Corrigé du partiel n° 1 du 9 Octobre 2009

Exercice 1. On utilise le dl de $\ln(1+x)$ en $x=0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

On en déduit que :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O(n^{-3\alpha}) =: v_n + w_n,$$

avec $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

La série $\sum v_n$ est une série alternée (on l'a vu en cours) donc convergente pour tout $\alpha > 0$. D'autre part on a

$$w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + O(n^{-3\alpha})$$

donc $w_n \simeq -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, quand $n \to \infty$. La série $\sum -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ est à termes négatifs, elle converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs (ou négatifs), on en déduit que la série $\sum w_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. On conclut que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

Exercice 2. Comme dans l'exercice précédent, on écrit un dl de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ en 0 :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3),$$

ce qui donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O(n^{-3/2}) =: v_n + w_n,$$

pour $v_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$. La série $\sum v_n$ est une série alternée donc convergente. Comme

$$w_n = -\frac{1}{8n} + O(n^{-3/2})$$

on voit que $w_n \simeq -\frac{1}{8n}$, donc $\sum w_n$ est divergente, car son terme général est équivalent à celui d'une série *de signe constant* divergente. La série $\sum u_n$ est donc divergente.

Exercice 3. Pour la première série on utilise le critère de d'Alembert et on considère

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2.4.6...2n.(2n+2)}{2.4.6...2n} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{2n+2}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= 2\mathrm{e}^{-n\ln(1+1/n)}. \end{aligned}$$

Comme $\ln(1+x) \simeq x$ quand $x \to 0$, on voit que $-n\ln(1+1/n)$ tend vers -1 quand $n \to \infty$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\mathrm{e}^{-1}.$$

Comme $2 < \mathrm{e}$, la série $\sum u_n$ est convergente par le critère de d'Alembert.

Pour la deuxième série on utilise le critère de Cauchy et on considère :

$$|u_n|^{\frac{1}{n}} = \log n \times n^{-\log(n)/n} = \log n \mathrm{e}^{-(\log n)^2/n}.$$

Comme $(\log n)^2/n \to 0$ quand $n \to \infty$, on voit que $\mathrm{e}^{-(\log n)^2/n} \to 1$ et donc $|u_n|^{\frac{1}{n}} \to +\infty$. La série est donc divergente par le critère de Cauchy.

Exercice 4. 1) on rappelle que pour des séries à termes positifs, la convergence est équivalente

au fait que la suite des sommes partielles est bornée. On pose $v_n = \sqrt{u_n u_{n+1}}$. En appliquant Cauchy-Schwarz pour $a_k = \sqrt{u_k}$, $b_k = \sqrt{u_{k+1}}$, on obtient que :

$$\begin{aligned} T_n := \quad & \textstyle\sum_{k=0}^n v_k \leq (\sum_{k=0}^n u_k)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=0}^n u_{k+1})^{\frac{1}{2}} \\ & \leq (\textstyle\sum_{k=0}^n u_k)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=0}^{n+1} u_k)^{\frac{1}{2}} \\ & = (S_n)^{\frac{1}{2}} (S_{n+1})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il en est de même pour la suite (T_n), ce qui montre le résultat.

2) on a :

$$\sqrt{u_n u_{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}, & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \frac{1}{\sqrt{(n+1)}n}, & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\sqrt{u_n u_{n+1}} \simeq \frac{1}{n^{3/2}}, \text{quand } n \to \infty,$$

et donc la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente. Par contre la série $\sum u_n$ est divergente. En effet, elle est à termes positifs, et la série $\sum u_{2p+1}$ des termes d'ordre impair est convergente, la série $\sum u_{2p}$ des termes d'ordre pair est divergente.