
Partiel de Mathématiques (S3 PMCP) n° 2

Durée 1h30. Documents et calculatrices interdits

Le 6 Novembre 2006.

barème indicatif: 3;4;4;4;5

Exercice 1. Etudier la convergence de la série:

$$\sum_{n \geq 1} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1.$$

Exercice 2. Discuter en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence des séries:

$$\sum_{n \geq 1} \log(n) + a \log(n+1) - b \log(n+2).$$

$$\sum_{n \geq 1} e^{an^2} \left(1 - \frac{b}{n}\right)^{n^3}.$$

Exercice 3. Discuter en fonction des paramètres $\alpha, \beta > 0$ la convergence de l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt.$$

Exercice 4. Etudier pour $\alpha > 0$ la convergence de l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(\arctan t)}{t^\alpha} dt.$$

Exercice 5. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) On suppose que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge absolument.}$$

Montrer que l'intégrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge absolument.}$$

2) On suppose que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Montrer que l'intégrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

Indication: considérer la fonction $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.