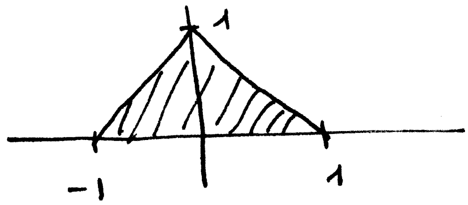
Corrigé du contrôle numéro 2
S3PC Mathématiques du 10/11/08

Exercice 1.

1) le domaine D est l'intérieur du triangle de sommets $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$.



2) Pour calculer l'intégrale on intègre d'abord en y : on obtient:

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{1+x} x^2 y \, dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} x^2 y \, dy$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2 \frac{(1+x)^2}{2} dx + \int_{0}^{1} x^2 \frac{(1-x)^2}{2} dx . = \int_{0}^{1} x^2 (1-x)^2 dx ,$$

en posant $x = -t$ dans la 1ère intégrale.

On a donc $I = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{10+6-15}{30} = \frac{1}{30}$.

Exercice 2.

On fait le changement de variables:

$X : (x,y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{x}{a}, y/b)$.

- le domaine D devient $\tilde{D} = \{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 1 \}$, c'est à dire le disque unité.
- $dx\,dy$ devient $ab\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}$
- x^2+y^2 devient $a^2\tilde{x}^2 + b^2\tilde{y}^2$.

On a donc $I = ab \iint_{\tilde{D}} a^2\tilde{x}^2 + b^2\tilde{y}^2 \, d\tilde{x}\, d\tilde{y}$

On passe en coordonnées polaires: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$dx^2dy^2 = r\,dr\,d\theta$

On a $I = ab\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$

$= ab\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \times \int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\,d\theta.$

On a: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos(2\theta)$

Donc :

$I = \frac{ab}{3} \times \int_0^{2\pi} \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos(2\theta)\,d\theta =$

$\frac{ab}{3} \times \left((a^2+b^2)\pi + \frac{a^2-b^2}{4}\left[\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\right)$

$= \frac{\pi}{3}ab(a^2+b^2).$

Exercice 3.

1) on a: $ch^2t - sh^2t = 1$.

Donc si $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$

$2x_2(t) = ch^2(t) = 1 + sh^2t = 1 + x_1(t)^2.$

On a donc $x(t) \in C$ pour tout $t \in [-1,1]$.

Inversement soit $(x_1, x_2) \in C$. Comme $sh(-1) \leq x_1 \leq sh 1$

et la fonction $t \to sh t$ est bijective on a $x_1 = sh t$ $(t = argsh(x_1))$.

pour un unique $t \in [-1,1]$.

On a: $x_2 = \frac{x_1^2+1}{2} = \frac{sh^2t+1}{2} = \frac{ch^2t}{2}$. Donc $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t))$

pour $t = argsh(x_1)$.

L'arc géométrique associé à γ est donc bien égal à C.

2) Pour calculer la longueur de C

on calcule $d\ell = \left(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2\right)^{1/2} dt$

$x_1'(t) = \operatorname{ch} t, \quad x_2'(t) = \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t$

$x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 = \operatorname{ch}^2 t \left(1 + \operatorname{sh}^2 t\right) = \operatorname{ch}^4 t.$

$d\ell = \operatorname{ch}^2 t \, dt.$

On a donc

$$\ell(C) = \int_C d\ell = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch}^2 t \, dt$$

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{4}\left(e^{t} + e^{-t}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right),$$

$$\ell(C) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2t} \, dt =$$

$$\left[\frac{e^{2t}}{8} + \frac{t}{2} - \frac{e^{-2t}}{8}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{2}}{8} - \frac{e^{-2}}{8} + 1 - \frac{e^{-2}}{8} + \frac{e^{2}}{8} = \cancel{1}.$$

$$1 + \frac{e^{2} - e^{-2}}{4} = \boxed{1 + \frac{\operatorname{sh} 2}{2}.}$$

3) On a par la définition de la circulation:

$$\operatorname{Cir}(\vec{\gamma}, v) = \int_{-1}^{1} \dot{x}(t) \cdot v(x(t)) \, dt = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \, dt.$$

Or $2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \operatorname{sh} 2t$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sh} 2t \, dt = \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch} 2t\right]_{-1}^{1} =$

$\boxed{\operatorname{ch} 2.}$