Examen de rattrapage de Mathématiques (S3 PMCP)

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 11 Juin 2007.

barême indicatif: 3 ;4 ;4 ;4 ;5

Exercice 1. Soit pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}.$$

1) Déterminer pour quelles valeurs de α, β la série $\sum_n u_n$ converge.

2) Dans le cas où $\sum_n u_n$ converge , calculer sa somme.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions

$$u_n :]0, +\infty[\ni x \mapsto u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On pose

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x), \quad x \in]0, +\infty[.$$

2) Montrer que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$|f(x) - \frac{1}{x}| \leq C_0, \quad \forall \;\; 0 < x << \leq 1.$$

4) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 3. Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x^2)^{3/2}} dx.$$

Exercice 4.

1) Soit $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}^+$. Soit $a > 0$ un réel strictement positif. Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale :

$$I(x) = \int_a^{+\infty} \frac{g(xt)}{xt^2} dt$$

est convergente.

2) On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|g(t) - t| \leq Ct^2, \quad \forall \; t \in [0, 1].$$

En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$|\int_{\epsilon}^{1} \frac{g(s)}{s^2} ds + \ln \epsilon| \leq C_1 \quad \forall\ 0 < \epsilon < 1.$$

3) Montrer qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$|I(x) + \ln x| \leq C_2, \quad \forall\ 0 < x < a^{-1}.$$

Indication : poser $xt = s$ dans l'intégrale définissant $I(x)$ et couper l'intégrale en deux parties.

Exercice 5. Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction

$$g(t) = \frac{t}{1 + t^3}.$$

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où

$$u_n : [0, +\infty[\ni x \mapsto u_n(x) = \frac{1}{n^2} g(nx).$$

1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On posera :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

2) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4) Vérifier que la fonction $\frac{g(t)}{t^2} :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est décroissante et en déduire pour tout $x > 0$ l'encadrement :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{g(tx)}{xt^2} dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{x} \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{g(tx)}{xt^2} dt.$$

5) En utilisant l'exercice prédédent, montrer qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour $0 < x < \frac{1}{2}$, on ait :

$$(-\ln x + C_1) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{x} \leq (-\ln x + C_2).$$

6) En déduire que la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.