B(0,R)$, c'est à dire que la particule est localisée à l'instant 0 dans la boule $B(0,R)$. On a donc :

$$|\psi(t,x)| = (2\mathrm{i}\pi t)^{-d/2} | \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(x-y)^2/t} g(y)\mathrm{d}y| \leq Ct^{-d/2} \int |g(y)|\mathrm{d}y \leq C_1 t^{d/2}.$$

Si D est une autre région bornée de l'espace, la probabilité de présence de la particule au temps t dans D est :

$$P(D) = \int_D |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x \leq C_1 t^{-d} \int_D \mathrm{d}x = C_2 t^{-d}.$$

La probabilité de présence de la particule dans une région bornée décroit donc quand $t \to \infty$ comme t^{-d}, c'est à dire que la particule quantique s'échappe à l'infini.

- pour le même type de condition initiale g, on peut montrer à l'aide de la formule (6.1) que

$$\psi(t,x) \neq 0, \text{ pour tout } t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

Il en résulte que la probabilité de présence de la particule dans une région donnée devient non nulle, pour tout temps $t > 0$ arbitrairement petit. Comme l'équation de la chaleur, l'équation de Schroedinger exhibe le phénomène de propagation à vitesse infinie.