
Examen de rattrapage d'analyse (S3 PMCP)

Le 8 Juin 2010.

Corrigé.

Exercice 1. On a :

$$\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{a}{2n} + \frac{1}{2n^2}}.$$

On utilise le dl : $(1 + u)^{-1} = 1 - u + u^2 + O(u^3)$ quand $u \rightarrow 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1} &= \frac{\pi}{2} \times \left(1 - \frac{a}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{a^2}{4n^2} + O(n^{-3})\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi a}{4n} + \frac{\pi}{2n^2} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\right) + O(n^{-3}). \end{aligned}$$

Puis on a $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = x + O(x^3)$ quand $x \rightarrow 0$ donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\frac{\pi a}{4n} - \frac{\pi}{2n^2} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\right) + O(n^{-3})\right) \\ &= \frac{\pi a}{4n} - \frac{\pi}{2n^2} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\right) + O(n^{-3}). \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$ on a donc :

$$u_n \sim \frac{\pi a}{4n} \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

la série $\sum u_n$ est divergente par comparaison avec une série de Riemann.

Si $a = 0$ on a donc

$$u_n \sim \frac{\pi}{4n^2} \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

la série $\sum u_n$ est convergente par comparaison avec une série de Riemann.

On écrit comme d'habitude $(1 - n^{-2})^n = e^{n \log(1 - n^{-2})}$. On a $\log(1 - x) = -x + O(x^2)$, $e^x = 1 + x + O(x^2)$ quand $x \rightarrow 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \log(1 - n^{-2}) &= -n^{-2} + O(n^{-3}) \\ n \log(1 - n^{-2}) &= -n^{-1} + O(n^{-2}), \\ e^{n \log(1 - n^{-2})} &= 1 - n^{-1} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

On en déduit que $v_n = O(n^{-2})$ et donc la série $\sum v_n$ est absolument convergente par majoration par une série de Riemann.

Exercice 2.

On regarde séparément la convergence en 1 et en $+\infty$. Pour la convergence de $\int_1^2 \frac{\ln x}{|x-1|^\alpha} dx$ en posant $x = 1 - t$ on se ramène à l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^\alpha} dt.$$

On a $\ln(1-t) \sim -t$ quand $t \rightarrow 0$ donc $\frac{\ln(1-t)}{t^\alpha} \sim -t^{1-\alpha}$ quand $t \rightarrow 0$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann on voit que l'intégrale converge si et seulement si $1 - \alpha > -1$ c'est à dire $\alpha < 2$.

Pour la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{|x-1|^\alpha} dx$ on utilise que :

$$\frac{\ln x}{|x-1|^\alpha} \sim x^{-\alpha} \ln x \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

La fonction à droite étant positive pour x assez grand, on peut donc bien utiliser la critère de convergence par comparaison.

Si $\alpha > 1$, $\alpha = 1 + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ on utilise que $|\ln x| \leq Cx^{\epsilon/2}$ pour $x \geq 1$ (la puissance l'emporte sur le logarithme) et donc :

$$|x^{-\alpha} \ln x| \leq C|x|^{-1-\epsilon/2}, \text{ pour } x \geq 1.$$

L'intégrale converge absolument par majoration par une intégrale de Riemann convergente.

Si $\alpha \leq 1$ on a

$$x^{-\alpha} \leq x^{-\alpha} \ln x, \text{ pour } x \geq e.$$

L'intégrale diverge par minoration par une intégrale de Riemann convergente. On en déduit que l'intégrale sur $]1, +\infty[$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

Exercice 3.

1) Le seul problème est en $+\infty$. On écrit en intégrant par parties :

$$\int_1^R \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^R - \frac{1}{2} \int_1^R \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx.$$

Comme $|\cos x| x^{-3/2} \leq x^{-3/2}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx$ est absolument convergente. On en déduit que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx,$$

donc l'intégrale est convergente.

2) On applique la formule des accroissements finis entre $a = x$ et $b = x + x^{-1}$:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad a < c < b.$$

Pour $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ et $|\cos x| \leq 1$ ce qui donne la formule demandée.

3) On regarde séparément la convergence en 0 et en $+\infty$. Pour la convergence en 0 on a $|\sin(x + x^{-1})x^{-\frac{1}{2}}| \leq x^{-\frac{1}{2}}$, l'intégrale $\int_0^1 \sin(x + x^{-1})x^{-\frac{1}{2}} dx$ est donc absolument convergente.

Pour la convergence en $+\infty$ on écrit :

$$x^{-\frac{1}{2}} \sin(x + x^{-1}) = x^{-\frac{1}{2}} \sin x + x^{-\frac{1}{2}} (\sin(x + x^{-1}) - \sin x) = x^{-\frac{1}{2}} \sin x + x^{-\frac{1}{2}} g(x), \text{ avec } |g(x)| \leq x^{-1},$$

pour $x \geq 1$, en utilisant le point 2). L'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} g(x) dx$ est donc absolument convergente par majoration par une intégrale de Riemann convergente. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} \sin x dx$ converge par le point 1) on en déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} \sin(x + x^{-1}) dx$.

Exercice 4.

(1) : on peut directement montrer la convergence normale de $\sum u_n(x)$ sur $]0, +\infty[$. En effet pour $n \geq 1$ on a :

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n!(x+n)} \leq \frac{1}{n!n} \leq \frac{1}{n!}, \text{ uniformément pour } x \in]0, +\infty[.$$

Comme la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ est convergente on en déduit la convergence normale sur $]0, +\infty[$.

(2) : chaque fonction u_n est continue sur $]0, +\infty[$, la fonction f est donc continue sur $]0, +\infty[$ comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.

On a :

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Pour calculer la dernière somme, on utilise la formule $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour $x = -1$ ce qui donne :

$$f(1) = 1 - e^{-1}.$$

(3) : on a

$$\begin{aligned} xf(x) - f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 - \frac{n}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n+1)} \\ &= e^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n+1)} \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

(On voit que les deux dernières sommes sont égales en changeant d'indices dans la dernière).

(4) : On a $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n!x}$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 0$, et donc :

$$|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!x} = \frac{e}{x}.$$

(5) : on déduit immédiatement de (4) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. En utilisant ensuite (3) on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = e^{-1}, \text{ c'est à dire } f(x) \sim \frac{e^{-1}}{x} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

(6) : on note que $u_0(x) = \frac{1}{x}$ et donc :

$$\begin{aligned} |f(x) - \frac{1}{x}| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1, \end{aligned}$$

en utilisant la majoration :

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \text{ pour } n \geq 1,$$

qui suit de $|x+n| \geq 1$ pour $x > 0$, $n \geq 1$. On en déduit donc que :

$$|xf(x) - 1| \leq x(e - 1),$$

et donc $xf(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$. En conclusion on a $f(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0$. On peut aussi obtenir cet équivalent en faisant tendre x vers 0 dans la formule (3) qui donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = e^{-1} - \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = e^{-1} - f(1) = 1,$$

en utilisant le calcul de $f(1)$ au point (2) et la continuité de $f(x)$ en $x = 1$ (toujours par le point (2)).

Exercice 5. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ est alternée donc convergente. Pour donner une valeur approchée de la somme S on utilise la majoration du reste d'une série alternée :

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n v_n \right| \leq v_N,$$

si v_n est une suite positive décroissante vers 0. Dans notre cas on obtient :

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \right| = |R_N| \leq N^{-3}.$$

Pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-3} il suffit de prendre $N = 10$. On a donc :

$$\left| S - \sum_{n=1}^9 \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \right| \leq 10^{-3}.$$