École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

# Systèmes dynamiques
# Corrigé 11

**Exercice 1.** *Décroissance surexponentielle des corrélations pour les applications dilatantes du cercle*

1. Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$, et écrivons
$$\varphi = \sum_k c_k \mathrm{e}_k, \quad \psi = \sum_k d_k \mathrm{e}_k,$$
où $\mathrm{e}_k(\theta) = \exp(2i\pi k\theta)$ pour tous $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{Z}$.
Alors
$$\psi(m^n\theta) = \sum_k d_k \exp(2i\pi k m^n \theta), \quad \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\int \varphi(\psi \circ E_m^n)\mathrm{d}\mu &= \sum_k c_{-km^n} d_k \\ &= c_0 d_0 + \sum_{k \neq 0} c_{km^n} d_k,\end{aligned}$$
et on a
$$\left|\sum_{k\neq 0} c_{km^n} d_k\right| \leqslant \left(\sum_{|j|\geqslant m^n} |c_j|^2\right)\left(\sum_{j\neq 0} |d_j|^2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. (a) On a
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2ik\pi\theta}\mathrm{d}\theta &= \left[\psi(\theta)\frac{\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}}{-2i\pi k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{-2i\pi k}\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi k}\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$
Une récurrence immédiate donne pour tout $N \geqslant 0$
$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{(2ik\pi)^N}\int_0^{2\pi} \psi^{(N)}(\theta)\mathrm{e}^{-2ik\pi\theta}\mathrm{d}\theta.$$
En particulier
$$\left|\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\left\|\psi^{(N)}\right\|_\infty}{(2\pi)^{N-1}}\frac{1}{|k|^N}.$$

(b) On a, avec les notations de la question **1.**,

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq 0}|c_{-jm^n}|^2 &\leqslant C\sum_{j\neq 0}\frac{1}{(|j|m^n)^N}\\ &\leqslant \frac{C}{m^{nN}}\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|j|^N}\\ &\leqslant \tilde{C}\mathrm{e}^{-rn},\end{aligned}$$

où $r = N\log m$.

## **Exercice 2.** *Presque tous les nombres réels sont normaux*

Soit $m \geqslant 2$. On pose

$$\chi_{k,m} = \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{m},\frac{k+1}{m}\right[},\quad k = 0,\ldots,m-1.$$

Alors pour tout $x \in [0,1)$ on a

$$a_j(x) = k \iff \chi_{k,m}(\{m^j x\}) = 1,\quad \{m^j x\} = m^j x - [m^j x].$$

L'application $E_m : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est mélangeante, donc ergodique pour $\mu$. Par le théorème ergodique, il existe $A_m \subset \mathbf{T}$ avec $\mu(A_m) = 1$ tel que pour tout $x \in A_m$ on a

$$\frac{1}{n}\#\{k,\ a_k(x) = j\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\chi_{j,m}\circ(E_m)^k](x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbf{T}}\chi_{j,m}\mathrm{d}\mu = \frac{1}{m}$$

Ainsi si on pose $A = \bigcap_m A_m$, on a $\mathrm{Leb}(A) = 1$ et tout $x \in A$ est normal.

## **Exercice 3.** *Équidistribution des rotations irrationnelles du cercle*

1. Soit $f \in L^1(\mu)$ telle que $f \circ R_\alpha = f$ $\mu$-presque partout. Notons $f(\theta) = \sum_k c_k\mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\theta}$. Alors l'invariance de $f$ donne, pour $\mu$-presque tout $\theta \in \mathbf{T}^d$,

   $$\sum_k c_k\mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\theta}\mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\alpha} = \sum_k c_k\mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\theta}.$$

   Ceci implique que

   $$c_k\mathrm{e}^{2i\pi k\cdot\alpha} = c_k,\quad k \in \mathbf{Z}^d.$$

   Puisque $(1,\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ est libre sur $\mathbf{Q}$, on obtient

   $$c_k = 0,\quad k \neq 0,$$

   c'est-à-dire que $f$ est $\mu$-presque partout égale à une constante. La transformation $R_\alpha$ n'est pas mélangeante : si $C = [-\varepsilon,\varepsilon]^d$, on a

   $$R_\alpha^{-j}(C) = \prod_{\ell=1}^{d}\Big[-\varepsilon - j\alpha_\ell, \varepsilon - j\alpha_\ell\Big]\qquad \mathrm{mod}\ \mathbf{Z}^d.$$

   Ainsi si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $R_\alpha^{-j}(C)\cap C = \emptyset$, ce qui conclut.

2. C'est le théorème de Birkhoff appliqué à $\mathbf{1}_C \in L^1(\mu)$.

3. On applique l'**Exercice 2** du TD 10 : $R_\alpha$ est une isométrie et $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide $U$, donc $S_n\varphi$ converge uniformément vers une fonction continue $\psi$. Comme $R_\alpha$ est ergodique pour $\mu$, alors $\psi$ est constante égale à $\int_{\mathbf{T}^d} \varphi \mathrm{d}\mu$.

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $C$ un produit d'intervalles. On se donne deux fonctions lisses $\chi_\varepsilon^\pm : \mathbf{T}^d \to \mathbf{R}$ telles que
$$\chi_\varepsilon^- \leqslant \mathbf{1}_C \leqslant \chi_\varepsilon^+ \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{T}^d} |\chi_\varepsilon^\pm - \mathbf{1}_C| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$
Alors pour tout $x \in \mathbf{T}^d$ on a
$$S_n\chi_\varepsilon^-(x) \leqslant S_n\mathbf{1}_C(x) \leqslant S_n\chi_\varepsilon(x),$$
et donc
$$\int \chi_\varepsilon^- \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n S_n\mathbf{1}_C(x) \leqslant \limsup_n S_n\mathbf{1}_C(x) \leqslant \int \chi_\varepsilon^+ \mathrm{d}\mu.$$
On obtient donc
$$\mu(C) - \varepsilon \leqslant \liminf_n S_n\mathbf{1}_C(x) \leqslant \limsup_n S_n\mathbf{1}_C(x) \leqslant \mu(C) + \varepsilon.$$
Le nombre $\varepsilon$ étant arbitraire, on a $S_n\varphi(x) \to \mu(C)$ quand $n \to +\infty$.

5. Le premier chiffre de $2^n$ est $j \neq 0$ si et seulement si, pour un certain $k \in \mathbf{N}$, on a
$$10^k j \leqslant 2^n < 10^k(j+1),$$
ce qui équivaut à
$$\log_{10}(j) + k \leqslant n\log_{10}(2) < \log_{10}(j+1) + k.$$
Ainsi, en notant $\alpha = \log_{10}(2) \notin \mathbf{Q}$, on a que le premier chiffre de $2^n$ est $j$ si et seulement si
$$R_\alpha^n(0) \in [\log_{10}(j), \log_{10}(j+1)[ \qquad \mod \mathbf{Z}.$$
La fréquence d'apparition asymptotique de 7 est donc donnée par
$$\lim_n \frac{1}{n} \sum \mathbf{1}_{[\log_{10}(j), \log_{10}(j+1)[}(R_\alpha^n(0)) = \log_{10}(8/7) \approx 5,8\%.$$

## **Exercice 4.** *Mélange pour une famille dense de $L^2$*

On pose
$$E = \left\{ \sum_{|k| \leqslant K} c_k e_k,\ c_k \in \mathbf{C},\ K \in \mathbf{N} \right\}.$$
Alors $E$ est dense dans $L^2(\mu)$ ; soient $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$ et $\varepsilon > 0$, et $\varphi', \psi' \in E$ tels que $\|\varphi - \varphi'\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$ et $\|\psi - \psi'\|_{L^2(\mu)} < \varepsilon$. Pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mu)$ on notera
$$C_n(\varphi_1, \varphi_2) = \int (\varphi_1 \circ f^n)\varphi_2 \mathrm{d}\mu.$$
Alors
$$\begin{aligned}
|C_n(\varphi,\psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| &\leqslant C_n(|\varphi|, |\psi - \psi'|) + C_n(|\varphi - \varphi'|, |\psi'|) \\
&\quad + |C_n(\varphi',\psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| + |\mu(\varphi')\mu(\psi' - \psi)| \\
&\quad + |\mu(\varphi' - \varphi)\mu(\psi)| \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L^2(\mu)}\|\psi - \psi'\|_{L^2(\mu)} + \|\psi'\|_{L^2(\mu)}\|\varphi - \varphi'\|_{L^2(\mu)} \\
&\quad + |C_n(\varphi',\psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')| \\
&\quad + \varepsilon \left( \|\varphi'\|_{L^2(\mu)} + \|\psi\|_{L^2(\mu)} \right) \\
&\leqslant C\varepsilon + |C_n(\varphi',\psi') - \mu(\varphi')\mu(\psi')|.
\end{aligned}$$

On obtient donc, avec une constante $C$ dépendant uniquement de $\varphi, \psi$, que pour tout $n \gg 1$,

$$|C_n(\varphi,\psi) - \mu(\varphi)\mu(\psi)| \leqslant (C+1)\varepsilon$$

Cela conclut.

## Exercice 5. *Automorphismes ergodiques du tore*

$\underline{(ii) \implies (i)}$ Vu en cours.

$\underline{(i) \implies (iii)}$ On suppose $1 \in \mathrm{sp}(A^r)$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}^d$ tel que

$$\left(A^\top\right)^r (k) = k.$$

On définit

$$\varphi(\theta) = \sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot A^j\theta}, \quad \theta \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d.$$

Alors

$$\begin{aligned}\varphi(A\theta) &= \sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{e}^{2i\pi k\cdot A^{j+1}\theta} \\ &= \varphi(\theta),\end{aligned}$$

où on a utilisé $k \cdot A^r\theta = \left(A^\top\right)^r k \cdot \theta = k \cdot \theta$.

$\underline{(iii) \implies (ii)}$ On suppose que $1 \notin \mathrm{sp}(A^r)$ pour tout $r$. Soient $k, \ell \in \mathbf{Z}^d$ ; on a

$$\int (\mathrm{e}_k \circ A^n)\mathrm{e}_\ell \mathrm{d}\mu = 0$$

si $n$ est assez grand. En effet on a

$$(\mathrm{e}_k \circ A^n)(\theta) = \exp(2i\pi k \cdot A^n\theta) = \mathrm{e}_{\left(A^\top\right)^n k}(\theta),$$

et le fait que $1 \notin \mathrm{sp}(A^r)$ pour tout $r$ implique que l'application

$$\mathbf{Z} \ni n \longmapsto \left(A^\top\right)^n k$$

est injective. En particulier $\left(A^\top\right)^n k \neq \ell$ pour tout $|n|$ assez grand. On peut alors appliquer l'**Exercice 4** pour conclure, puisque $(\mathrm{e}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbf{T}^d)$.

## Exercice 6. *Moyenne temporelle des temps de retour*

1. On applique le théorème de Kac :

   $$\int_A \tau \mathrm{d}\mu = \mu(X) - \mu(A_0^*), \quad A_0^* = \bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(\complement A).$$

   Or $A_0^*$ est invariant par $f$ : en effet, on a

   $$f^{-1}(A_0^*) = \bigcap_{n\geqslant 1} f^{-n}(\complement A),$$

   ce qui donne $A_0^* \subset f^{-1}(A_0^*)$. D'autre part on a

   $$f^{-1}(A_0^*) \setminus A_0^* = \{x \in A,\ f^n(x) \notin A,\ n \geqslant 1\}.$$

Par le théorème de Récurrence de Poincaré, on a donc $\mu(f^{-1}(A_0^*) \setminus A_0^*) = 0$ et donc $A_0^*$ est invariant.

Par ergodicité de $f$, on obtient $\mu(A_0^*) = 0$ ou 1.

Mais $\mu(A_0^*) = 1$ implique en particulier que $\mu(\complement A) = 1$ ce qui est impossible car $\mu(A) > 0$.

On a bien $\int_A \tau \mathrm{d}\mu = \mu(X) = 1$.

2. Il s'agit de montrer que $g$ est ergodique pour $\mu_A = \mu(A \cap \cdot)/\mu(A)$.

   Soit $B \subset A$ un ensemble $g$-invariant de mesure non nulle. On note $\tau' : B \to \mathbf{N}_{\geqslant 1}$ le temps de retour associé à $B$, qui est défini $\mu$-presque partout sur $B$, et $g'$ l'application de premier retour.

   Puisque $B$ est $g$-invariant, on a $g(x) \in B$ pour presque tout $x \in B$, ce qui donne

$$g|_B = g' \qquad \mu - \text{presque partout sur } B.$$

   En utilisant $\tau' \geqslant \tau$, on obtient que

$$\tau|_B = \tau' \qquad \mu - \text{presque partout sur } B.$$

   Par la question **1.**, on a donc

$$1 = \int_B \tau' \mathrm{d}\mu = \int_B \tau \mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_A \tau \mathrm{d}\mu}_{=1} - \int_{A\setminus B} \tau \mathrm{d}\mu,$$

   ce qui donne

$$0 = \int_{A\setminus B} \tau \mathrm{d}\mu \geqslant \mu(A \setminus B) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(B) = \mu(A).$$

   Ainsi $g$ est ergodique pour $\mu_A$, et donc, pour $\mu$-presque tout $x$ de $A$,

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau\left(g^k(x)\right) = \frac{1}{\mu(A)}.$$

## Exercice 7. *Un critère pour le mélange faible*

1. Supposons que $\lim_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} |a_k| = 0$. Pour tout $J \subset \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$ on note

$$\alpha_J(n) = \#\Big(\{0, \ldots, n-1\} \cap J\Big).$$

   Pour tout $j \geqslant 1$, l'ensemble

$$I_j = \left\{ n \geqslant 0,\ |a_n| \geqslant \frac{1}{j} \right\}$$

   est de densité 0. En effet, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \geqslant \frac{1}{j} \frac{\alpha_{I_j}(n)}{n}.$$

   Soit $n_j > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_j$ on a

$$\frac{\alpha_{I_j}(n)}{n} \leqslant \frac{1}{j}.$$

On peut supposer $(n_j)$ strictement croissante.

On pose
$$E = \bigcup_{j \geqslant 1} \Big( I_j \cap [n_j, n_{j+1}[ \Big).$$
C'est un ensemble de densité 0 car si $n \in [n_j, n_{j+1}[$ on a $E \cap [0, n[ \subset I_j \cap [0, n[$ et donc
$$\frac{\alpha_E(n)}{n} \leqslant \frac{\alpha_{I_j}(n)}{n} \leqslant \frac{1}{j}.$$
D'autre part, si $n \notin E$ avec $n \in [n_j, n_{j+1}[$, on a $|a_n| < \dfrac{1}{j}$, et donc
$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \notin E}} |a_n| = 0. \tag{1}$$

Réciproquement on suppose que (1) est satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geqslant$ tel que
$$\alpha_E(n) \leqslant \varepsilon n, \quad n \geqslant n_0,$$
et
$$|a_n| \leqslant \varepsilon, \quad n \geqslant n_0, \quad n \notin E.$$
On obtient donc, si $K = \sup_n |a_n|$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| &= \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{k<n \\ k \notin E}} |a_k| + \sum_{\substack{k<n_0 \\ k \notin E}} |a_k| + \sum_{\substack{k>n_0 \\ k \notin E}} |a_k| \right) \\ &\leqslant \frac{K\alpha_E(n)}{n} + \frac{Kn_0}{n} + \varepsilon,\end{aligned}$$
et donc pour tout $n$ assez grand,
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < (2K+1)\varepsilon,$$
ce qui conclut.

2. C'est direct par la question précédente.