École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 13

Exercice 1. *Théorème de Furstenberg-Kesten*

Soit $(X, \mathscr{F}, \mu)$ un espace de probabilités et $f : X \to X$ une transformation mesurable préservant μ. Soit $d \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et $A : X \to \mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$ on notera

$$A^n(x) = A(f^{n-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x).$$

On se donne $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$ et on suppose que $\log^+ \left\|A^{\pm 1}\right\| \in L^1(\mu)$ (on a noté $\log^+(z) = \max(0, \log(z))$). Montrer que pour μ presque tout point $x \in X$, les limites

$$\lambda_+(x) = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|, \quad \lambda_-(x) = \lim_n \frac{1}{n} \log \left\|A^{-n}(x)\right\|^{-1}$$

existent dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, sont indépendantes de la norme $\|\cdot\|$ choisie et que les fonctions λ_+ et λ_- sont invariantes par f, que leurs parties positives sont dans $L^1(\mu)$ et que (dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$)

$$\int \lambda_+ \mathrm{d}\mu = \lim_n \frac{1}{n} \int \log \|A^n\| \mathrm{d}\mu, \quad \int \lambda_- \mathrm{d}\mu = \lim_n \frac{1}{n} \int \log \left\|A^{-n}\right\|^{-1} \mathrm{d}\mu.$$

Exercice 2. *Formule d'Herman*

On considère $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et μ la mesure de Haar sur X. Soit $\alpha \in (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ et $f = R_\alpha : X \to X$ la rotation associée. On définit $A : X \to \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ par $A(x) = A_\sigma R_{2\pi x}, x \in X$, où $\sigma > 0$ et

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la fonction λ_+ associée à f et A (donnée par l'exercice précédent) est constante μ presque sûrement.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$ on note $Q(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+z^2}{2} & \dfrac{1-z^2}{2i} \\ -\dfrac{1-z^2}{2i} & \dfrac{1+z^2}{2} \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ on a $Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \mathrm{e}^{i\theta} R_\theta$.
3. Montrer que pour un choix de norme $\|\cdot\|$ adapté sur $M_2(\mathbf{C})$, la fonction $z \mapsto \log \|C_n(z)\|$ est sous-harmonique sur $\mathbf{C}$, où
$$C_n(z) = A_\sigma Q\left(\mathrm{e}^{2(n-1)i\pi\alpha} z\right) \cdots A_\sigma Q\left(\mathrm{e}^{2i\pi\alpha} z\right) A_\sigma Q(z).$$
4. En déduire que
$$\lambda_+ \geq \log \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2}.$$

Exercice 3. *Produits de matrices aléatoires*

Soient $A_1, \ldots, A_m \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$ et $p_1, \ldots, p_m \in [0, 1]$ tels que $p_1 + \cdots + p_m = 1$. Soit $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$, indépendantes et identiquement distribuées telles que la probablité de chaque évènement $\{B_n = A_i\}$ est égale à p_i pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que, avec probabilité 1,

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|B_{n-1} \cdots B_0\| = \lambda.$$

Exercice 4. *Théorème d'Osedelets en dimension 2*

On se place dans les conditions de l'exercice **1.** et on suppose de plus que $d = 2$ et que A prend ses valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Soit $G \subset X$ l'ensemble de mesure pleine des points $x \in X$ vérifiant la conclusion du théorème de Furstenberg-Kesten.

1. Soit $x \in G$. Montrer que $\lambda_+(x) = -\lambda_-(x) \geq 0$.
2. On suppose que $\lambda_+(x) = 0$. Montrer que pour tout $v \in \mathbf{R}^2$,
$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = 0.$$

On suppose désormais $\lambda_+(x) > 0$.

3. Montrer pour tout $n \geq 1$, il existe une base orthonormée $(s_n(x), v_n(x))$ de $\mathbf{R}^2$ tels que
$$\|A^n(x)s_n(x)\| = \|A^n(x)\|^{-1}, \quad \|A^n(x)u_n(x)\| = \|A^n(x)\|.$$
4. Montrer que si α_n est l'angle entre $s_n(x)$ et $s_{n+1}(x)$ on a
$$\limsup_n \frac{1}{n} \log |\sin \alpha_n| \leq -2\lambda_+(x).$$
5. Montrer que $(s_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}P^1$.
6. Montrer que si la limite $s(x) = \lim_n s_n(x)$ existe, alors
$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)s(x)\| = -\lambda_+(x).$$
7. Montrer que si $v \in \mathbf{R}^2$ n'est pas colinéaire à $s(x)$ alors
$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = \lambda_+(x).$$
8. Montrer que $A(x)s(x)$ est colinéaire à $s(f(x))$.

On suppose maintenant f inversible.

9. Montrer le théorème d'Osedelets : pour μ-presque tout point de X, on a
   (i) Ou bien $\lambda_+(x) = \lambda_-(x) = 0$ auquel cas $\lim_n \frac{1}{n}\|A^n(x)v\| = 0$ pour tout $v \in \mathbf{R}^2$
   (ii) Ou bien $\lambda_+(x) > 0$ et il existe une décomposition $\mathbf{R}^2 = E_s(x) \oplus E_u(x)$ telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = \begin{cases} -\lambda_+(x) & \text{si } v \in E_s(x) \setminus \{0\} \\ \lambda_+(x) & \text{si } v \in \mathbf{R}^2 \setminus E_s(x) \end{cases},$$
$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = \begin{cases} \lambda_+(x) & \text{si } v \in E_u(x) \setminus \{0\} \\ -\lambda_+(x) & \text{si } v \in \mathbf{R}^2 \setminus E_u(x) \end{cases}.$$
   On a de plus $A(x)E_\bullet(x) = E_\bullet(f(x))$, $\bullet = s, u$, et
$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |\sin \angle (E_u(f^n(x)), E_s(f^n(x)))| = 0.$$
10. Relaxer l'hypothèse que A est à valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.
11. Montrer que le théorème s'applique dans le cas où $X = \mathbf{T}^2$, $f : X \to X$ est un difféomorphisme préservant une mesure lisse μ, et $A = \mathrm{d}f$.