Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 14 Décembre 2009.

barême indicatif: 5 ;6 ;5 ;4

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} u_n : \quad & [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto u_n(x) = n\cos^n x \sin x. \end{aligned}$$

Etudier la convergence simple sur $[0, \pi/2]$, uniforme sur $[0, \pi/2]$ et uniforme sur les intervalles $[a, \pi/2]$ pour $0 < a < \pi/2$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x^2}.$$

1) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n u_n$. En déduire le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

2) Etudier la continuité de la fonction f.

3) On veut maintenant étudier la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Montrer que la série de fonctions $\sum_n \mathrm{e}^{-nx^2}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} = (1 - \mathrm{e}^{-x^2})^{-1}.$$

4) Montrer que :

$$1 \leq f(x) \leq (1 - \mathrm{e}^{-x^2})^{-1},$$

et en déduire la limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

5) On rappelle que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2s^2}\, \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}, \text{ pour } x > 0.$$

6) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2s^2}\, \mathrm{d}s \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2s^2}\, \mathrm{d}s + 1.$$

Indication : penser à la comparaison série intégrale.

7) En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x).$$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies par :

$$\begin{aligned} u_n : \quad & [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \quad & u_n(x) = (-1)^n \sin(\tfrac{1}{n(1+x)}). \end{aligned}$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
Indication : on pourra remarquer que la fonction $s \mapsto \sin s$ *est croissante sur* $]0,1]$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

3) Soit $[a,b] \subset [0,+\infty[$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge t'elle normalement sur $[a,b]$?

Exercice 4.

Soit pour $n \geq 1$ la fonction $u_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n} x^n \sin(nx).$$

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge sur $]-1,1[$ vers une fonction continue $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et exprimer la fonction f' .