
Partiel de Mathématiques (S3PMCP) n° 2

Durée 1h. Documents et calculatrices interdits.

Le Mercredi 4 Novembre 2009.

Question de cours

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions $u_n :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$.

Donner la définition des notions :

- 1) la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction $u :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$;
- 2) la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $]0, 1[$ vers la fonction $u :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$.

Exercice 1. 1) Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds,$$

et

$$\int_1^{+\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-s} ds$$

sont convergentes.

2) Montrer que pour $\alpha \geq 1$ on a :

$$\left| \int_{\alpha}^{+\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-s} ds \right| \leq e^{-\alpha} \alpha^{-3/2}.$$

3) Soit

$$F(\alpha) := \int_{\alpha}^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds.$$

Déduire de 2) que :

$$F(\alpha) \simeq e^{-\alpha} \alpha^{-\frac{1}{2}}, \text{ quand } \alpha \rightarrow +\infty.$$

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

4) En déduire un équivalent quand $\alpha \rightarrow +\infty$ de la fonction :

$$G(\alpha) = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} dx.$$

Exercice 2. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

est convergente.