Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 15 Décembre 2008.

barême indicatif: 4 , 6 , 6 ,4

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions $f_n : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^\alpha}{(1+nx^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ si } x > 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$.

1) Etudier en fonction de la valeur du paramètre α la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}^+$.

2) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}^+$ vers une fonction f.

3) Soit $0 < a < b$. Etudier en fonction de la valeur du paramètre α la convergence uniforme sur $[a, b]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 2. Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction

$$g(t) = \frac{t}{1+t^3}.$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ où

$$u_n : [0, +\infty[\ni x \mapsto u_n(x) = \frac{1}{n^2} g(nx).$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On posera :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

2) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4) Vérifier que la fonction $\frac{g(t)}{t^2}$:$]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est décroissante et en déduire pour tout $x > 0$ l'encadrement :

$$\int_2^{+\infty} \frac{g(tx)}{t^2} dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{g(tx)}{t^2} dt.$$

Exercice 3.

Soit pour $n \geq 1$ la fonction u_n :$]-1, 1[\to \mathbf{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n} x^n \sin(nx).$$

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge sur $]-1, 1[$ vers une fonction continue f :$]-1, 1[\to \mathbf{R}$.

2) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et exprimer la fonction f' en termes de fonctions usuelles.

Indication : on pourra utiliser la formule :

$$\sum_{n\geq 1} a^n = a(1-a)^{-1}, \text{ valable pour } |a| < 1.$$

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n\geq 0} n! z^{n^2},$$

$$2) \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

où

$$a_{2n} = a^n,\ a_{2n+1} = b^n,\ \text{pour } 0 < a < b.$$