Examen de rattrapage de Mathématiques (S3 PMCP)

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 9 Juin 2008.

barême indicatif: 3,4,3,3,5,2.

Exercice 1.

Etudier la convergence des séries numériques de terme général :

$$u_n = \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}},$$

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$$

Indication : on pourra majorer le numérateur pour la deuxième série

Exercice 2.

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On suppose que le terme général u_n tend vers 0 quand $n \to \infty$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite

$$A_p = \sum_{k=0}^{3p} u_k$$

a une limite finie quand $p \to \infty$ et qu'alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{p\to\infty} A_p.$$

2) Vérifier que :

$$A_p = \sum_{l=0}^{p} u_{3l} + \sum_{l=0}^{p-1} u_{3l+1} + \sum_{l=0}^{p-1} u_{3l+2}.$$

3) On considère la série numérique de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\log(n+1) + \sin(2n\pi/3)}.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

Montrer que pour p assez grand on a $|u_{3p+1}| < |u_{3p+2}|$ et en déduire que $\sum u_n$ n'est pas une série alternée.

4) En utilisant les points 1) et 2) montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 3.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale généralisée :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \text{ converge.}$$

On pose

$$F(t) = \int_1^t f(t)dt.$$

Montrer que la fonction F est continue bornée sur $[1, +\infty[$. En déduire que l'intégrale généralisée :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge}$$

et que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = -F(1) + \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt.$$

Exercice 4.

1) Montrer que pour tout $0 < x \leq 1$ l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t + t^2} dt$$

est convergente et calculer sa valeur.

2) Calculer la fonction :

$$G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t + t^2 x} dt.$$

Indication : utiliser un changement de variables pour se ramener à au cas où l'intégrand ne dépend pas de x.

Exercice 5.

1) On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définies par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b < \infty$ et en déduire que la fonction :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

est continue sur $]0, +\infty[$.

3) On rappelle que si $f : [1, +\infty[$ est une fonction positive décroissante telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors on a :

$$|\int_1^{+\infty} f(t)dt - \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)| \leq \int_1^2 f(t)dt.$$

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $0 < x \leq 1$ on ait :

$$|F(x) - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t + t^2 x} dt| \leq C.$$

4) En utilisant l'exercice 4 montrer que

$$F(x) \simeq -\ln x \text{ quand } x \to 0^+.$$

Exercice 6.

Discuter selon les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}^+$ la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha} dx.$$